Universität Tübingen, FB Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2017
Hanna Wallach

Abschlußtest zur Analysis 1

Name *Matrikelnummer* *Summe der Punkte*

Klausurtermin:

Hinweise: Die Klausuraufgaben sind jeweils auf getrennten Blättern zu bearbeiten. *Nie zwei Aufgaben auf dem gleichen Blatt lösen!!!*
Alle nicht offensichtlichen Beweis-/Rechenschritte sind zu begründen.
Die Zahlen in Klammern am rechten Seitenrand geben die Punktzahlen an, die durch Lösen der jeweiligen Aufgabe erreichbar sind. Insgesamt sind es 36 Punkte.
Jedes Blatt ist am oberen Rand der Vorderseite wie folgt zu beschriften:
eigener Name *Matrikelnummer* *Aufgabennummer*

Aufgabe 1: Untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz: (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{6n^4+n+3}.$$

Aufgabe 2: Bestimme die lokalen Minima und Maxima von (4)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (3-x^2) \cdot e^x.$$

Aufgabe 3: Zeige, für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt (4)

$$\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Aufgabe 4: Zeige mittels Induktion, für alle $n \geq 1$ gilt (4)

$$\sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2+n.$$

Aufgabe 5: Beweise oder widerlege die folgende Aussage: (4)
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

Aufgabe 6: Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{3} \cdot t^n \qquad (4)$$

und untersuche sie auf Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzbereichs in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7: Es seien $f, g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $f' = 2 \cdot g$ und $g' = f$ sowie $f(0) = g(0) = 1$.
Zeige, für alle $x \in [-1,1]$ gilt (4)

$$f^2(x) - 2 \cdot g^2(x) = -1.$$

Beachte, f^2 bedeutet hier $f \cdot f$, d.h. $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$.

Aufgabe 8: Zeige, daß die folgende Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, bestimme ihre Grenzfunktion und untersuche die Funktionenfolge auf gleichmäßige Konvergenz: (4)

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{n^2 x}{n^2 x + 1}.$$

Aufgabe 9: Zeige, ist $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf U und ist $U \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, so ist auch f beschränkt. (4)