

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 24.07.2017, 12:00

Aufgabe Nummer 56 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 53:

- (a) Berechne das dritte Taylorpolynom $T_{\arctan,0}^3$.
- (b) Benutze $T_{\arctan,0}^3$ und Aufgabe 46, um $\frac{\pi}{4}$ und damit π näherungsweise zu bestimmen. Zeige dabei, daß die Näherung bis auf zwei Nachkommastellen exakt ist mit $\pi = 3,14\dots$

Aufgabe 54: Sei

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

- (1) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es Polynome $p_n(x)$ und $q_n(x) = x^{3 \cdot 2^{n-1}}$, so daß gilt $f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ für $x \neq 0$.
- (2) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^k} = 0$.
- (3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(0) = 0$.
- (4) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $T_{f,0} = 0$.

Aufgabe 55: Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$, $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n}, 1)$ eine Zerlegung und $\alpha^n = (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n}, 1)$ Zwischenpunkte. Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) $ZS(f, Z_n, \alpha^n) = (e - 1) \cdot e^y \cdot \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}}$ für $y = \frac{1}{2^n}$.
- (b) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.
- (c) Berechne $\int_0^1 e^x dx$ mit Hilfe der Zwischensumme aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 56: Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

- (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos(x) dx$.
- (b) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$, substituiere $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.