Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2017, Blatt 15
Thomas Markwig — Hanna Walach

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 16.10.2017, 12:00
Die Lösungen können Montag in der Vorlesung Analysis 2 abgegeben werden.

Aufgabe 57: Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(a) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\int \frac{2x^5+7x^4+9x^3+9x^2+6x-5}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}\, dx$.

Aufgabe 58: Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^b f(x) \cdot \sin(y \cdot x)\, dx.$$

Zeige mit Hilfe partieller Integration $\lim\limits_{y\to\infty} g(y) = 0$ und $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = 0$.

Aufgabe 59:

(a) Berechne den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$.

(b) Untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x \cdot e^{-tx}\, dx$ konvergiert und bestimme für diese den Wert des Integrals.

Aufgabe 60: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktionen

$$f_n : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

und

$$F_n : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

.

(a) Zeige, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-\pi}{2}$.

(b) Zeige, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall $[\delta, 2\pi-\delta]$ gleichmäßig gegen f.

(c) Zeige, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen

$$F : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

(d) Bestimme mit Hilfe von c. den Wert der Reihen $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Hinweis, in Teil a. darf die Formel aus Aufgabe 12.49 im Skript ohne Beweis verwendet werden; zudem sollte man Aufgabe 58 verwenden. Für b. sollte man sich an den Zusammenhang von $\sin(x)$ und e^{ix} erinnern. In Teil c. wird man unter anderem $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx$ für $k \in \mathbb{N}$ benötigen (siehe Aufgabe 57).