Universität Tübingen, FB Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2017

Klausur zur Analysis 1

Name *Matrikelnummer*

Klausurtermin: 29. September 2017

Nur vier der fünf Aufgaben sind zu bearbeiten; werden alle Aufgaben bearbeitet, werden nur die vier mit der höchsten Punktzahl gewertet.

Aufgabe 1: (Konvergenz von Zahlenfolgen)

a. Definiere, den Begriff der Konvergenz komplexer Zahlenfolgen. (2)

b. Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (3)

$$a_n = \frac{(1 - i \cdot n) \cdot (1 + i \cdot n^2)}{2n^3 + 1} \in \mathbb{C}$$

konvergiert und bestimme ihren Grenzwert, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist.

c. Beweise, daß eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert. (4)

d. Formuliere den Satz von Bolzano-Weierstraß (ohne Beweis). (3)

Aufgabe 2: (Stetigkeit)

a. Definiere, wann eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ an einem Punkt $a \in U$ stetig heißt. (2)

b. Seien $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(U) \subseteq V$ stetig in a und $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $f(a)$. Beweise, daß dann $g \circ f$ stetig in a ist. (3)

c. Beweise oder widerlege die Aussage, daß eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist. (4)

d. Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ stetig ist. Begründe Deine Antwort. (3)

Aufgabe 3: (Konvergenz von Funktionenfolgen)

a. Definiere, wann eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. (2)

b. Beweise, wenn eine Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, dann ist f stetig. (4)

c. Wie kann das Ergebnis in b. verwendet werden, um zu zeigen, daß der Sinus und der Cosinus stetig sind? Gib' nur die wesentlichen Beweisideen ohne Details. (3)

d. Zeige, daß die folgende Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, bestimme ihre Grenzfunktion und untersuche die Funktionenfolge auf gleichmäßige Konvergenz: (3)

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2nx}{1+|nx|}.$$

Aufgabe 4: (Extremstellen)

a. Definiere den Begriff der Extremstelle einer Funktion f. (2)

b. Formuliere mit Hilfe der Differentialrechnung ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Extremstelle. (4)

c. Formuliere und beweise den Satz von Rolle. (4)

d. Begründe, weshalb die Funktion (2)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \exp\big(\sin\big(\cos(x^2+1)\big)\big)$$

eine Extremstelle im Intervall $(-1, 1)$ besitzt.

Aufgabe 5: (Integration)

a. Definiere den Begriff der Stammfunktion einer Funktion f. (2)

b. Formuliere den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (ohne Beweis). (3)

c. Formuliere und beweise den Satz zur Partiellen Integration. (4)

d. Berechne das Integral $\int_1^e (9x^2-2)\cdot\ln(x)\,dx$. (3)