

## Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 26.06.2017, 12:00

**Aufgabe 37:** Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x})$ .

**Aufgabe 38:**

(a) Verwende die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1-x^3}$  stetig in  $[0, 1]$  ist.

(b) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $L \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zeige, wenn  $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt, so ist  $f$  stetig in  $\mathbb{R}$ .

**Aufgabe 39:**

(a) Sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2^n}{n!} & \text{für } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\} \end{cases}.$$

Bestimme (mit Beweis) sämtliche Punkte auf  $[0, 1]$ , in denen  $f$  stetig ist.

(b) Finde eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur in einem Punkt stetig ist.

**Aufgabe 40:** Zeige, ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und injektiv, so ist  $f$  streng monoton. Gilt die Aussage auch noch, wenn  $f$  nicht stetig ist?