

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 10.07.2017, 12:00

Aufgabe 45: Zeige, daß die folgende Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, bestimme ihre Grenzfunktion und untersuche die Funktionenfolge auf gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2nx}{1 + |nx|}.$$

Aufgabe 46:

(a) Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x + y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

(b) Folgere unter der Voraussetzung, dass $\arctan(x) + \arctan(y)$ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liegt, das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

(c) Zeige die Gleichung

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 47: Überprüfe die Funktionen

$$f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^n \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

für $n \in \{0, 1, 2\}$ auf Stetigkeit in 0, Differenzierbarkeit in 0 und stetige Differenzierbarkeit auf $[0, \infty)$.

Aufgabe 48: Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Ungleichung

$$\sqrt{1 + y} < 1 + \frac{y}{2}$$

für alle $y > 0$.