Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2017, Blatt 9
Thomas Markwig | Hanna Walach

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 19.06.2017, 12:00

Aufgabe 33: Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren den *Limes inferior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \inf\left\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist Grenzwert einer Teilfolge von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$$

und den *Limes superior* als

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \sup\left\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist Grenzwert einer Teilfolge von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$$

(a) Begründe, weshalb die beiden Zahlen $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ und $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ existieren und Minimum bzw. Maximum der angegebenen Menge sind.

(b) Zeige, eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und $\varliminf_{n\to\infty} b_n = \varlimsup_{n\to\infty} b_n$ gilt.

(c) Zeige, existiert $a = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, dann ist $\frac{1}{a}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

Aufgabe 34: Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen über $\mathbb{R}$.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^n+1)}{n} \cdot t^n \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n^2+1}\right)^n \cdot t^n$$

und untersuche die Reihe in (i) auf Konvergenz in den Randpunkten.

Aufgabe 35:

(a) Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes $(\sum_{n=0}^{\infty} q^n)^2$

(b) Zeige, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

HINWEIS: Schaut euch den Beweis von Lemma 12.29 an.

(c) Zeige, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in $\mathbb{K}$ haben denselben Konvergenzradius.

Aufgabe 36: Bestimme die Häufungspunkte der Menge

$$M = \left\{(-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$