

## Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 24.07.2017, 12:00

Aufgabe Nummer 56 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

### Aufgabe 53:

- (a) Berechne das dritte Taylorpolynom  $T_{\arctan,0}^3$ .
- (b) Benutze  $T_{\arctan,0}^3$  und Aufgabe 46, um  $\frac{\pi}{4}$  und damit  $\pi$  näherungsweise zu bestimmen. Zeige dabei, daß die Näherung bis auf zwei Nachkommastellen exakt ist mit  $\pi = 3,14\dots$

### Aufgabe 54: Sei

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

- (1) Für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  gibt es Polynome  $p_n(x)$  und  $q_n(x) = x^{3 \cdot 2^{n-1}}$ , so daß gilt  $f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$  für  $x \neq 0$ .
- (2) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^k} = 0$ .
- (3) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $f^{(n)}(0) = 0$ .
- (4)  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $T_{f,0} = 0$ .

**Aufgabe 55:** Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Z_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n}, 1)$  eine Zerlegung und  $\alpha^n = (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n}, 1)$  Zwischenpunkte. Zeige die folgenden Aussagen.

- (a)  $ZS(f, Z_n, \alpha^n) = (e - 1) \cdot e^y \cdot \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}}$  für  $y = \frac{1}{2^n}$ .
- (b)  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ .
- (c) Berechne  $\int_0^1 e^x dx$  mit Hilfe der Zwischensumme aus Aufgabenteil (a).

**Aufgabe 56:** Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

- (a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos(x) dx$ .
- (b)  $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$ , substituiere  $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ .