

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 03.07.2017, 12:00

Aufgabe 41: Zeige, die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 42: Zeige, ist $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ gleichmäßig stetig mit $f(0) = 0$, so gibt es eine Konstante $K > 0$ mit

$$f(x) \leq 1 + K \cdot x$$

für alle $x \in [0, \infty)$.

Aufgabe 43:

(a) Finde eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, aber unbeschränkt ist, d.h., so dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in [0, 1]$ existiert mit $|f_n(x)| > c$.

(b) Zeige, eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

(c) Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\frac{x}{n}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 44: Zeige für $x, y > 0$ und $a > 1$ die Ungleichung

$$\frac{\log_a(x) + \log_a(y)}{2} \leq \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right).$$