

# ANALYSIS

## KAPITEL I: Grundlegende Begriffsbildungen

### § 1 Etwas Logik

#### Definitionsversuch 1.1

Eine **Aussage** ist eine Äußerung, der eindeutig ein Wahrheitswert **wahr (w)** oder **falsch (f)** zugeordnet ist.

#### Beispiel 1.2:

- A: Dieser Satz enthält fünf Worte. **Aussage: w**  
B: Der Bundespräsident ist stets mindestens 40. **Aussage: w**  
C: Der Bundespräsident muß kein Deutscher sein. **Aussage: f**  
D: Löse Aufgabe 2. **keine Aussage**

#### Definition 1.4 (Logische Operationen)

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei Aussagen

- a)  $\neg X$  "nicht  $X$ " (Negation)
- b)  $X \wedge Y$  " $X$  und  $Y$ " (Konjunktion)
- c)  $X \vee Y$  " $X$  oder  $Y$ " (Disjunktion)
- d)  $X \Rightarrow Y$  "wenn  $X$ , dann  $Y$ " (Implikation)
- e)  $X \Leftrightarrow Y$  "genau dann  $X$ , wenn  $Y$ " (Äquivalenz)

Man notiert die Wahrheitswerte am besten in einer Wahrheitstafel!

$X$	$Y$	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Leftrightarrow Y$	$X \Rightarrow Y$	$(\neg X) \vee Y$
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f		f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f	w	w
f	f		f	f	w	w	w

### Bemerkung 1.4:

Wir haben in der Wahrheitstafel vor 1.3 gesehen:

$$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((\neg X) \vee Y)$$

### Beachte!

- Wenn  $X$  wahr ist wahr!  $X \Rightarrow Y$  wahr ist, dann ist  $Y$  wahr
- " $X \Rightarrow Y$  wahr" alleine sagt nichts über den Wahrheitswert von  $Y$  aus!

Bsp: •  $((a = b) \Rightarrow (a \cdot c = b \cdot c))$  ist wahr!

•  $2 = 2 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$  ist wahr

•  $2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 0 \cdot 3$  ist falsch

•  $2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 = 0 \cdot 0$  ist wahr

### Satz 1.5:

Seien  $X$  und  $Y$  Aussagen.

(a)  $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X))$

(b)  $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$

## Beweis:

⑤ ist bewiesen!

⑥ ist bewiesen!

$X$	$Y$	$\neg X$	$\neg Y$	$X \Rightarrow Y$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$	$Y \Rightarrow X$	$X \Leftrightarrow Y$	$(X \Rightarrow Y) \wedge \neg(Y \Rightarrow X)$
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w	w

12

## Bemerkung 1.6:

② 1.5② sagt: will man  $X \Leftrightarrow Y$  zeigen, dann reicht es,  $X \Rightarrow Y$  und  $Y \Rightarrow X$  zu zeigen!

⑤ 1.5③ ist als **Kontraposition** bekannt:  
-----  
statt aus  $X$  auf  $Y$  zu schließen, kann man aus  $\neg Y$  auf  $\neg X$  schließen!

## Definitionsversuch 1.7:

Eine **Aussageform** ist eine Äußerung, die eine oder mehrere Variablen enthält und zu einer Aussage wird, (d.h. w oder f wird), wenn man für die Variablen zulässige Werte einsetzt.

## Beispiel 1.8:

$a > b$  ist eine Aussageform, wenn wir für  $a$  und  $b$  ganze Zahlen als Werte zulassen

z.B.:  $a = 42$ ,  $b = 37$ , dann:  $a > b$  ist wahr!

## Notation 1.9:

Wir verwenden in Aussagen und Aussageformen folgende

Quantoren :	$\forall$	$\equiv$	"für alle"
	$\exists$	$\equiv$	"es existiert ein"
	$\exists_1$	$\equiv$	"es existiert genau ein"
	$\nexists$	$\equiv$	"es existiert kein"

Wenn  $P(x)$  eine Aussageform ist, dann bilden wir Aussagen

- Wie :
- $\forall x : P(x) \quad \equiv \quad$  "für alle  $x$  gilt  $P(x)$ "
  - $\exists x : P(x) \quad \equiv \quad$  "es gibt ein  $x$ , so dass  $P(x)$  gilt"

## Beispiel 1.10:

Zu jeder Zahl gibt es eine Zahl, die um genau 1 größer ist.



$$\forall x : \exists y : y = x + 1$$

## Bemerkung 1.11 (richtiges Negieren)

Seien  $X$  und  $Y$  Aussagen und  $P(x)$  eine Aussageform.

(a)  $\neg(\neg X) \quad (\Leftrightarrow) \quad X$

(b)  $\neg(X \wedge Y) \quad (\Leftrightarrow) \quad \neg X \vee \neg Y$

(c)  $\neg(X \vee Y) \quad (\Leftrightarrow) \quad \neg X \wedge \neg Y$

(d)  $\neg(\forall x : P(x)) \quad (\Leftrightarrow) \quad \exists x : \neg P(x)$

(e)  $\neg(\exists x : P(x)) \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall x : \neg P(x)$

### Beispiel 1.12:

$X$ : alle Studierenden bekommen Bonus und ein Studierendenticket

$\neg X$ : es gibt einen Studierenden, der kein Bonus oder kein Studierendenticket bekommt.

### Definition 1.13:

Ein **Axiom** ist eine Aussage, die wir als wahr vorgeben.

### Beispiel 1.14:

GG, Art. 54 zur Wahl des Bundespräsidenten:

$E$ : "Wähler ist jeder Deutsche, der ... den 40sten Lebensjahr vollendet hat."

Vom Gesetzgeber vorgegeben, ist  $E$  ein Axiom!

Zu Bsp. 1.2:  $E \Rightarrow B$

$E \Rightarrow \neg C$

## § 2 Mengen

### Definitionsversuch 2.1 (Georg Cantor)

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte nennen wir die **Elemente** der Menge.

### Notation 2.2:

① Menge angeben durch Auflisten aller Elemente

z.B.  $\{1, 2, 5, 3, 4, 0\}$

② Menge angeben durch Angabe einer Eigenschaft

z.B.  $\{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl kleiner als } 6\}$

③ Sei  $M$  eine Menge.

•  $x \in M$  heißt "x ist ein Element von M"

•  $x \notin M$  heißt "x ist kein Element von M"

④  $\{\}$  oder  $\emptyset$  bezeichnen die **leere Menge**, d.h. die Menge, die kein Element enthält.

### Definition 2.3:

Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen. W.v. definieren:

①  $M \subseteq N$   $\Leftrightarrow (x \in M \Rightarrow x \in N)$  "M ist Teilmenge von N"

②  $M = N$   $\Leftrightarrow (M \subseteq N \wedge N \subseteq M) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$

③  $M \neq N$   $\Leftrightarrow \neg(M = N) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} ((\exists x \in M : x \notin N) \vee (\exists x \in N : x \notin M))$

④  $M \subsetneq N$   $\Leftrightarrow (M \subseteq N \wedge M \neq N)$  "echte Teilmenge"

### Bsp. 2.4:

- (a)  $\{1, 2, 5, 3, 4, 0\} = \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl kleiner als } 6\}$
- (b)  $\{1, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$
- (c)  $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$
- (d)  $1 \notin \{2, 3\}, \quad 2 \in \{2, 3\}$

### Bemerkung 2.5:

Wir setzen die folgenden wichtiger Beispiele von Mengen in unserer Vorlesung als bekannt voraus:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  = Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  = Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$  = Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$  = Menge der reellen Zahlen (Decimalbrüche)

Beachte:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

$\nexists -1 \in \mathbb{N} \quad \nexists \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \quad \nexists \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Wir werden im Verlauf der Vorlesung etliche bekannte Eigenschaften dieser Mengen nochmals ausführlich thematisieren!

### Def. 2.6:

Seien  $M, N$  und  $P$  sowie  $\Pi$ : Mengen für  $i \in I$ .

- (a)  $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$  Durchschnitt von  $M$  und  $N$
- (b)  $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$  Vereinigung von  $M$  und  $N$
- (c)  $M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$  Differenzmenge von  $M$  ohne  $N$

①  $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$  Kartesisches Produkt von  $M$  &  $N$

Dabei ist  $(x, y)$  ein geordnetes Paar und es gilt  
für  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}$ :  $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

②  $M$  und  $N$  heißen **disjunkt**  $\Leftrightarrow M \cap N = \emptyset$

③  $P = M \cup N \Leftrightarrow P = M \cup N \wedge M \cap N = \emptyset$

④  $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid x \in M_i \ \forall i \in I\}$

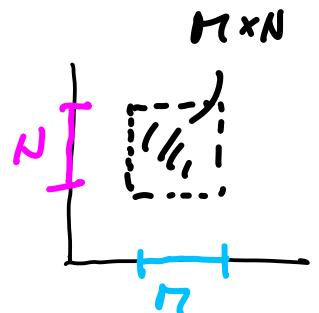
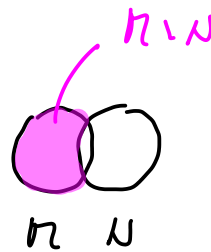
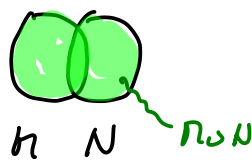
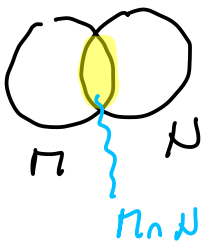
$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$

⑤  $P = \bigcup_{i \in I} M_i \Leftrightarrow P = \bigcup_{i \in I} M_i \wedge \forall i \neq j : M_i \cap M_j = \emptyset$

⑥  $\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i\}$  = kartesisches Produkt der  $M_i$

dabei  $(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall i \in I : x_i = y_i$

Graphische Veranschaulichung:



Proposition 2.7:

Seien  $M, N, P$  Mengen.

① Assoziativgesetz

•  $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$

•  $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$



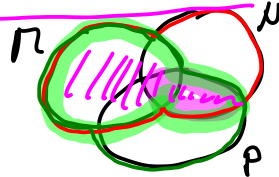
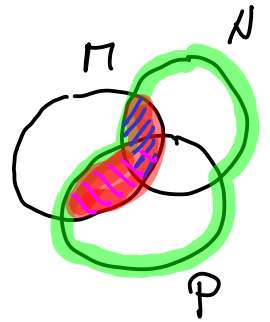
⑥ Kommutativgesetz

•  $M \cup N = N \cup M$       •  $M \cap N = N \cap M$

⑦ Distributivgesetz

•  $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$

•  $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$



⑧ Identitätsgesetze

•  $M \cup \emptyset = M$

•  $M \subseteq N \Rightarrow M \cap N = M$

⑨ Komplementgesetz:

$M \subseteq N \Rightarrow$  •  $M \cup (N \setminus M) = N$

•  $M \cap (N \setminus M) = \emptyset$

*= Komplement von M in N.*

⑩ de Morgansche Regeln:

•  $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$

•  $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$

Beweis: (Nur Übungsaufgabe)

⑥  $M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\} = \{x \mid x \in N \vee x \in M\} = N \cup M$

⑦  $x \in M \cap (N \cup P) \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N \cup P$

$\Leftrightarrow (x \in M) \wedge (x \in N \vee x \in P) \Leftrightarrow (x \in M \wedge x \in N) \vee (x \in M \wedge x \in P)$

$\Leftrightarrow x \in M \cap N \vee x \in M \cap P \Leftrightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap P)$

Bemerkung 2.8 (Paradoxon von Russell)

! Nur muss bei der Angabe von Mengen durch Eigenschaften unendlich sein.!

Betrachte die "Menge"

$$M := \{X \mid X \text{ ist eine Menge} \wedge X \notin X\}$$

= Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten!

Angenommen:  $M$  wäre eine Menge.

$$\Rightarrow M \notin M \quad \text{oder} \quad M \in M.$$

1. Fall:  $M \notin M$

$\Rightarrow M$  ist eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält

$$\Rightarrow M \in M \quad \downarrow$$

2. Fall:  $M \in M$

$\Rightarrow M$  ist eine Menge, die sich als Element enthält

$$\Rightarrow M \notin M \quad \downarrow$$

Also: Annahme war falsch, und  $M$  ist keine Menge!

# § 3 Abbildungen

## A) Abbildungen, Bilden und Urbilder

### Definition 3.1

Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen.

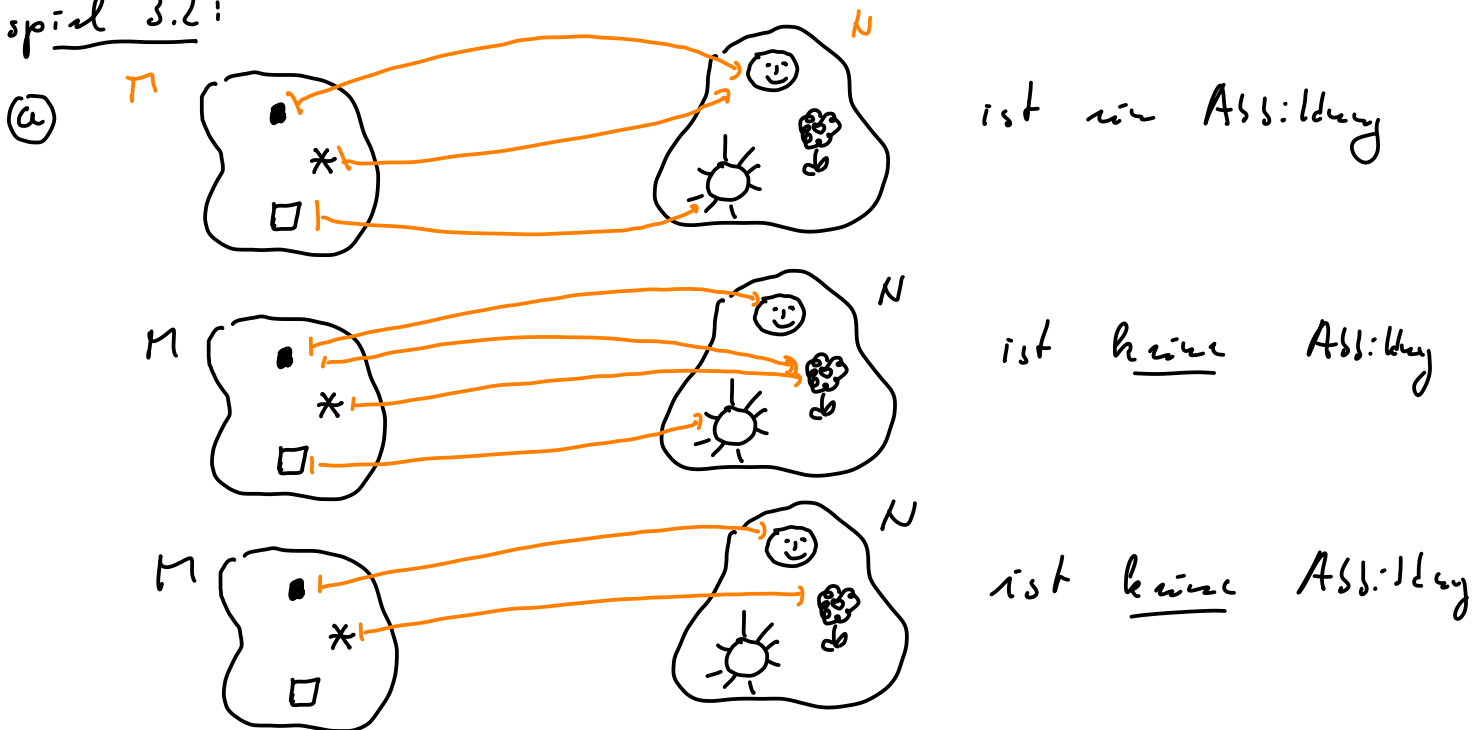
Eine **Abbildung** oder **Funktion**  $f$  von  $M$  nach  $N$  ist eine **eindeutige Zuordnung**, die **jedem** Element  $x \in M$  **genau ein** Element  $f(x) \in N$  zuweist.

Wir nennen  $M$  den **Definitionsbereich** von  $f$  und  $N$  den **Ziel-** oder **Wertebereich**.

Notation:  $f: M \rightarrow N; x \mapsto f(x)$

Beachte: Sind  $f: M \rightarrow N$  und  $g: M \rightarrow N$  zwei Abbildungen, dann gilt:  $f = g \Leftrightarrow (M = M \wedge N = N \wedge \forall x \in M: f(x) = g(x))$

### Beispiel 3.2:



$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{b} \quad f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x^2 \\ \quad \quad g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \neq g,$$

weil die Def.-bereiche nicht identisch!

© Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abb.,  $A \subseteq M$ .

Dann:  $f|_A: A \rightarrow N : x \mapsto f(x)$  heißt **Einschränkung** von  $f$  auf  $A$ .

ⓓ Sei  $M$  eine Menge.

Dann:  $\text{id}_M: M \rightarrow M : x \mapsto x$  heißt die **Identität** auf  $M$ .

### Definition 3.3:

Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung und  $A \subseteq M$  und  $B \subseteq N$ .

ⓐ  $\text{Graph}(f) := \{ (x, f(x)) \in M \times N \mid x \in M \}$  ist der **Graph** von  $f$ .

ⓑ  $f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \}$  heißt **Bild** von  $A$  unter  $f$ .

ⓒ  $\text{Im}(f) := f(M) = \{ f(x) \mid x \in M \}$  heißt das **Bild** von  $f$ .

ⓓ  $f^{-1}(B) := \{ x \in M \mid f(x) \in B \}$  heißt das **Urbild** von  $B$  unter  $f$ .

### Bsp. 3.4:

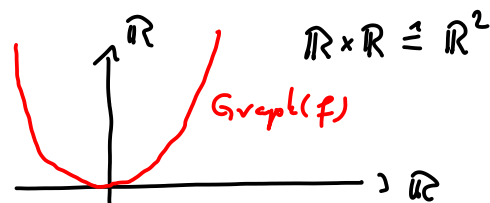
ⓐ  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

$A = \{-1, 0, 1, 2\} \Rightarrow f(A) = \{1, 0, 4\}$

$B = \{0, 1\} \Rightarrow f^{-1}(B) = \{0, 1, -1\}$

$B' = \{-1\} \Rightarrow f^{-1}(B') = \emptyset$

$\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$



$$\textcircled{5} \quad \text{nf} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x+1$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\cdot y \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{nf}^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & , y=0 \\ \{y-1\} & , y>0 \end{cases}$$

Bemerkung 3.5:

\textcircled{a} Für  $f: M \rightarrow N$  und  $g: X \rightarrow Y$ , zwei Abb.: Uryu, gilt:

$$f = g \iff \text{Graph}(f) = \text{Graph}(g)$$

\textcircled{5} Ist  $\Gamma \subseteq M \times N$  so, dass  $\forall x \in M \exists_! y \in N : (x, y) \in \Gamma$ ,

dann gibt es genau eine Abb.  $f: M \rightarrow N$  s.d.  $\Gamma = \text{Graph}(f)$ .

Fazit: Man hätte Abb. von  $M$  nach  $N$  auch als Teilmengen von  $M \times N$  definieren können, die die Bed. \textcircled{5} erfüllen!

B) Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

Def. 3.6:

Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

\textcircled{a}  $f$  heißt **surjektiv**  $\iff \forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$   
 $\iff \text{Im}(f) = N$

\textcircled{b}  $f$  heißt **injektiv**  $\iff \forall x, x' \in M$  mit  $f(x) = f(x')$  gilt:  $x = x'$

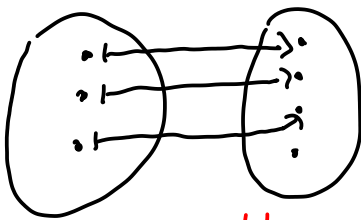
\textcircled{c}  $f$  heißt **bijektiv**  $\iff f$  ist injektiv und surjektiv

Bemerkung 3.7: Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

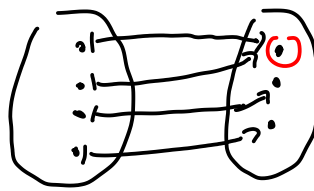
\* Wenn  $y \in N$  und  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ , dann heißt  $x$  Urbild von  $y$ .

\* Damit:

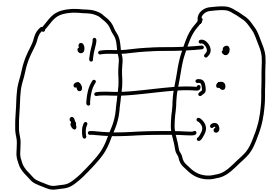
$f$ <b>surjektiv</b>	$\iff$	jedes $y \in N$ hat <b>mindestens</b> ein Urbild
$f$ <b>injektiv</b>	$\iff$	" " " <b>höchstens</b> " "
$f$ <b>bijektiv</b>	$\iff$	" " " <b>genau</b> " "



injektiv, nicht surjektiv



nicht injektiv, surjektiv



bijektiv

Bsp. 3.8:

(a)  $n_f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x+1$  ist injektiv, nicht surjektiv,

denn:

$$n_f(x) = n_f(y) \Rightarrow x = y$$

$$x+1 \quad y+1$$

$$\text{Im}(n_f) = \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \mathbb{N}$$

(b)  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x^2$  ist nicht injektiv

denn:  $g(1) = 1 = g(-1)$ , aber  $1 \neq -1$

(c)  $\text{id}_M$  ist **bijektiv** für jede Menge  $M$ .

denn:

- \* Sei  $y \in M \Rightarrow y = \text{id}_M(y) \Rightarrow \text{id}_M$  surjektiv
- \* Seien  $x, x' \in M$  mit  $\text{id}_M(x) = \text{id}_M(x') \Rightarrow \text{id}_M$  injektiv.

$$x \quad x'$$

(d) Sei  $f: M \rightarrow N$  injektiv.

Dann:  $M \rightarrow \text{Im}(f) : x \mapsto f(x)$  ist **bijektiv**

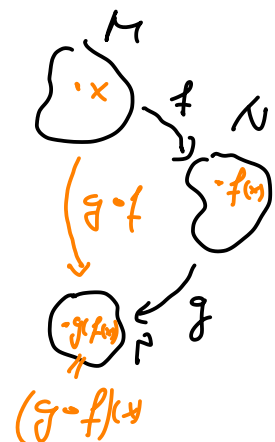
Def. 3.9:

Seien  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow P$  Abbildungen

Die Abbildung  $g \circ f: M \rightarrow P : x \mapsto g(f(x))$

heißt **Komposition** oder **Verkettung**

von  $f$  und  $g$ .



Bsp. 3.10:

Seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x+1$ .

Dann:  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$   ~~$x$~~

Also:  $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition 3.11:

Seien  $f: M \rightarrow N$ ,  $g: N \rightarrow P$ ,  $h: P \rightarrow Q$  Abbildungen.

Dann gilt:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Schreibe das wie auch:  $h \circ g \circ f$ .

Beweis: Sei  $x \in M$ .

$\Rightarrow (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$

□

Satz 3.12:

Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

Dann: (a)  $f$  ist bijektiv  $\Leftrightarrow \exists g: N \rightarrow M$  mit  $f \circ g = \text{id}_N$  und  $g \circ f = \text{id}_M$

(b) Die Abl.  $g$  in (a) ist dann eindeutig bestimmt und sie ist bijektiv.

Wir nennen  $g$  dann die Inverse von  $f$  und bezeichnen sie mit  $f^{-1}$ .

Beweis: @ " $\Leftarrow$ " Sei  $g: N \rightarrow M$  mit  $f \circ g = id_N$  und  $g \circ f = id_M$ .

Zeige:  $f$  ist surjektiv.

Sei  $y \in N$  und  $x := g(y) \in M$

$$\Rightarrow f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_N(y) = y$$

Also ist  $f$  surjektiv.

Zeige:  $f$  ist injektiv.

Seien  $x, x' \in M$  mit  $f(x) = f(x')$

$$\Rightarrow x = id_M^{-1}(f(x)) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = id_M(x') = x'$$

Also ist  $f$  injektiv.

" $\Rightarrow$ " Sei  $f$  bijektiv.  $\Rightarrow \forall y \in N \exists! x_y \in M : f(x_y) = y$

Definiere:  $g: N \rightarrow M : y \mapsto x_y = \text{eindeutige } x \text{ mit } f(x) = y$

$$\Rightarrow \forall y \in N : (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y = id_N(y)$$

$$\Rightarrow f \circ g = id_N$$

Für  $x \in M$  und  $y := f(x)$  gilt:  $f(x_y) = y = f(x)$

$$\stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = x_y \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x_y = x = id_M(x)$$

$$\Rightarrow g \circ f = id_M$$

⑤ Sei  $h: N \rightarrow M$  eine zweite Abb. mit  $f \circ h = id_N, h \circ f = id_M$ .

Für  $y \in N$  gilt:  $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_N(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y))$

$$\stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} g(y) = h(y) \Rightarrow g = h \Rightarrow g \text{ eindeutig!}$$

Zudem:  $g$  bijektiv wegen  $\forall$ -K  $\Rightarrow$ .





## § 4 Vollständige Induktion

Bemerkung 4.1 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Die folgende Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist uns vertraut:

"Addiert man zur Zahl 0 sukzessive die Zahl 1,  
so erhält man nach und nach alle natürlichen Zahlen."

Man nennt sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

Mit Hilfe der Nachfolgefunktion  $nf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: n \mapsto n+1$  können wir die Eigenschaft wie folgt formulieren:

Ist  $M \subseteq \mathbb{N}$ , so daß ①  $0 \in M$  und ②  $\forall n \in M: nf(n) \in M$  gilt,  
dann gilt schon:  $M = \mathbb{N}$

Daraus leiten wir das in folgendem Satz formulierte Beweisprinzip für Aussagen ab, die von einer natürlichen Zahl abhängen.

Satz 4.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei  $A(n)$  eine Aussageform mit zulässigen Werten  $n \in \mathbb{N}$ .

Falls ①  $A(0)$  ist wahr und

②  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  ist wahr,

so ist  $A(n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Beweis:

Setze  $M := \{ n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr} \}$

Dann: ①  $A(0)$  wahr  $\Rightarrow 0 \in M$

② Sei  $n \in M \Rightarrow A(n)$  ist wahr

$\Rightarrow A(n+1)$  ist wahr  $\Rightarrow nf(n) = n+1 \in M$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$   
ist wahr

Also nach 4.2:  $M = \mathbb{N} \Rightarrow A(n)$  wahr  $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

## Bemerkung 4.3:

Um "A(n)  $\Rightarrow$  A(n+1) ist wahr" zu zeigen, reicht es, den Fall zu betrachten, dass A(n) schon wahr ist, weil die Implikation auf alle Fälle wahr ist, wenn A(n) falsch ist!

- Wir nennen:
- "A(0) ist wahr" den **Induktionsanfang**.
  - "A(n) wird als wahr vorausgesetzt" die **Induktionsvoraussetzung**.
  - "A(n)  $\Rightarrow$  A(n+1) ist wahr" den **Induktionsschritt**.

## Beispiel 4.4:

$\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $n^3 - n$  ist durch 6 teilbar  
d.h.  $n^3 - n$  ist ein Vielfaches von 6

Beweis durch vollständige Induktion

Satz 1: A(n) :  $\exists k \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6 \cdot k$

Induktionsanfang:  $n=0$ : A(0) :  $0^3 - 0 = 0 = 6 \cdot 0$  ✓

Induktionsvoraussetzung: A(n) ist wahr  $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6 \cdot k$

Induktionsschritt: zu zeigen:

$$A(n+1) : \exists m \in \mathbb{N} : (n+1)^3 - (n+1) = 6 \cdot m$$

Dazu beachte: n oder n+1 ist gerade  
 $\Rightarrow n \cdot (n+1)$  ist eine gerade Zahl  
 $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : n \cdot (n+1) = 2 \cdot l$

$$\begin{aligned} \text{Damit: } (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = (n^3 - n) + 3 \cdot n \cdot (n+1) \\ &= 6 \cdot k + 3 \cdot 2 \cdot l = 6 \cdot (k+l) = 6 \cdot m \end{aligned}$$

Also: A(n+1) wahr  $\Rightarrow$  (A(n)  $\Rightarrow$  A(n+1) ist  $\stackrel{!}{=}$  wahr). □

## Bemerkung 4.5:

### ② Alternativer Induktionsanfang:

Statt den Induktionsanfang  $n=0$  zu wählen, kann man bei einer beliebigen ganzen Zahl  $n_0$  beginnen und erhält dann, dass  $A(n)$  wahr ist für alle ganzen Zahlen  $n \geq n_0$ .

### ③ Alternativ Induktionsvoraussetzung:

Zum Induktionsschritt schließen wir von  $A(n)$  auf  $A(n+1)$ , d.h. wir setzen  $A(n)$  als wahr voraus und schließen daraus, dass  $A(n+1)$  wahr ist.

Stattdessen können wir auch  $A(n_0)$ ,  $A(n_0+1)$ , ...,  $A(n)$  als wahr voraussetzen und auf  $A(n+1)$  schließen, wobei  $A(n_0)$  der Induktionsanfang ist.

# § 5 Mächtigkeit von Mengen

## A) Endliche Mengen

### Definition 5.1:

- Ⓐ Eine Menge  $M$  heißt **endlich**, wenn sie nur endlich viele Elemente hat.  
Setze dann:  $|M| := \#M :=$  Anzahl der Elemente von  $M$ ,  
die sogenannte **Mächtigkeit** von  $M$ .  
 $M$  heißt **unendlich** und  $|M| = \infty$ , wenn  $M$  nicht endlich ist.
- Ⓑ Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heißen **gleichmächtig**, wenn es  
**bijektive** Abbildung  $f: M \rightarrow N$ .
- Ⓒ Eine Menge  $M$  heißt **abzählbar unendlich**, falls sie gleichmächtig  
zu  $\mathbb{N}$  ist, d.h.  $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow M$  bijektiv.
- Ⓓ Eine Menge  $M$  heißt **überabzählbar**, wenn sie weder endlich  
noch abzählbar unendlich ist.
- Ⓔ Für  $m, n \in \mathbb{Z}$  setze:  $\{m, \dots, n\} := \{z \in \mathbb{Z} \mid m \leq z \wedge z \leq n\}$   
= Menge der ganzen Zahlen zwischen  $m$  und  $n$ !  
Beachte  $m > n \Rightarrow \{m, \dots, n\} = \emptyset$

Bemerkung 5.3: (Einfache Eigenschaften endlicher Mengen)

Ⓐ  $M$  endlich mit  $|M| = n$

$\Rightarrow$  zähle die Elemente in  $M$  ab, z.B.  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\Rightarrow f: \{1, \dots, n\} \rightarrow M: i \mapsto x_i$  ist bijektiv!

Umgekehrt:  $g: \{1, \dots, n\} \rightarrow M$  bijektiv

$\Rightarrow M = g(\{1, \dots, n\}) = \{g(1), \dots, g(n)\} \Rightarrow |M| = n < \infty$   
 $\forall$  paarweise verschieden

Frage:  $|M| = n < \infty \Leftrightarrow \exists f: \{1, \dots, n\} \rightarrow M$  bijektiv!

①  $M$  endlich und  $A \subseteq M \Rightarrow A$  endlich und  $|A| \leq |M|$

②  $M = A \cup B$  und  $M$  endlich  $\Rightarrow |M| = |A| + |B|$

### Satz 5.3:

Seien  $M$  und  $N$  zwei nicht-leere endliche Mengen.

Dann:

①  $|M| \leq |N| \Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow N$  injektiv

②  $|M| \geq |N| \Leftrightarrow \exists g: M \rightarrow N$  surjektiv

③  $|M| = |N| \Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow N$  bijektiv

d.h.  $M$  und  $N$  sind gleichmächtig.

### Beweis:

Seien  $M = \{x_1, \dots, x_m\}$  und  $N = \{y_1, \dots, y_n\}$  mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$

und  $y_k \neq y_l$  für  $k \neq l$ . Insb.:  $|M| = m$  und  $|N| = n$ .

① " $\Rightarrow$ " Sei  $m \leq n$ . Definiere:  $f: M \rightarrow N$  durch  $f(x_i) = y_i$  für  $i=1, \dots, m$

Dann: Sei  $x_i \neq x_j \Rightarrow i \neq j \Rightarrow f(x_i) = y_i \neq y_j = f(x_j)$   
 $\Rightarrow f$  ist injektiv.

" $\Leftarrow$ " Sei  $f: M \rightarrow N$  injektiv.

$\Rightarrow f(M) = \{f(x_1), \dots, f(x_m)\} \subseteq N$

paarweise verschieden,  
weil  $f$  injektiv

$\Rightarrow N$  enthält mindestens  $m$  p.w. verschiedene Elemente

d.h.  $|f(M)| = m$  und  $m = |f(M)| \leq |N| = n$

② " $\Rightarrow$ " Sei  $m \geq n$ . Definiere:  $g: M \rightarrow N: x_i \mapsto \begin{cases} y_i, & i \leq n \\ y_1, & i > n \end{cases}$

$\Rightarrow g(M) = \{y_1, \dots, y_n\} = N \Rightarrow g$  ist surjektiv

" $\Leftarrow$ " Sei  $g: M \rightarrow N$  surjektiv.

$$\Rightarrow \underbrace{\{g(x_1), \dots, g(x_m)\}}_{\# \leq m} = g(M) = N = \{y_1, \dots, y_n\}$$

p.w. versch. sein!

$$\Rightarrow m \geq |g(M)| = |N| = n$$

③ " $\Leftarrow$ " Sei  $f: M \rightarrow N$  bijektiv

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ ist injektiv} \Rightarrow m \leq n \\ \text{und} \\ f \text{ ist surjektiv} \Rightarrow m \geq n \end{array} \right\} \Rightarrow m = n$$

" $\Rightarrow$ " Sei  $m = n$ .

Def.:  $f: M \rightarrow N: x_i \mapsto y_i$  für  $i=1, \dots, n$

$\Rightarrow f$  injektiv, wie in Teil ②

$$\text{und } f(M) = \{y_1, \dots, y_m\} = \{y_1, \dots, y_n\} = N$$

$m=n$

$\Rightarrow f$  surjektiv und damit bijektiv □

### Korollar 5.4:

Seien  $M$  und  $N$  zwei endliche Mengen mit  $|M| = |N|$

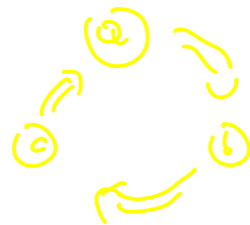
Dann sind die folgenden Aussagen für eine Abbildung

$f: M \rightarrow N$  gleichwertig:

①  $f$  ist injektiv.

②  $f$  ist surjektiv.

③  $f$  ist bijektiv.



Ringchluss

Beweis: ②  $\Rightarrow$  ③: Ang.  $f$  ist nicht surjektiv.

$$\Rightarrow \exists y \in N \setminus \text{Im}(f) \Rightarrow \text{Im}(f) \subseteq N \setminus \{y\}$$

$\Rightarrow g: M \rightarrow \mathcal{Z}_m(f) : x \mapsto f(x)$  ist bijektiv, nach Prop. 3.8

$$\Rightarrow |M| \stackrel{5.3}{=} |\mathcal{Z}_m(g)| = |\mathcal{Z}_m(f)| \leq |N \setminus \{y\}| = |N| - 1 = |M| - 1$$

Also:  $f$  ist surjektiv. ↯

⑥  $\Rightarrow$  ③: Sei  $f: M \rightarrow N$  surjektiv.

Züge:  $f$  ist injektiv. (denn bijektiv)

Annahme:  $f$  ist nicht injektiv

$$\Rightarrow \exists x, x' \in M \text{ s.d. } x \neq x', \text{ aber } f(x) = f(x') =: y$$

$\Rightarrow h: M \setminus f^{-1}(\{y\}) \rightarrow N \setminus \{y\} : x \mapsto f(x)$   
ist surjektiv, da  $f$  surjektiv

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} |M \setminus f^{-1}(\{y\})| & \geq & |N \setminus \{y\}| = |N| - 1 \\ \parallel & \uparrow & \parallel \\ & 5.3 & |M| - 1 \end{array}$$

$$|M \setminus \{x, x'\}| = |M| - 2$$

↯

Also:  $f$  ist injektiv.

③  $\Rightarrow$  ②:  $f: M \rightarrow N$  bijektiv  $\Rightarrow f$  ist injektiv.

Damit ist die Aussage durch Ringchluss bewiesen! □







Bemerkung 5.7 (Kontinuumshypothese)

Es gibt **keine** Menge  $M$  mit  $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq \mathbb{R}$ ,  
so daß  $M$  weder gleichmächtig zu  $\mathbb{Q}$   
noch zu  $\mathbb{R}$  ist.

Bemerkung Diese Aussage kann auf der Grundlage des  
Axiomensystems von Zermelo-Fränkel weder bewiesen  
noch widerlegt werden. Sie unabhängig davon!

## C) Potenzmengen

Definition 5.8

Sei  $M$  eine Menge.

Dann heißt  $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$  = Menge aller Teilmengen von  $M$

die **Potenzmenge** von  $M$ .

Bsp. 5.9:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}, \quad \mathcal{P}(\{1\}) = \{ \emptyset, \{1\} \}$$

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$$

Proposition 5.10:

Sei  $M$  eine endliche Menge mit  $|M|=n$ .

Dann:  $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ .

Beweis durch vollständige Induktion nach  $n$ :

IA:  $n=0$ :  $n=0 \Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$   
 $\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0 \quad \checkmark$

IS:  $n \mapsto n+1$ :

Sei  $|M| = n+1$ . Wähle  $y \in M$  fest.

Setze:  $N := M \setminus \{y\} \Rightarrow |N| = |M| - 1 = n$

Damit:  $\mathcal{P}(M) = \{A \subseteq M \mid y \notin A\} \cup \{A \subseteq M \mid y \in A\}$

Dabei:  $\cdot \{A \subseteq M \mid y \notin A\} = \{A \subseteq M \mid A \subseteq N\} = \mathcal{P}(N)$

$\cdot \{A \subseteq M \mid y \in A\} = \{B \cup \{y\} \mid B \subseteq N\} = \{B \cup \{y\} \mid B \in \mathcal{P}(N)\}$   
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \text{bijektiv}$   
 $\quad \quad \quad \mathcal{B} \in \mathcal{P}(N)$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = |X \cup Y| = |X| + |Y| = |\mathcal{P}(N)| + |\mathcal{P}(N)|$

$= 2 \cdot |\mathcal{P}(N)| \stackrel{\text{Ind.}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \checkmark$

Beweis fertig mit Induktion!

□

## § 6 Äquivalenzrelationen

### A) Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

Definition 6.1: Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen.

Eine Relation zwischen  $M$  und  $N$  ist eine Teilmenge  $R$  von  $M \times N$ .

Bemerkung 6.2: Sei  $R$  eine Relation zwischen  $M$  und  $N$ ,  $x \in M, y \in N$ .

Sage:  $x$  steht in Relation zu  $y$   $\Leftrightarrow (x, y) \in R$

Schreibe auch  $x R y$  statt  $(x, y) \in R$ .

Bsp. 6.3:

Ⓐ Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

Dann ist  $\text{Graph} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$  ist eine Relation zwischen  $M$  und  $N$ , bei der jeder  $x \in M$  zu genau einem  $y \in N$  in Relation steht.  
"f(x)"

Ⓑ Sei  $M = \{\text{Hörer unserer Vorlesung}\}$  und  $N = \{\text{in Tübingen studierbare Fächer}\}$ .

Dann ist  $R = \{(x, y) \in M \times N \mid x \text{ studiert } y\}$  eine Relation zw.  $M$  und  $N$ , die nicht der Graph einer Fkt. ist!

Def. 6.5:

Sei  $M$  eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf  $M$  ist Teilmenge  $R$  von  $M \times M$ , so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (R1)  $\forall x \in M : (x, x) \in R$  "Reflexivität"
- (R2)  $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$  "Symmetrie"
- (R3)  $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$  "Transitivität"

Notation 6.6:

Äquivalenzrelationen werden häufig mit Symbolen wie  $\sim$  bezeichnet.

d.h.:  $\sim \subseteq M \times M$  s.d. die folgenden Axiome gelten:

- (R1)  $\forall x \in M : x \sim x$
- (R2)  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- (R3)  $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Sage für  $x \sim y$ :  $x$  ist äquivalent zu  $y$

Def. 6.7:

Sei  $M$  eine Menge und  $\sim$  ein ÄR auf  $M$ .

Für  $x \in M$  heißt  $\bar{x} := \{y \in M \mid y \sim x\}$  die Äquivalenzklasse von  $x$ .

Zudem:  $M/\sim := \{\bar{x} \mid x \in M\}$  = Menge aller Äquivalenzklassen von  $\sim$

$x \in M \Rightarrow x$  heißt **Repräsentant** der Äquivalenzklasse  $\bar{x}$

Bsp. 6.8:

Sei  $M = \mathbb{R}^2 =$  euklidische Ebene und für  $P \in M$

Sei  $|P| =$  Abstand von  $P$  zum Ursprung  $(0,0)$ .

Definieren:  $P \sim Q \Leftrightarrow |P| = |Q|$

Zielp:  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

(R1) Sei  $P \in \mathbb{R} \Rightarrow |P| = |P| \Rightarrow P \sim P$

(R2) Seien  $P, Q \in \mathbb{R}$  mit  $P \sim Q$   
 $\Rightarrow |P| = |Q| \Rightarrow |Q| = |P| \Rightarrow Q \sim P$

(R3) Seien  $P, Q, R \in \mathbb{R}$  mit  $P \sim Q$  und  $Q \sim R$

$\Rightarrow |P| = |Q| \wedge |Q| = |R| \Rightarrow |P| = |R|$

$\Rightarrow P \sim R$

Also:  $\sim$  ist eine ÄR.

Sei  $P \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{P} := \{Q \mid Q \sim P\} = \{Q \mid |Q| = |P|\}$   
 $=$  Kreis um den Ursprung mit Radius  $|P|$

Beachte:  $P = (0,0) \Rightarrow \overline{P} = \{(0,0)\} = \{P\}$

$P, Q \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{P} \cap \overline{Q} = \emptyset$  oder  $\overline{P} = \overline{Q}$



$M = \bigcup_{r \geq 0} K_r$  wobei  $K_r =$  Kreis um den Ursprung vom Radius  $r$

d.h.  $\mathbb{R}$  ist die disjunkte Zerlegung der paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen!

### B) Äquivalenzrelationen und disjunkte Zerlegungen

Proposition 6.9:

Sei  $(M_i)_{i \in I}$  eine disjunkte Zerlegung von  $M$  und für  $x, y \in M$

$$\text{gilt: } x \sim y \iff \exists i \in I: x, y \in M_i.$$

Dann ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$  und

$$\text{für } x \in M_i \text{ gilt } \bar{x} = M_i.$$

Beweis:

$$(R1) \text{ Sei } x \in M = \bigcup_{i \in I} M_i \Rightarrow \exists i \in I: x \in M_i \Rightarrow x, x \in M_i \\ \downarrow \\ x \sim x$$

$$(R2) \text{ Sei } x, y \in M \text{ mit } x \sim y \Rightarrow \exists i \in I: x, y \in M_i \\ \Rightarrow y, x \in M_i \Rightarrow y \sim x$$

$$(R3) \text{ Sei } x, y, z \in M \text{ mit } x \sim y \text{ und } y \sim z \\ \Rightarrow \exists i \in I: x, y \in M_i \quad \text{und} \quad \exists j \in I: y, z \in M_j \\ \Rightarrow y \in M_i \cap M_j \xrightarrow{M = \bigcup_{k \in I} M_k} M_i = M_j, \text{ d.h. } i = j \\ \Rightarrow x, z \in M_i \Rightarrow x \sim z$$

Also  $\sim$  ist eine ÄR.

$$\text{Zudem: } x \in M \Rightarrow \exists i \in I: x \in M_i \Rightarrow \bar{x} = \{y \mid y \sim x\} \\ \text{und } x \notin M_j \quad \forall j \neq i \Rightarrow \bar{x} = \{y \mid y \in M_i\} = M_i \quad \square$$



Prop. 6.10:

Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $M$ .

Dann bilden die p.w. verschiedenen Äquivalenzklassen von  $\sim$  eine disjunkte Zerlegung von  $M$

d.h.  $M = \bigcup_{\bar{x} \in M/\sim} \bar{x}$

Inbesondere gilt für  $x, y \in M$ :  $\bar{x} = \bar{y}$  oder  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ .

Beweis:

Sei  $x \in M \stackrel{(R1)}{\Rightarrow} x \in \bar{x} \subseteq \bigcup_{\bar{y} \in M/\sim} \bar{y} \Rightarrow M = \bigcup_{\bar{y} \in M/\sim} \bar{y}$ .

Es bleibt zu zeigen:  $\bar{x}, \bar{y} \in M/\sim \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$  oder  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

Seien  $\bar{x}, \bar{y} \in M/\sim$  mit  $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ . zu zeigen:  $\bar{x} = \bar{y}$

$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow z \sim x$  und  $z \sim y$

$\stackrel{(R2)}{\Rightarrow} x \sim z \stackrel{(R3)}{\Rightarrow} x \sim y$

Sei  $u \in \bar{x} \Rightarrow u \sim x \stackrel{(R3)}{\Rightarrow} u \sim y \Rightarrow u \in \bar{y}$

$\Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$ .

Analog:  $\bar{y} \subseteq \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$  □

Korollar 6.11:

Sei  $M$  eine endliche Menge,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$  und  $M_1, \dots, M_s$  seien die paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen.

Daher:  $|M| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_s|$

Beweis: 6.10  $\Rightarrow M = \bigcup_{i=1}^s M_i \stackrel{5.2}{\Rightarrow} |M| = |M_1| + \dots + |M_s|$  □



## Rechenoperationen:

$$\bullet \frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}$$

$$\bullet \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$$

## Vorsicht:

Nach unten in der Definition Repräsentanten der Äkl.,  
und die sind nicht eindeutig!

Frage Wozu ist das unabhängig von der Wahl der Repräsentant?

$$\begin{array}{ccc} \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \text{ , } \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} & \stackrel{?}{\Rightarrow} & \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \stackrel{?}{=} \frac{p' \cdot r'}{q' \cdot s'} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ p \cdot q' = p' \cdot q & \wedge & r \cdot s' = r' \cdot s \quad \Rightarrow \quad p \cdot r \cdot q' \cdot s' = p' \cdot r' \cdot q \cdot s \end{array}$$

Damit: die Multiplikation von zwei Zahlen ist **wohldefiniert!**

# § 7 Gruppen und Körper

## A) Gruppen

Def. 7.1:

(a) Eine **Gruppe** ist ein Paar  $(G, *)$  bestehend aus einer nicht-leeren Menge  $G$  und einer zweistelligen Operation, d.h. einer Abb.  $*: G \times G \rightarrow G: (g, h) \mapsto g * h$ , so dass folgende Axiome gelten:

(G1)  $\forall g, h, k \in G: (g * h) * k = g * (h * k)$  "Assoziativität"

(G2)  $\exists e \in G: \forall g \in G: e * g = g$  "Existenz eines Neutralen"

(G3)  $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G: g^{-1} * g = e$  "Existenz von Inversen"

Ein Element  $wie e$  wird ein **Neutrales** von  $G$  genannt und ein Element  $wie g^{-1}$  ein **Inverses** zu  $g$  genannt.

(b) Eine Gruppe  $(G, *)$  heißt **abelsch** oder **kommutativ**, falls gilt: (G4)  $\forall g, h \in G: g * h = h * g$ . "Kommutativgesetz"

Bsp. 7.2:

(a)  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$  sind abelsche Gruppen mit 0 als Neutralem und  $-g$  als Inverses zu  $g$ .

(b)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  sind abelsche Gruppen mit 1 als Neutralem und  $\frac{1}{g}$  als Inverses zu  $g$ .

(c) Sei  $M$  eine nicht-leeren Menge.

Betrachte:  $G := \text{Sym}(M) := \{f: M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$

Beh: die Verkettung von Abbildungen liefert eine  
zweistellige Operation auf  $G$

$$G \times G \longrightarrow G : (f, g) \longmapsto f \circ g$$

Beh:  $(\text{Sym}(M), \circ)$  ist eine Gruppe

Denn: (G1) folgt aus 3.11

(G2)  $\text{id}_M \circ f = f$ , da:  $(\text{id}_M \circ f)(x) = \text{id}_M(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in M$

(G3) Sei  $f \in \text{Sym}(M)$ , d.h.  $f: M \rightarrow M$  bijektiv,  
 $\Rightarrow$   $\exists f^{-1}: M \rightarrow M : f^{-1} \circ f = \text{id}_M = f \circ f^{-1}$   
 $\Rightarrow f^{-1}$  ist Inverse zu  $f$  im Sinne von (G3).

Beh:  $|M| \geq 3 \Rightarrow (\text{Sym}(M), \circ)$  ist nicht abelsch!

Ben. 7.3:

Sei  $(G, *)$  eine Gruppe.

(a) Das neutrale Element  $e \in G$  ist eindeutig bestimmt,  
und es gilt:  $\forall g \in G : e * g = g * e = g$ .

(b) Sei  $g \in G$ . Das Inverse  $g^{-1}$  zu  $g$  ist eindeutig bestimmt,  
und es gilt:  $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$ .

(c)  $\forall g, h \in G : (g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$  und  $(g^{-1})^{-1} = g$

(d) Wenn die Gruppenoperation als Multiplikation und mit  
" " bezeichnet wird, dann schreiben wir meist 1 für

das Neutrale und  $\frac{1}{g}$  für das Inverse zu  $g$ .

Wenn die Gruppenoperation als Addition und mit "+" bezeichnet wird, dann schreiben wir meist 0 für das Neutrale und  $-g$  für das Inverse sowie  $g-h$  für  $g+(-h)$ .

### Lemma 7.4 (Kürzungsregeln)

Sei  $(G, *)$  eine Gruppe und  $g, a, b \in G$ .

Dann: (a)  $g*a = g*b \Rightarrow a=b$

(b)  $a*g = b*g \Rightarrow a=b$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{(a) } g*a = g*b &\stackrel{\text{(G3)}}{\implies} g^{-1}* (g*a) = g^{-1}* (g*b) \\ &\stackrel{\text{(G1)}}{\implies} (g^{-1}*g)*a = (g^{-1}*g)*b \\ &\stackrel{\text{(G3)}}{\implies} e*a = e*b \\ &\stackrel{\text{(G2)}}{\implies} a = b \end{aligned}$$

(b) analog.

□

## B) Körper

Def. 7.5: @ Ein **Körper** ist ein Tripel  $(K, +, \cdot)$  bestehend aus einer Menge  $K$  und zwei zweistelligen Operationen

$$+ : K \times K \rightarrow K : (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad \cdot : K \times K \rightarrow K : (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

so dass folgende Axiome gelten:

①  $(K, +)$  ist eine abelsche Gruppe mit Neutralen  $0$ .

②  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine abelsche Gruppe mit Neutralen  $1$ .

③  $\forall x, y, z \in K : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \wedge (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

"Distributivgesetze"

④ Eine Teilmenge  $L$  von  $K$ , die mit denselben Operationen auch ein Körper ist, nennt man einen **Teilkörper** von  $K$ .

Bsp. 7.6:

①  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper und  $\mathbb{Q}$  ist ein Teilkörper von  $\mathbb{R}$ .

②  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kein Körper, weil  $2$  kein multipl. Inverses hat!

③  $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$

Definieren  $+$  und  $\cdot$  auf  $\mathbb{F}_2$  durch die Tabellen:

$+$	$0$	$1$
$0$	$0$	$1$
$1$	$1$	$0$

$\cdot$	$0$	$1$
$0$	$0$	$0$
$1$	$0$	$1$

Mit dieser Festlegung erfüllt  $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$  die Axiome eines Körpers!

Beachte: •  $\mathbb{F}_2$  ist der kleinste Körper, der es gibt.

•  $\mathbb{F}_2$  ist kein Teilkörper von  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,

weil  $1 + 1 = 0$

① Sei  $p$  eine Primzahl und  $\mathbb{F}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

Erinnerung an die Division mit Rest in  $\mathbb{N}$ :

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists_! q, r \in \mathbb{N} : a = q \cdot p + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < p$$

Notation:  $r(a:p) := r$

Definition:  $+ : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$  durch  $a + b := r(a+b:p)$

$\cdot : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$  durch  $a \cdot b := r(a \cdot b : p)$

Beachte:  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p\text{-mal}} = r(1 + \dots + 1 : p) = r(p:p) = 0$

$a \in \mathbb{F}_p \Rightarrow \underset{\text{in } \mathbb{F}_p}{-a} \stackrel{!}{=} \underset{\text{in } \mathbb{N}}{p-a} \in \mathbb{F}_p$

$0 \neq a \in \mathbb{F}_p \Rightarrow \underset{\text{in } \mathbb{F}_p}{a^{-1}} = ?$  kann mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus' erfindet werden!

Notation 7.7: Sei  $K$  ein Körper und seien  $x, y, z \in K$ .

$\cdot$   $x - y := x + (-y)$

$\cdot$   $\frac{x}{z} := x \cdot z^{-1}$

$\cdot$   $x y := x \cdot y$

Lemma 7.8 (Rechenregeln)

Sei  $K$  ein Körper,  $x, y, z \in K$  und  $u, v \in K \setminus \{0\}$ .

Dann: ①  $-(-x) = x$       ②  $x + y = z \Leftrightarrow x = z - y$

③  $-(x+y) = -x - y$       ④  $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

⑤  $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$



$$(f) (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

$$(g) x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$$

$$(h) (u^{-1})^{-1} = u$$

$$(j) u \cdot x = u \cdot y \Rightarrow x = y$$

$$(i) x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0$$

$$(k) \frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{x \cdot y}{u \cdot v}, \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{x \cdot v + y \cdot u}{u \cdot v}$$

Beweis: (a), (b), (c) + (d) folgen aus 7.3 + 7.4

$$(d) \quad 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \cdot x \quad \text{Analog: } x \cdot 0 = 0$$

KR 7.4

$$(e) \quad x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y \stackrel{(d)}{=} 0$$

$\Rightarrow (-x) \cdot y$  hat die Eigenschaft des add. inversen Elementes  
 $w = x \cdot y$

$$\stackrel{\substack{7.3 \\ \text{Eindeutigkeit}}}{\Rightarrow} (-x) \cdot y = -(x \cdot y) \quad \text{Analog: } x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$$

$$(f) (-x) \cdot (-y) \stackrel{(e)}{=} - (x \cdot (-y)) \stackrel{(e)}{=} - (- (x \cdot y)) \stackrel{(a)}{=} x \cdot y$$

$$(g) \text{ analog}$$

(j) folgt mit demselben Beweis wie KR 7.4

$$(i) \text{ "}\Leftarrow\text{" } x = 0 \text{ oder } y = 0 \quad \Rightarrow x \cdot y = 0$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{" } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \quad \Rightarrow x \cdot y \in K \setminus \{0\}$$

$$x, y \in K \setminus \{0\}$$

$$\text{d.h. } x \cdot y \neq 0.$$

$$(h) \text{ umrechnen.}$$

□

# C) Summen, Produkte und der Binomische Lehrsatz

## Notation 7.9

Sei  $K$  ein Körper und seien  $x_0, \dots, x_n \in K$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Schreibe:  $\prod_{i=0}^n x_i := x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n = \text{Produkt von } x_0, \dots, x_n$

$\sum_{i=0}^n x_i := x_0 + x_1 + \dots + x_n = \text{Summe von } x_0, \dots, x_n$

Festlegung: leeres Produkt = 1, leere Summe = 0

Außerdem definieren wir für  $x \in K$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\bullet \quad x^n := \begin{cases} 1, & n=0 \\ \prod_{i=1}^n x = \underbrace{x \cdots x}_{n\text{-mal}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x^{-n} := (x^{-1})^n = \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n\text{-mal}} = \frac{1}{x^n}, \text{ falls } x \neq 0$$

$$\bullet \quad n \cdot x := \begin{cases} 0, & n=0 \\ \sum_{i=1}^n x = \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-mal}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad (-n) \cdot x := n \cdot (-x) = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{n\text{-mal}}$$

## Bem. 7.20 (Rekursionsprinzip)

Idee: definieren etwas für die nat. Zahl  $n$ , durch Rückführung auf die Definition für  $n-1$

Bsp:  $\prod_{i=0}^0 x_i := 1$  und  $\prod_{i=0}^n x_i := x_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} x_i$

Bsp. 7.11 (Gauß)

Beh:  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + \dots + n \stackrel{!}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis durch vollständige Induktion

$n=0$ :  $\sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \quad \checkmark$

$n-1 \rightarrow n$ :  $\sum_{k=0}^n k = \left( \sum_{k=0}^{n-1} k \right) + n \stackrel{\text{Ind.}}{=} \frac{(n-1) \cdot ((n-1)+1)}{2} + n$

$$= \frac{(n-1) \cdot n}{2} + \frac{2 \cdot n}{2} = \frac{(n-1) \cdot n + 2 \cdot n}{2}$$

$$= \frac{n \cdot ((n-1) + 2)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

□

Satz 7.22 (Endliche geometrische Reihe)

Sei  $K$  ein Körper,  $1 \neq q \in K$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann:  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Beweis durch vollständige Induktion:

$n=0$ :  $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1 - q}{1 - q} \quad \checkmark$

$n \rightarrow n+1$ :  $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \sum_{k=0}^n q^k \stackrel{\text{Ind.}}{=} q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$= \frac{q^{n+1} \cdot (1 - q)}{1 - q} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{\cancel{q^{n+1}} - q^{n+2} + 1 - \cancel{q^{n+1}}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

□

### Def. 7.13:

Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren:

$$n! := \begin{cases} \prod_{i=1}^0 i = 1 & , n=0 \\ \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & , n \geq 1 \end{cases}$$

heißt  $n$ -Fakultät

Für  $k, n \in \mathbb{N}$  definieren den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

### Prop. 7.14

Seien  $k, n \in \mathbb{N}$ . Dann:  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ .

Beweis:

1. Fall:  $k=0$ .

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} = \frac{(n+1)!}{0! \cdot (n+1)!} = 1 = 0 + 1 = \binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

2. Fall:  $k=n+1$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} = 1 = 1 + 0 = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

3. Fall:  $k < 0$  oder  $k > n+1$ .

$$\binom{n+1}{k} = 0 = 0 + 0 = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

4. Fall:  $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(k-1))! \cdot (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1-k)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{k}{k} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{n+1-k}{n+1-k}$$

$$= \frac{k \cdot n! + (n+1-k) \cdot n!}{(n+1-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n! \cdot (\cancel{k} + n+1 - \cancel{k})}{(n+1-k)! \cdot k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}$$

□

Satz 7.15 (Binomischer Lehrsatz)

Für  $K$  ein Körper,  $x, y \in K$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Dann: } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Beweis durch Induktion nach  $n$ :

$$\underline{n=0:} \quad (x+y)^0 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k} \quad \checkmark$$

$$\underline{n \rightarrow n+1:} \quad (x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = \underbrace{(x+y)^n \cdot x} + \underbrace{(x+y)^n \cdot y}$$

$$\stackrel{\text{I.H.}}{=} x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} + y \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot X^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \cdot \underbrace{X^{k-1+1}}_{x^k} \cdot \underbrace{y^{n-(k-1)}}_{y^{n+1-k}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

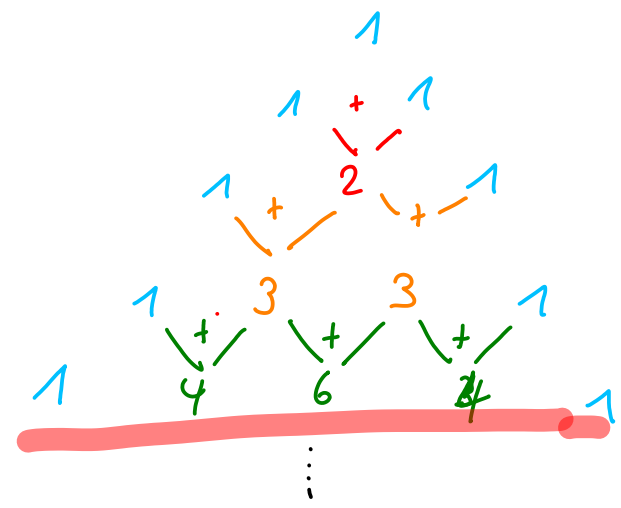
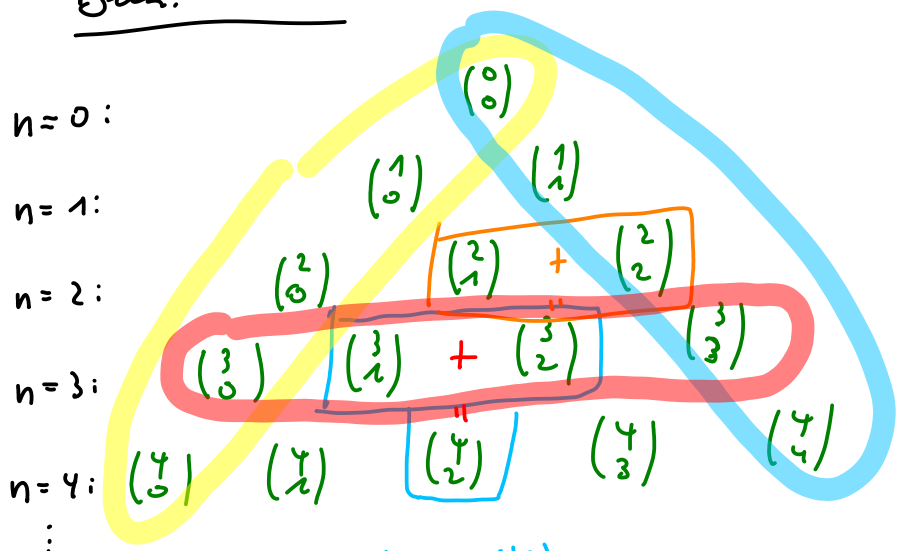
$$= X^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$\stackrel{7.14}{=} \binom{n+1}{k}$

$$= X^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} \quad \checkmark$$

Bem. 7.16 (Pascalsches Dreieck)



$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Die  $n$ -te Zeile im Pascalschen Dreieck enthält genau die Binomialkoeffizienten im Binom. Lehrsatz für  $n$ !

z.B.: 
$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot y^4 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot y + \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot y^0$$
$$= y^4 + 4x \cdot y^3 + 6 \cdot x^2 y^2 + 4 \cdot x^3 y + x^4$$

□

# § 8 Ordnungsrelationen

## A) Ordnungsrelationen

Def. 8.1: Sei  $M$  eine Menge.

Eine **Ordnungsrelation** oder **Halbordnung** oder **partielle Ordnung** auf  $M$  ist eine Relation  $R \subseteq M \times M$ , so dass für alle  $x, y, z \in M$  gilt:

- ①  $(x, x) \in R$  "Reflexivität"
- ②  $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$  "Antisymmetrie"
- ③  $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$  "Transitivität"

Wir nennen dann  $(M, R)$  auch eine **teilgeordnete Menge**.

Bsp. 8.1: Sei  $M = \mathbb{N}$ .

- ①  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y \}$  ist eine Ordnungsrelation auf  $\mathbb{N}$
- ②  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } y \}$  " " " auf  $\mathbb{N}$

Notation 8.3:

Ordnungsrelationen werden meist mit Symbolen wie " $\leq$ " statt " $R$ " betrachtet, und wir haben:

$$x \leq y \iff (x, y) \in \leq$$

Damit: ①  $\forall x \in M : x \leq x$

②  $x \leq y$  und  $y \leq x \Rightarrow x = y$

③  $x \leq y$  und  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Schreib: Wenn  $x \neq y$  und  $x \leq y$ , schreiben:  $x < y$



Bsp. 8.4: Sei  $N$  eine Menge und  $M := \mathcal{P}(N)$ .

Für  $A, B \in M$  setze:

$$A \leq B \quad (\Leftrightarrow) \quad A \subseteq B$$

Dann ist  $\leq$  eine Ordnungsrelation auf  $\mathcal{P}(N)$

damit (O1)  $\forall A \in M : A \subseteq A$

(O2)  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

(O3)  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Bemerkung: i.e. stehen nicht alle Elemente von  $\mathcal{P}(N) = M$  bzgl.  $\leq$  in Relation zueinander

z.B.:  $M = \mathcal{P}(N)$ ,  $A = \{2\}$ ,  $B = \{3\} \Rightarrow A \not\subseteq B, B \not\subseteq A$

Def. 8.5: Sei  $M$  eine Menge.

(a) Eine Ordnungsrelation  $\leq$  auf  $M$  heißt **Totalordnung** oder **lineare Ordnung**, wenn je zwei Elemente aus  $M$  bzgl.  $\leq$  vergleichbar sind, d.h.  $\forall x, y \in M$  gilt  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ .

(b) Sei  $\leq$  eine Ordnungsrelation auf  $M$ ,  $A \subseteq M$  und  $x \in A$ .

Dann:  $x$  heißt **minimal in  $A$**   $(\Leftrightarrow) \forall y \in A$  mit  $y \leq x$  gilt  $y = x$

$x$  heißt **maximal in  $A$**   $(\Leftrightarrow) \forall y \in A$  mit  $x \leq y$  gilt  $y = x$

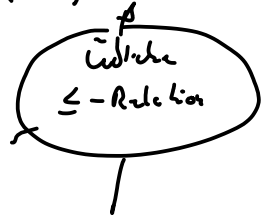
(c) Eine **Wohlordnung** ist eine **Totalordnung**, so dass jede nicht-leere Teilmenge ein minimales Element enthält.

Bem. 8.6:

Wenn eine Menge ein Minimum oder Maximum bzgl. einer **Totalordnung** besitzt, dann ist dieses eindeutig!

Bsp. 8.7:

(a)  $(\mathbb{R}, \leq)$  ist total geordnet, aber  $\leq$  ist keine Wohlordnung!



(b)  $(\mathbb{Z}, \leq)$  ist total geordnet, aber nicht wohlgeordnet

(c) Ordnen  $\mathbb{Z}$  wie folgt:

$$0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < \dots$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$  totalgeordnet und wohlgeordnet!

Bem. 8.8 (Archimedisches Prinzip)

Jede nicht-leere Teilmenge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl!

DL.  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist wohlgeordnet!

## B) Die Charakteristik eines Körpers

Def. 8.9: Es sei  $K$  ein Körper.

Wenn  $n \cdot 1_K = 0_K$  für ein  $0 \neq n \in \mathbb{N}$  gilt, dann nennen wir

$$\text{char}(K) := \min \{ m > 0 \mid m \cdot 1_K = 0_K \} \in \mathbb{N}.$$

die Charakteristik des Körpers  $K$ .

Ansonsten setzen wir  $\text{char}(K) := 0$ .

## Prop. 8.10

Sei  $K$  ein  $K$ -Supercor mit  $\text{char}(K) \neq 0$ .

Dann ist  $\text{char}(K)$  eine Primzahl.

Beweis:

Angenommen:  $n := \text{char}(K)$  keine Primzahl

$$\Rightarrow \exists 0 < a, b < n : n = a \cdot b$$

$$\text{Setze: } x := a \cdot 1_K, \quad y := b \cdot 1_K.$$

$$\Rightarrow x \cdot y = (a \cdot 1_K) \cdot (b \cdot 1_K) = (a \cdot b) \cdot 1_K = n \cdot 1_K = 0_K$$

$$\Rightarrow 0 = x = a \cdot 1_K \quad \text{oder} \quad 0 = y = b \cdot 1_K$$

$$\Downarrow \\ n > a \geq \text{char}(K) = n$$

$$\Downarrow \\ n > b \geq \text{char}(K) = n$$

Also:  $n$  ist eine Primzahl. □

Bsp. 8.11:

Ⓐ  $\text{char}(\mathbb{Q}) = \text{char}(\mathbb{R}) = 0$

Ⓑ  $\text{char}(\mathbb{F}_p) = p$

## C) Das Supremumaxion

Def. 8.12: Sei  $(M, \leq)$  total geordnet und  $\emptyset \neq A \subseteq M$ .

Ⓐ  $s \in M$  heißt eine **obere Schranke** von  $A$  :  $\Leftrightarrow \forall x \in A : x \leq s$ .  
" " " **untere Schranke** " " :  $\Leftrightarrow \forall x \in A : x \geq s$ .

Ⓑ  $A$  heißt **nach oben beschränkt** :  $\Leftrightarrow A$  hat eine obere Schranke.  
" " " **unter** " :  $\Leftrightarrow$  " " " untere " .

Ⓒ  $s \in M$  heißt **Supremum** von  $A$  :  $\Leftrightarrow s = \min\{s \in M \mid s \text{ obere Schranke von } A\}$   
" " **Infimum** " " :  $\Leftrightarrow s = \max\{s \in M \mid s \text{ untere Schranke von } A\}$

Notation:  $\sup(A) = \text{Supremum von } A$ ,  $\inf(A) = \text{Infimum von } A$

Ⓓ  $A$  heißt **beschränkt** :  $\Leftrightarrow A$  ist nach oben und unten beschränkt.

### Bsp 8.13:

(a) Sei  $A$  Teilmenge einer totalgeordneten Menge  $\mathbb{M}$ .

Wenn  $A$  ein Maximum besitzt, dann gilt:  $\max(A) = \sup(A)$ .

" " " Minimum " , " " :  $\min(A) = \inf(A)$

(b)  $\mathbb{M} = \mathbb{R}$  mit der üblichen Ordnungsrelation und  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$

$\Rightarrow 1 = \max(A) = \sup(A)$ ,  $\nexists \min(A)$ ,  $0 = \inf(A)$ .

(c)  $\mathbb{M} = \mathbb{Q}$  mit der üblichen Ordnungsrelation und  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{x}{x^2} \leq 2\}$

$\Rightarrow A$  ist nach oben beschränkt, hat in  $\mathbb{Q}$  aber kein Supremum

### Bem. 8.14 (Supremum existenz)

Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$   
besitzt in  $\mathbb{R}$  ein Supremum!

Analog: jede nicht-leere, nach unten beschränkte  
Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Infimum!

## D) Angeordnete Körper

### Def. 8.15:

Sei  $K$  ein Körper und  $\leq$  eine Totalordnung auf  $K$ .

Dann heißt  $(K, +, \cdot, \leq)$  ein **angordneter Körper**,

falls (1)  $\forall x, y, z \in K$  mit  $x < y$  gilt  $x + z < y + z$

(2)  $\forall x, y, z \in K$  mit  $x < y$  und  $0 < z$  gilt  $x \cdot z < y \cdot z$

d.h.  $\leq$  ist mit  $+$  und  $\cdot$  verträglich.

Ein  $x \in K$  heißt **positiv**, falls  $0 < x$ , und **negativ**, falls  $x < 0$ .



(c)  $0 < 1^2 = 1$   
 $\uparrow$   
 (b)

(d) Seien  $0 < x < y$ .

Dann:  $0 < y$ .

Auf:  $\frac{1}{y} < 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{y} \cdot y < 0 \cdot y = 0$   $\rightarrow \ominus$

Also:  $0 < \frac{1}{y}$ . Analog:  $0 < \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 0 = 0 \cdot \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

$\Rightarrow x < y \Rightarrow \frac{1}{y} = x \cdot \frac{1}{xy} < y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$

(e) Seien  $x < y$  und  $u < v$

$\Rightarrow x + u < y + u$  und  $u + y < v + y$

$\Rightarrow x + u < v + y = y + v$

(f) + (g) : Übergangsfälle.

□

Prop. 8.18:

Sei  $(K, +, \cdot, \leq)$  ein angeordneter Körper,  $A \subseteq K$  und  $s \in K$ .

Dann: (a)  $s = \sup(A) \Leftrightarrow$  ①  $\forall x \in A : x \leq s$

②  $\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon \in K : \exists x \in A : s - \varepsilon < x$

(b)  $s = \inf(A) \Leftrightarrow$  ①  $\forall x \in A : x \geq s$

②  $\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon \in K : \exists x \in A : s + \varepsilon > x$

Beweis: (a) " $\Rightarrow$ " Sei  $s = \sup(A) \Rightarrow s$  ist obere Schranke von  $A \Rightarrow$  ①

Sei  $0 < \varepsilon \in K \Rightarrow s - \varepsilon < s \Rightarrow s - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $A$   
 $\Rightarrow \exists x \in A : s - \varepsilon < x$

" $\Leftarrow$ " ①  $\Rightarrow$   $s$  ist eine obere Schranke

Noch z.z. es gibt keine kleinere obere Schranke von  $A$

Sei  $t \in K$  mit  $t < s$ . Setze:  $K \ni \varepsilon := s - t > 0$

$\Rightarrow \exists x \in A : x > s - \varepsilon = s - (s - t) = t$

②

$\Rightarrow t$  ist keine obere Schranke von  $A$

Also:  $s = \min \{ \text{obere Schranken von } A \} = \sup(A)$

⑥ analog zu ⑤.

12

Lemma 8.19:

Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  zwei nicht-leere Teilmengen von  $\mathbb{R}$  mit  
 $a \leq b$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ .

Dann:  $\sup(A) \leq \inf(B)$



Beweis: Vor.  $\Rightarrow$   $A$  nach oben beschränkt &  $B$  nach unten beschr.  
 $\Rightarrow$   $\sup(A)$  und  $\inf(B)$  existieren  
z.z.

Anf:  $\sup(A) > \inf(B)$

$\Rightarrow \varepsilon := \frac{\sup(A) - \inf(B)}{2} > 0$

$\Rightarrow \sup(A) - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $A$  und  
 $\inf(B) + \varepsilon$  " " untere " von  $B$

$\Rightarrow \exists a \in A : a > \sup(A) - \varepsilon = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2}$   
 $\exists b \in B : b < \inf(B) + \varepsilon = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2}$

$\Rightarrow a > b$   $\Downarrow$

Also:  $\sup(A) \leq \inf(B)$

13

# § 9 Eigenschaften der reellen Zahlen

## A) Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen

### Theorem 9.1

Der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen mit der üblichen Ordnungsrelation ist der einzige angeordnete Körper, in dem jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

### Bemerkung 9.2:

Sei  $(K, +, \cdot, \leq)$  ein angeordneter Körper, der das Supremumaxiom erfüllt, dann sagt Theorem 9.1:

$\exists f: \mathbb{R} \rightarrow K$  bijektiv, so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$

•  $f(x+y) = f(x) + f(y)$      $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

•  $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

Idee: alle weiteren Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  werden wir aus diesen Axiomen ableiten, ohne Bezug zu Dezimalzahlen?

Satz 9.3 ( $\mathbb{R}$  ist archimedisch angeordnet.)

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 < x < y$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,

so dass:  $y < n \cdot x$ .

Beweis:

Setze:  $A := \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ .

Zeige:  $y$  ist kein Oberes Schranken von  $A$ .





3. Fall:  $x < 0$

$$\Rightarrow 0 < -x \stackrel{1.2. Fall}{\Rightarrow} \exists m \in \mathbb{N} : m \leq -x < m+1$$

$$\Rightarrow -(m+1) < x \leq -m$$

Fall 3.a:  $x = -m$ , setze:  $n := -m$  ✓

Fall 3.b:  $x < -m$ , setze:  $n := -(m+1)$  ✓

(b) Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0$ .

$$\stackrel{8.17}{\Rightarrow} 0 < \frac{1}{\varepsilon} \stackrel{①}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\stackrel{8.17}{\Rightarrow} 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

□

## B) Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Def. 9.5: Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  heißt ein abgeschlossenes Intervall.
  - $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  " " offenes Intervall.
  - $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  - $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  } heißen halboffene Intervalle.
  - $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
  - $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
  - $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
  - $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$
- } heißen unendliche Intervalle.

Satz 9.6 ( $\mathbb{Q}$  liegt dicht in  $\mathbb{R}$ .)

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann:  $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in (a, b)$

D.h. zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale!

Beweis:

$$\begin{aligned} \cdot a < b &\Rightarrow 0 < b - a \stackrel{9.4}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: 0 < \frac{1}{n} < b - a \\ \cdot 9.4 &\Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}: m \leq n \cdot a < m + 1 \\ &\Rightarrow a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + b - a = b \end{aligned}$$

$\cap$   
 $\mathbb{Q}_n(a, b)$

Satz 9.7 (Bernoullische Ungleichung)

Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann:  $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Beweis durch Induktion nach  $n$ :

$n=0$ :  $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x \quad \checkmark$

$n \mapsto n+1$  Ind.  $\Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow_{1+x \geq 0} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+n \cdot x) \cdot (1+x) = 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot x \end{aligned}$$

Satz 9.8:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \exists_1 a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a^n = x$$

Wir nennen  $a$  die nicht-negative  $n$ -te Wurzel aus  $x$

Notation:  $a =: \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$ .

Beweis:

Verwendet 9.1, insbesondere das Supremum + Bernoullische Ungleichung!

Satz 9.10:

$$\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$$

Beweis:

Ang:  $\exists q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $q^2 = 2$

o.E:  $\frac{a}{b}$  ist in gekürzter Form, d.h.  $a$  &  $b$  sind teilerfremd!

$$\Rightarrow 2 = q^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow a^2 \text{ ist gerade}$$

$$\Rightarrow a \text{ ist gerade} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = 2 \cdot c$$

$$\Rightarrow 4 \cdot c^2 = (2 \cdot c)^2 = a^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow b^2 = 2 \cdot c^2 \text{ ist gerade}$$

$$\Rightarrow b \text{ ist gerade} \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z} : b = 2 \cdot d$$

↙  $a, b$  teilerfremd

Also:  $\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$

□

Nachtrag: Beweis von Satz 9.8

Beh:  $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \exists a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a^n = x$

Beweis:

Existenz von  $a$ :

Ang:  $\exists a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $a \neq b$  und  $a^n = x = b^n$

o.E:  $0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq \underbrace{a^n}_x < \underbrace{b^n}_x$  ↯

Also: es gibt keines  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $a^n = x$ .

Existenz von  $a$ :

Falls  $x = 0$ , dann:  $a = 0$  tut's!

Sei also  $0 < x$ .

Def.:  $A := \{ y \in \mathbb{R} \mid \underline{y \geq 0} \text{ und } \underline{y^n \leq x} \} \neq \emptyset$

$\nearrow 0$   
↓

Zeige:  $1+x$  ist eine obere Schranke für  $A$

Sei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y \geq 1+x > 0$ .

$$\Rightarrow y^n \geq (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x > x$$

$\Rightarrow y \notin A \Rightarrow 1+x$  ist obere Schranke von  $A$

Also:  $a := \sup(A)$  existiert

Zeige:  $a^n = x$

Ang:  $a^n < x$

Es sei: finde  $\varepsilon > 0$ , s.d.  $a + \varepsilon \in A$   $\nabla$

Dann:  $a > 0 \Rightarrow c := \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{a^{n-k}}_{\geq 0} \geq \binom{n}{1} = 1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} > 0 \Rightarrow \underbrace{x - a^n}_{> 0} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \cdot (x - a^n) > 0$$

Setze:  $\varepsilon := \min \left\{ \frac{x - a^n}{c}, 1 \right\} > 0$

$$\Rightarrow a^n + c \cdot \varepsilon \leq a^n + c \cdot \frac{x - a^n}{c} = x$$

Es sei:  $0 < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow \forall k \geq 1: 0 < \varepsilon^k \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a + \varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \varepsilon^k = a^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \underbrace{\varepsilon^k}_{\leq \varepsilon} \\ &\stackrel{\text{B.L.S.}}{\leq} a^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \varepsilon = a^n + c \cdot \varepsilon \leq x \end{aligned}$$

$\Rightarrow a + \varepsilon \in A \nabla \Rightarrow a = \sup(A)$

Also:  $a^n \geq x$

Aufg:  $a^n > x$

Idee: Finde  $\varepsilon > 0$  und  $y \in A$ , s.d.  $y^n > (a-\varepsilon)^n \geq x$

Datum:  $a^n > x > 0$  und  $a > 0 \Rightarrow a > 0$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot (a^n - x)}{n \cdot a^n} > 0$$

Setze:  $\varepsilon := \min \left\{ \frac{a \cdot (a^n - x)}{n \cdot a^n}, a \right\} > 0$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{a} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{a} \geq -1$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{\varepsilon}{a})^n = (1 + (-\frac{\varepsilon}{a}))^n \geq 1 + n \cdot (-\frac{\varepsilon}{a}) = 1 - n \cdot \frac{\varepsilon}{a}$$

Bernoulli

$$\Rightarrow a^n \cdot (1 - \frac{\varepsilon}{a})^n \geq a^n \cdot (1 - n \cdot \frac{\varepsilon}{a}) \geq a^n \cdot (1 - \frac{n \cdot (a^n - x)}{n \cdot a^n})$$

$\parallel$   $\parallel$   $\parallel$

$$(a - \varepsilon)^n \qquad \qquad \qquad a^n - (a^n - x)$$

$\parallel$   $\parallel$

$$x$$

Bemerk:  $a - \varepsilon < a = \sup(A)$

$$\Rightarrow \exists y \in A : a - \varepsilon < y$$

$$\Rightarrow y^n > (a - \varepsilon)^n \geq x \quad \downarrow y \in A$$

Also:  $a^n = x$

□

# § 10 Der Körper der komplexen Zahlen

## A) Die Axiomatik der komplexen Zahlen

### Satz 10.2

Die Menge  $\mathbb{C} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  wird durch

$$(x, y) + (u, v) := (x+u, y+v)$$

und

$$(x, y) \cdot (u, v) := (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$$

ein Körper, der Körper der komplexen Zahlen.

Beweis: Übungsaufgabe  $\square$

### Bem. 10.1

- $0_{\mathbb{C}} := (0, 0) \in \mathbb{C}$  ist das Neutrale der Addition
- $1_{\mathbb{C}} := (1, 0) \in \mathbb{C}$  ist das " " " Multiplikation
- $(-x, -y)$  ist das additive Inverse von  $(x, y)$
- $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$  ist das multiplikative Inverse von  $(x, y) \neq (0, 0)$

•  $i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}; x \longmapsto (x, 0)$  erfüllt

- $i(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = i(x) \cdot i(y)$
- $i(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = i(x) + i(y)$
- $i(1) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}$
- $i$  ist injektiv

Also: wir identifizieren  $\mathbb{R}$  mit  $i(\mathbb{R}) = x$ -Achse,  
d.h.  $x$ -Achse ist Teilkörper von  $\mathbb{C}$ , der isomorph  
zu  $\mathbb{R}$  ist.

© Setze:  $i := (0, 1)$

$$\Rightarrow i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

"  $i(-1) \stackrel{!}{=} -1$

Identifikation:  $(x, 0) = i(x) \stackrel{!}{=} x$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \stackrel{!}{=} x + i \cdot y$$

Damit wird die Multiplikation zu:

$$(x+iy) \cdot (u+iv) = x \cdot u + iy \cdot iv + x \cdot iv + iy \cdot u$$

$$= xu + i^2 yv + i \cdot xv + i \cdot yu = (xu - yv) + i \cdot (xv + yu)$$

Damit:  $\mathbb{C} = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

### Lemma 10.4

Es gibt keine Totalordnung " $\leq$ " auf  $\mathbb{C}$ , so daß  $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$  ein angeordneter Körper ist.

Beweis:

Ang. dass.

$$\Rightarrow 0 < i^2 = -1 < 0 \quad \text{⚡} \quad \square$$

### Def. 10.5:

a)  $| \cdot | : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x+iy \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$  heißt **Betragsfunktion**  
auf  $\mathbb{C}$  und  $|z|$  heißt der **Absolutbetrag** von  $z \in \mathbb{C}$ .

Beachte:  $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \sqrt[3]{x^2}$

b)  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x+iy \mapsto x-iy$  heißt die **Komplex Konjugation**  
und  $\bar{z}$  heißt der **Komplex Konjugierte** von  $z \in \mathbb{C}$ .



- (c)  $\operatorname{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}: x+iy \mapsto x$  heißt der **Realteil** und  
 $\operatorname{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}: x+iy \mapsto y$  " " **Imaginärteil**.

Bsp. 10.6:

Sei  $z = i - 1 = (-1) + 1 \cdot i = (-1) + i$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = 1, \bar{z} = (-1) + (-1) \cdot i = -1 - i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = (-1 + i) \cdot (-1 - i) = (-1)^2 - (-1) = 2 = |z|^2$

Lemma 10.7 (Rechenregeln in  $\mathbb{C}$ ) Sei  $z, w \in \mathbb{C}$ .

- (a)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  Betrag ist multiplikativ
- (b)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  Dreiecksungleichung
- $||z| - |w|| \leq |z + w|$
- (c)  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  Definition des Betrags
- (d)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  (e)  $z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- (f)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  (g)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (h)  $\overline{\bar{z}} = z$  (i)  $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- (j)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  (k)  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  (l)  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

Beweis: (b) 2. ge. u. + (c) - (d) : Übungsaufgabe

(a) Sei  $z = x + iy, w = u + iv$

$\Rightarrow |z \cdot w|^2 = |(xu - yv) + i(xv + yu)|^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$   
 $= x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2$   
 $= x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 = (x^2 + y^2) \cdot (u^2 + v^2) = |z|^2 \cdot |w|^2$

$\stackrel{2.3}{\Rightarrow} |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  ( $|z| \cdot |w|$ )<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 \textcircled{b} \quad |z+w|^2 &\stackrel{\textcircled{a}}{=} (z+w) \cdot \overline{(z+w)} \stackrel{\textcircled{b}}{=} (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) \\
 &= z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} = |z|^2 + (z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot \bar{w}}) + |w|^2 \\
 &\quad \textcircled{c} \textcircled{d} \textcircled{e} \\
 &\stackrel{\textcircled{f}}{=} |z|^2 + 2 \cdot \underbrace{\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})}_{\leq |z \cdot \bar{w}|} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2 \cdot |z \cdot \bar{w}| + |w|^2 \\
 &\stackrel{\textcircled{g}}{=} |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2 \stackrel{\textcircled{h}}{=} (|z| + |w|)^2 \\
 &= (|z| + |w|)^2 \\
 \Rightarrow 8.17 \quad |z+w| &\leq (|z| + |w|) \quad \square
 \end{aligned}$$

Üsp. 10.8:

$$\textcircled{a} \quad z = 3 + 2i, \quad w = 5 - i$$

$$\Rightarrow \cdot z \cdot w = (3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + i(3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5) = 17 + 7i$$

$$\cdot |w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\cdot \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{1}{26} \cdot (3 + 2i) \cdot (5 + i)$$

$$= \frac{1}{26} \cdot ((3 \cdot 5 - 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 5)i) = \frac{1}{26} \cdot (13 + 13i)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\textcircled{b} \quad z = 3 + 4i, \quad w = 5 - 12i$$

$$\Rightarrow \cdot z + w = (3 + 5) + (4 - 12) \cdot i = 8 - 8i$$

$$\cdot |z+w| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{2} \cdot 8 < 2 \cdot 8 = 16 < 18$$

$$= 5 + 13 = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + (-12)^2} = |z| + |w|$$

$$\cdot \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(3 + 4i) + (3 - 4i)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 = \operatorname{Re}(z)$$

# B) Geometrische Interpretation der Arithmetik in $\mathbb{C}$

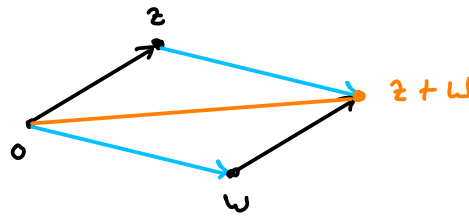
## Bemerkung 10.9

(a) Addition in  $\mathbb{C} \hat{=}$  Vektoraddition

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$w = u + iv = (u, v)$$

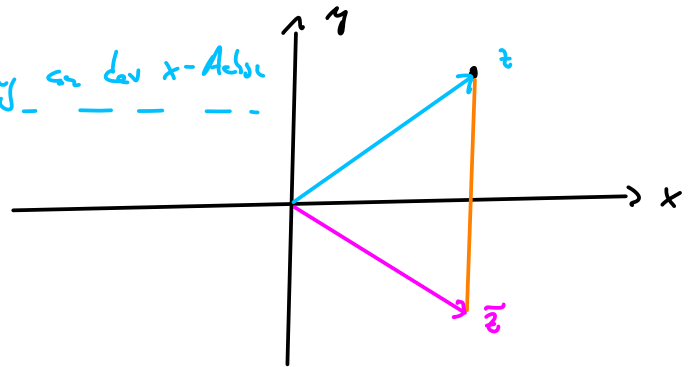
$$\Rightarrow z + w = (x+u) + i(y+v) \\ = (x+u, y+v)$$



(b) Komplexe Konjugation = Spiegelung an der x-Achse

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = x - iy = (x, -y)$$



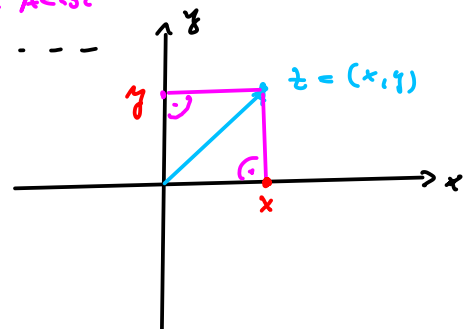
(c) Reellteil = orthogonale Projektion auf die x-Achse

Imaginärteil = " " " " y-Achse

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

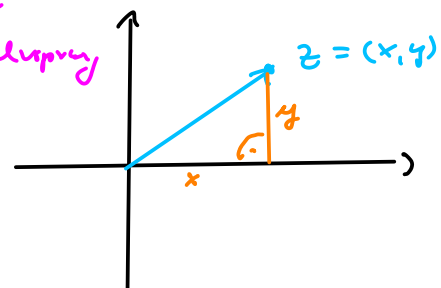


(d) Betrag von z = Länge des Vektors z  
= Abstand von z zum Ursprung

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$\Rightarrow (\text{Länge von } z)^2 = x^2 + y^2$$

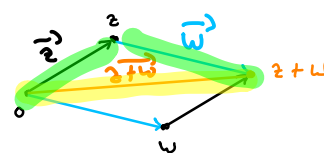
$$= \text{Länge von } z = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$



(e) Dreiecksungleichung

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Länge von  $\vec{z+w}$       " Länge  $\vec{z}$       " Länge  $\vec{w}$



Direkt von 0 nach  $z+w$  zu gehen ist kürzer als den Umweg über  $z$  zu machen.

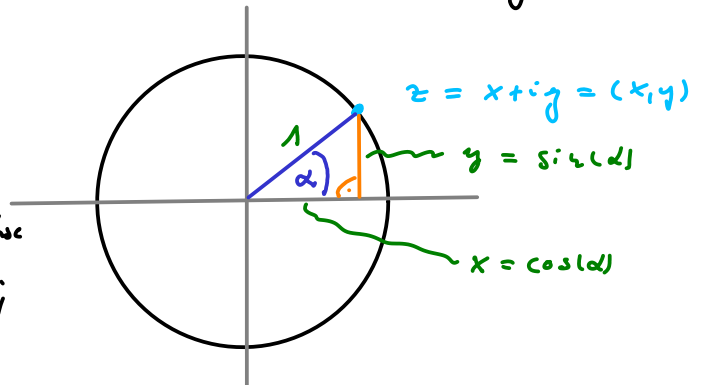
⑧ Maße der Punkte vom Betrag 1

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

= Kreis vom Radius 1 um den Ursprung

Beachte!

der Winkel  $\alpha$ , den die Strecke  $\overline{Oz}$  mit der x-Achse einschließt, legt  $z$  eindeutig fest.

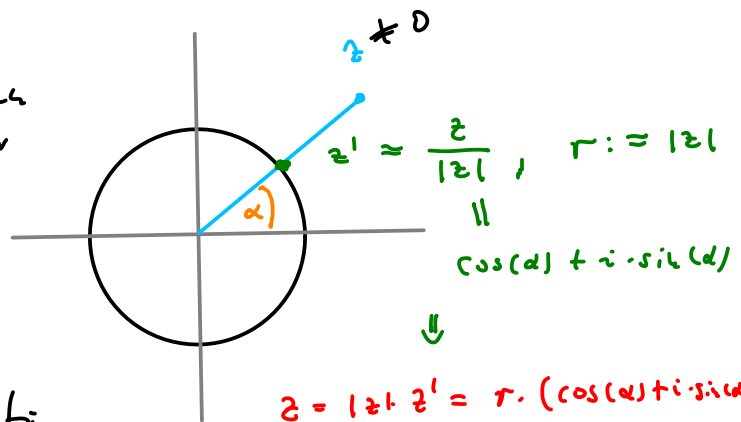


Nämlich!  $z = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$

⑨ Polarkoordinaten

$\arg(z) := \alpha =$  Winkel, den  $\overline{Oz}$  mit der x-Achse einschließt

= Argument von  $z$



Damit:  $z$  ist eindeutig festgelegt durch  $|z|$  und  $\arg(z)$

Notation:  $(|z|, \arg(z)) = (r, \alpha)$  heißen die Polarkoordinaten von  $z$

⑩ Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Seien  $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$ ,  $w = |w| \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)) \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow z \cdot w &= |z| \cdot |w| \cdot \left( (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)) \right) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left( \underbrace{(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta))}_{\cos(\alpha + \beta)} + i \cdot \underbrace{(\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta))}_{\sin(\alpha + \beta)} \right) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left( \cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta) \right) \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } z \hat{=} (|z|, \alpha) \quad , \quad w \hat{=} (|w|, \beta)$$

$$\Rightarrow z \cdot w \hat{=} (|z| \cdot |w|, \alpha + \beta)$$

Beim Multiplizieren komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und die Argumente werden addiert!

Damit: die Multiplikation mit  $z \hat{=} (r, \alpha)$  ist eine **Drehstreckung**, die um den Winkel  $\alpha$  dreht und um den Faktor  $r$  streckt!

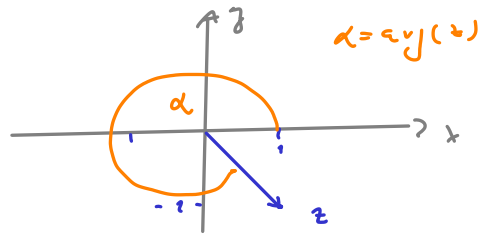
Bsp. 10.10:

$$\text{Sei } z = 1 - i \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$$

$$= \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{4}\pi$$



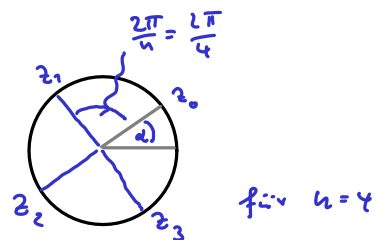
Bem. 10.11 ( $n$ -te Wurzeln)

$$\text{Sei } w = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Für  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  setze:

$$a_k := \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right) \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow |a_k| = 1 \quad \underline{u \cdot d}$$



$$\text{Damit: } (a_k)^n = (\sqrt[n]{r})^n \cdot \left( \cos\left(n \cdot \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right)$$

$$= r \cdot (\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) + i \cdot \sin(\alpha + k \cdot 2\pi))$$

$$= r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) = w$$

Also:  $a_0, \dots, a_{n-1}$  sind  $n$  paarweise verschiedene  $n$ -te Wurzeln von  $w$ !

# Kapitel II: Eindimensionale Analysis

Generalvoraussetzung:  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

## § 11 Folgen und ihre Grenzwerte

### A) Konvergente Folgen

Def. 11.1:

Eine **Folge** in  $\mathbb{K}$  ist eine Abbildung  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ .

Bem. 11.2:

① Eine Folge  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  in  $\mathbb{K}$  ist eindeutig festgelegt durch ihre Bilder  $a_n := \alpha(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Schreibt deshalb statt  $\alpha$  auch  $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
d.h. wir schreiben die Folge als die Familie der Bilder.

② Manchmal möchte man eine Folge nicht beim Index 0 starten lassen, sondern bei einem anderen Wert  $k \in \mathbb{N}$ :

$(a_n)_{n \geq k}$  steht dann für die Abb.  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}; n \mapsto a_{n+k}$ .

Bsp. 11.3:

① Sei  $c \in \mathbb{K}$ . Dann ist  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}; n \mapsto c$  ist die **konstante Folge** zum Wert  $c$ , d.h.  $a_n = \alpha(n) = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
d.h.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}}$ .

② Sei  $q \in \mathbb{K}$ . Dann ist  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}; n \mapsto q^n$  ist die **geometrische Folge** zu  $q$ , d.h.  $a_n = \alpha(n) = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  
d.h.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

② Die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  beginnt beim Index 1

Def. 11.4:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $a \in \mathbb{K}$ .

①  $a$  heißt **Grenzwert** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wir sagen dann auch, die Folge **konvergiert** gegen  $a$

Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$

②  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **konvergent**  $:\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{K} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

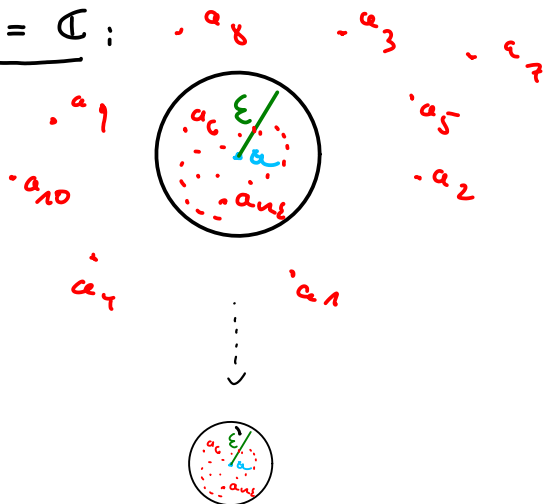
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **divergent**  $:\Leftrightarrow \nexists a \in \mathbb{K} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

③  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **Nullfolge**  $:\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Was bedeutet die Bedingung:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon ?$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

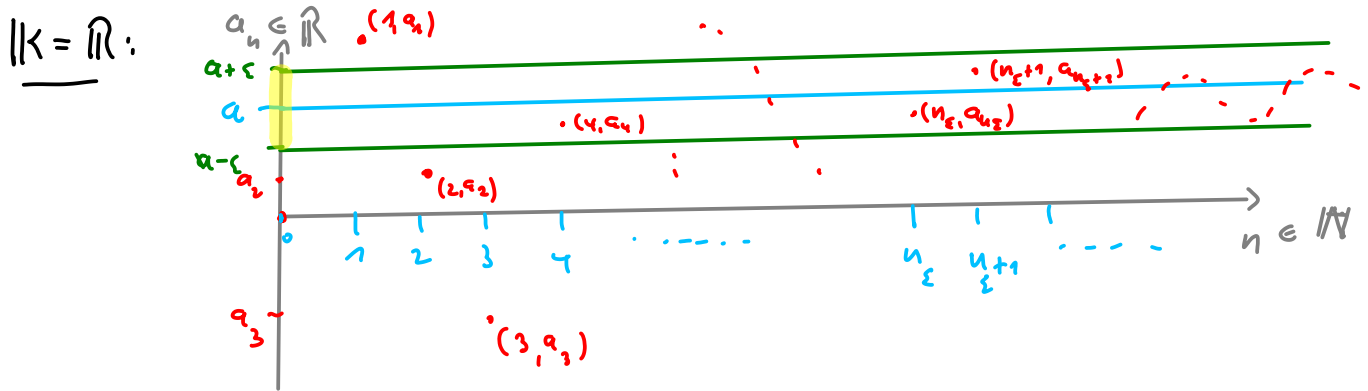
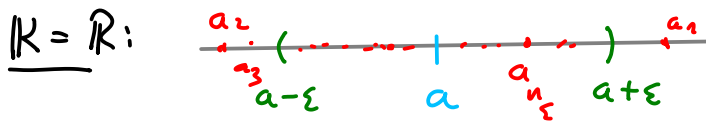


Für jedes  $\varepsilon$  gilt:

ab einem gewissen Index  $n_\varepsilon$  liegen alle Folgenglieder von  $a_n$  mit Radius  $\varepsilon$  um  $a$ !

Wenn  $\varepsilon$  kleiner wird, wird  $n_\varepsilon$  in der Regel größer sein!

Bei immer kleiner werdendem  $\varepsilon$  müssen die Folgenglieder immer näher an  $a$  herankommen !!!



Beispiel 11.5

Ⓐ Konstante Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}}$

Beh:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

d.h.:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_3 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_3 : |a_n - c| < \varepsilon$

Beweis

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Setze:  $n_3 := 0$ . Sei  $n \geq n_3$  gegeben.

$\Rightarrow |a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

□

Ⓑ Beh:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

d.h.:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_3 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_3 : |a_n - 0| < \varepsilon$

Beweis:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Kov. 9.4  $\Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n_3} < \varepsilon$

Sei  $n \geq n_3 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_3} < \varepsilon$

□

Ⓒ Beh:  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent





Beweis:

Sei  $a \in \mathbb{R}$ .

z.z.:  $a$  ist kein Grenzwert von  $(-2)^n$   <sup>$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$</sup>

d.h.  $\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon)$

d.h.  $\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$

Setze  $\varepsilon := \frac{1}{2}$ . Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  gegeben.

Aus:  $\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$ .

$$2 = |(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}| = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |a_{n_0} - a + a - a_{n_0+1}|$$

$$\leq \underbrace{|a_{n_0} - a|}_{< \frac{1}{2}} + \underbrace{|a - a_{n_0+1}|}_{< \frac{1}{2}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{!}$$

Also:  $\exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$

□

Lemma 11.6:

Sei  $q \in \mathbb{K}$  mit  $|q| < 1$ . Dann:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Beweis:

z.z.:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |q^n - 0| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Setze:  $x := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

$\stackrel{9.4}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n_0} < \underbrace{x \cdot \varepsilon}_{> 0}$

Sei  $n \geq n_0$ . Beachte:  $(1+x)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} (1+n \cdot x) > 0$

$$\Rightarrow |q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+n \cdot x} < \frac{1}{n \cdot x} \leq \frac{1}{n_0 \cdot x} < \frac{x \cdot \varepsilon}{x} = \varepsilon$$

□

Bem. 11.7:

$$a_n \rightarrow a, \text{ d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$a_n - a \rightarrow 0, \text{ d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| \rightarrow 0, \text{ d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : ||a_n - a| - 0| < \varepsilon$$

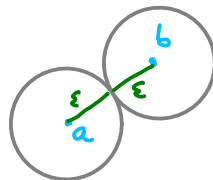
Prop. 11.8:

Der Grenzwert einer konvergenz Folge in  $\mathbb{K}$  ist eindeutig.

Beweis:

Ang.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$  mit  $a \neq b$

Setze:  $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$



$$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

und

$$\exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : |a_n - b| < \varepsilon$$

Setze:  $n := \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \geq n_\varepsilon, n'_\varepsilon$

$$\Rightarrow |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq \underbrace{|a - a_n|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|a_n - b|}_{< \varepsilon} < 2 \cdot \varepsilon \stackrel{||}{=} |a-b|$$

□

## B) Beschränkte Folgen

Def. 11.9: Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ .

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **beschränkt**  $(\Leftrightarrow) \{ |a_n| \mid n \in \mathbb{N} \}$  ist beschränkt in  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$$

Ein solches  $s$  heißt eine **Schranke** für  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Bsp. 11.10:

Ⓐ  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  ist konvergent und beschränkt,

denn:  $|\frac{1}{n}| \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$

Ⓑ  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent und beschränkt,

denn:  $|(-1)^n| = 1 \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

Satz 11.10:

Jede konvergente Folge in  $\mathbb{K}$  ist auch beschränkt.

Beweis:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathbb{K}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$

Setze:  $\varepsilon := 1.$

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon = 1$

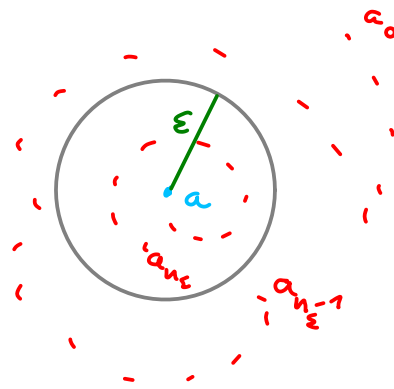
Setze:  $S := \max\{|a|+1, |a_0|, \dots, |a_{n_\varepsilon-1}|\}$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  gegeben.

1. Fall:  $n < n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \leq S$

2. Fall:  $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{< \varepsilon = 1} < 1 + |a|$

Also:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt. □



Bsp. 11.11:

Ⓐ Die Umkehrung von 11.10 gilt nicht!

d.h.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt  $\not\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent  
11.10

Ⓑ Sei  $k \geq 1 \Rightarrow (n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nicht beschränkt,  
und also auch nicht konvergent!

© Sei  $q \in \mathbb{K}$  mit  $|q| > 1$ .

Dann ist  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht beschränkt und nicht konvergent.

Dabei

Ang:  $s > 0$  ist Schranke für  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Setze:  $x := |q| - 1 > 0$

$\Rightarrow$   $\exists n \in \mathbb{N} : s < n \cdot x$

$\Rightarrow |q^n| = (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x > n \cdot x > s$

Bemerkung:

$\hookrightarrow s$  Schranke für  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Also:  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht beschränkt und wegen  $|q| > 1$  nicht konvergent.  $\square$

Lemma 11.13:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt.

Dann:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ .

Beweis:

•  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt  $\Rightarrow \exists s > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < s$

• Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Beachte:  $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{s}} : \forall n \geq N_{\frac{\varepsilon}{s}} : |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{s}$

Setze:  $n_{\varepsilon} := N_{\frac{\varepsilon}{s}}$ .

Sei  $n \geq n_{\varepsilon}$ .

$\Rightarrow |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n - 0 \cdot b_n| = \underbrace{|a_n - 0|}_{< \frac{\varepsilon}{s}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{< s} < \frac{\varepsilon}{s} \cdot s = \varepsilon$

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$   $\square$

Bsp. 11.15:

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$  und  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt

$\Rightarrow \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge.

## C) Grenzwertsätze

### Proposition 11.15: (Grenzwertsätze)

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $\mathbb{K}$  mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ .

Dann: (a)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  und  $a_n - b_n \rightarrow a - b$

(b)  $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

(c)  $|a_n| \rightarrow |a|$

(d) Wenn  $b \neq 0$ , dann:  $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : b_n \neq 0$

und  $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$  ist konvergent mit  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ .

### Beweis:

(a) Sei  $\varepsilon > 0$

$a_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n_{\frac{\varepsilon}{2}}^I : \forall n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}^I : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$b_n \rightarrow b \Rightarrow \exists n_{\frac{\varepsilon}{2}}^{II} : \forall n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}^{II} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze:  $n_\varepsilon := \max\{n_{\frac{\varepsilon}{2}}^I, n_{\frac{\varepsilon}{2}}^{II}\}$ . Sei  $n \geq n_\varepsilon \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}^I, n_{\frac{\varepsilon}{2}}^{II}$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + b$

Analog:  $a_n - b_n \rightarrow a - b$

(b)  $a_n \rightarrow a \Rightarrow (a_n - a) \rightarrow 0$   
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent  $\Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt }  $\Rightarrow (a_n - a) \cdot b_n \rightarrow 0$

$b_n \rightarrow b \Rightarrow (b_n - b) \rightarrow 0$   
 $(a)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent  $\Rightarrow (a)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt }  $\Rightarrow (b_n - b) \cdot a \rightarrow 0$

Damit:  $a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n \cdot b_n - a \cdot b_n) + (a \cdot b_n - a \cdot b)$

$$= \underbrace{(a_n - a) \cdot b_n}_{\downarrow 0} + \underbrace{(b_n - b) \cdot a}_{\downarrow 0} \xrightarrow{(a)} 0 + 0 = 0$$

Also:  $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

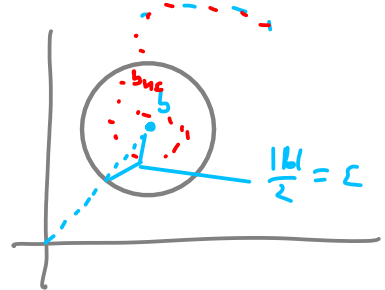
© Sei  $\varepsilon > 0$ .

Wird  $a_n \rightarrow a$ , gilt:  $\exists u_\varepsilon : \forall n \geq u_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Sei  $n \geq u_\varepsilon$ .

$$\Rightarrow | |a_n| - |a| | \stackrel{10.7}{\leq} |a_n - a| < \varepsilon$$

Also:  $|a_n| \rightarrow |a|$



④ Sei  $b \neq 0$ .

Setze  $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$

$$\Rightarrow \exists u_0 : \forall n \geq u_0 : |b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$$

Zieler:  $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq u_0$

$$|b| = |b_n + (b - b_n)| \leq |b_n| + \underbrace{|b - b_n|}_{< \varepsilon \quad \forall n \geq u_0} < |b_n| + \varepsilon = |b_n| + \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|b|}{2} = |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq u_0$$

Prozess:  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  wobei  $(\frac{1}{b_n})_{n \geq u_0}$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig.

Beachte:  $b_n \rightarrow b \Rightarrow \exists u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}} : \forall n \geq u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}$

Setze:  $u_\varepsilon := \max \left\{ u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}}, u_0 \right\}$ .

Sei  $n \geq u_\varepsilon$ .

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n \cdot b} \right| = \underbrace{\left| \frac{1}{b_n} \right|}_{< \frac{2}{|b|} \quad \forall n \geq u_0} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2} \quad \forall n \geq u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}}} < \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}$$

Also:  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$

• Damit: ④  $\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Bsp. 11.16:

$$\textcircled{a} \quad \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $0$                        $0$

$$\textcircled{b} \quad a_n = \frac{7n^2 + 3}{4n^2 + n + 1} = \frac{(7n^2 + 3) \cdot \frac{1}{n^2}}{(4n^2 + n + 1) \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{7 + \frac{3}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$\frac{7}{4} = \frac{7+0}{4+0+0}$

## D) Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Prop. 11.17 (Ein-schließungs-satz)

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $\mathbb{R}$

mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

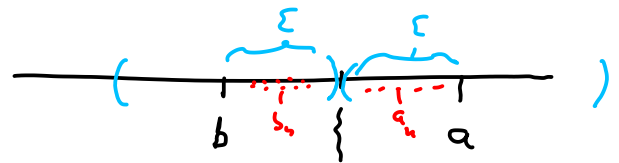
$$\textcircled{a} \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \quad \Rightarrow \quad a \leq b$$

$$\textcircled{b} \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \wedge \quad a = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

Beweis:

$$\textcircled{a} \quad \underline{\text{Ang:}} \quad b < a.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0}$$



$$\text{Wegen: } a_n \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad \exists n'_\varepsilon : \forall n > n'_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

$$b_n \rightarrow b \quad \Rightarrow \quad \exists n''_\varepsilon : \forall n > n''_\varepsilon : |b_n - b| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

$$\text{Wähle } n = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n_0\}.$$

$$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad a - b < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{a-b}{2} = a - b \quad \downarrow$$

Also:  $b \geq a$ .

⑥ Zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |c_n - a| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

$a_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

$b_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n''_\varepsilon : \forall n \geq n''_\varepsilon : |b_n - a| < \varepsilon$

Setze:  $n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n_0\}$ .

Sei  $n \geq n_\varepsilon$ .

$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$

$\Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

□

Bsp. 11.18:

Sei  $k \geq 1 \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$$

$\begin{array}{ccc} \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ 0 & & 0 \\ \text{11.17} & & \text{11.12} \\ \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ 0 & & 0 \end{array}$

Def. 11.20

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), falls:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$  (bzw.  $a_{n+1} \leq a_n$ ).

Bsp. 11.201

$(n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend und divergent.

$(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  ist monoton fallend und konvergent.



## Satz 11.21 (Bolzano-Weierstraß)

Jede monoton wachsende bzw. fallende, beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge in  $\mathbb{R}$ ,  
und sei  $s$  eine obere Schranke für die Folge.

$\Rightarrow A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht oben leer & beschränkt.

$\Rightarrow a := \sup(A)$  existiert!

Zielform:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

$\Rightarrow a - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $A$

$\Rightarrow \exists a_{n_\varepsilon} \in A : a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$

Sei  $n \geq n_\varepsilon$ .

$\Rightarrow \underline{a - \varepsilon} < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq \sup(A) = a < \underline{a + \varepsilon}$

$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Analog:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})$  □

Bem. 11.22:

Sei  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ .

(a) Falls  $A$  nach oben beschränkt ist, dann:

$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monot. wach. Folge in  $A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(A)$ .

(b) Falls  $A$  nach unten beschränkt ist, dann:

$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monot. fallend in  $A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(A)$ .

Beweis:

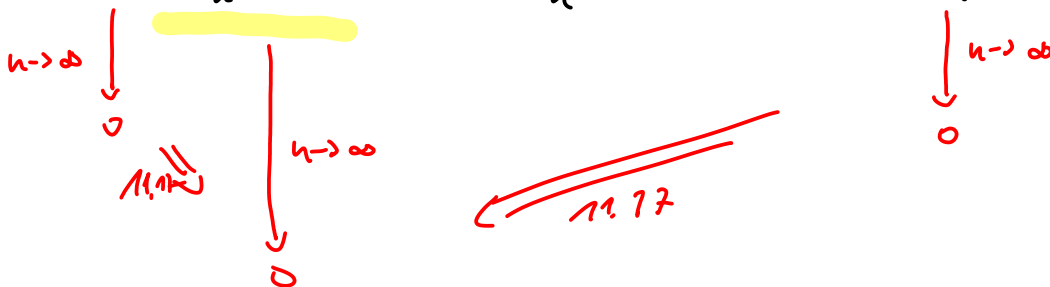
(a) Wähle  $a_0 \in A$  beliebig,  $a := \sup(A)$ .

Für  $n \geq 1$  ist  $\varepsilon := \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow a - \varepsilon = \sup(A) - \varepsilon$   
ist keine obere Schranke von  $A$

$\Rightarrow \exists b \in A : a - \varepsilon < b (\leq a)$

Setze:  $a_n := \max\{b, a_{n-1}\}$

$\Rightarrow 0 \leq |a_n - a| = a - a_n \leq a - b < \varepsilon = \frac{1}{n}$



$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(b) analog.

(3)

Bsp. 11.23 (Rekursive Folge - Heron-Verfahren)

Sei  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ . Setze:  $a_0 := 1$

Definiere rekursiv:  $a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right) > 0$  für  $n \geq 0$

Beh:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{c}$



# E) Der Satz von Bolzano - Weierstraß

## Def. 11.24

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen.

Dann heißt  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
"  $(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$

ÜA:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

## Bsp. 11.25:

$(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$  ist eine Teilfolge von  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ .

## Satz von Bolzano - Weierstraß 11.26

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{K}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

### Beweis:

1. Fall:  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

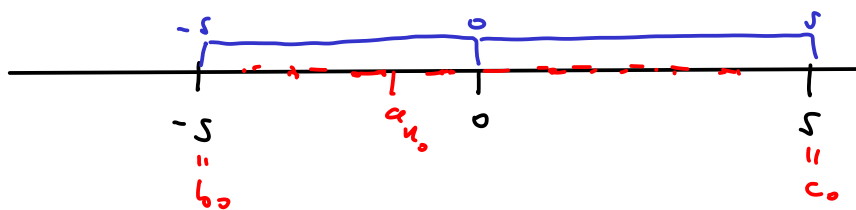
Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists s > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : -s \leq a_n \leq s$$

Setze:  $b_0 := -s$  und  $c_0 := s$ , d.h.  $[b_0, c_0] = [-s, s]$

enthält unendlich viele Folgenglieder von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Setze:  $n_0 := 0$  und  $a_{n_0} \in [b_0, c_0]$ , d.h.  $b_0 \leq a_{n_0} \leq c_0$ .



Teile  $[b_0, c_0]$  in zwei gleiche Hälften:  $[b_0, \frac{b_0+c_0}{2}]$  und  $[\frac{b_0+c_0}{2}, c_0]$

$\Rightarrow$  mindestens eines der Teilintervalle enthält unendlich viele Folgenglieder von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Wähle ein solches und nenne die Intervallgrenzen  $b_1$  und  $c_1$ , d.h.  $[b_1, c_1] \subseteq [b_0, c_0]$

Wähle ein  $a_{n_1} \in [b_1, c_1]$  mit  $n_1 > n_0$ , das gibt, weil  $[b_1, c_1]$  ob-viele  $a_n$ 's enthält.

Teile  $[b_1, c_1]$  wieder in zwei gleich große Hälften  $[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}]$  und  $[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1]$  und wähle eines davon, das ob-viele  $a_n$ 's enthält, nenne das Intervall  $[b_2, c_2]$  und wähle  $a_{n_2} \in [b_2, c_2]$  mit  $n_2 > n_1$ .

Fahre so fort und konstruiere rekursiv:

- $[b_k, c_k]$  mit  $c_k - b_k = \frac{1}{2} \cdot (c_{k-1} - b_{k-1})$
- $a_{n_k}$  mit  $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k$  und  $n_k > n_{k-1}$

D.h.  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Zu 1:  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist konvergent.

Zu 2:  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  &  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sind konvergent mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ .

Zu 3:

- klar:
- $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend &  $b_0 \leq b_k \leq c_0$
  - $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  " " fallend &  $b_0 \leq c_k \leq c_0$

$\Rightarrow$  Monotonie  
Krit.  $\exists b \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$   
 $\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$

zu dem: Länge von  $[b_k, c_k] = c_k - b_k$   $\frac{2 \cdot 5}{2^k}$

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Länge}[b_{k-1}, c_{k-1}] = \frac{1}{2} \cdot (c_{k-1} - b_{k-1}) = \frac{c_k - b_k}{2^k}$$

$$\Rightarrow c - b \xleftarrow{k \rightarrow \infty} c_k - b_k = \frac{2 \cdot 5}{2^k} = (2 \cdot 5) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow c - b = 0 \quad \Rightarrow \quad c = b$$

zu ①: Einschließungssatz +  $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k \quad \forall k \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

②

2. Fall:  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$ .

$$\stackrel{10.7}{\Rightarrow} |Re(a_n)| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h.  $(Re(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$

$$\stackrel{1. \text{ Fall}}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ s.d. } Re(a_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$$

$$10.7 \Rightarrow |Im(a_{n_k})| \leq |a_{n_k}| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

d.h.  $(Im(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$

$$\stackrel{1. \text{ Fall}}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (a_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}} \text{ s.d. } Im(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y$$

$$\stackrel{\text{ÜA in 11.24}}{\Rightarrow} Re(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$$

Dann ist:

$$a_{n_{k_j}} = Re(a_{n_{k_j}}) + i \cdot Im(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow[\text{ÜA}]{j \rightarrow \infty} x + i \cdot y$$

Bsp. 11.27:

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

hat die

beschränkt und divergent,

$$((-1)^{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (1)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist eine konvergente}$$

Teilfolge!

Satz 11.28:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge im  $[a, b]$ .

Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in [a, b].$$

Beweis:

Ang.:  $c := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \notin [a, b]$ .

1. Fall:  $c > b \Rightarrow \varepsilon := \frac{c-b}{2} > 0$

$\forall n. \Rightarrow a_n \rightarrow c \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - c| < \varepsilon$

$$\Rightarrow 0 < c-b \leq c-a_{n_\varepsilon} = |a_{n_\varepsilon} - c| < \varepsilon = \frac{c-b}{2}$$

$a_{n_\varepsilon} \in [a, b]$

2. Fall:  $c < a$ , analog

□

# F) Das Cauchy-Kriterium

Def. 11.29:

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Satz 11.30 (Cauchy-Kriterium)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ .

Dann:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist **konvergent**  $\Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist **Cauchy-Folge**.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konv. Folge mit  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

$\bullet a_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze:  $n_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ . Sei  $m > n \geq n_\varepsilon$ .

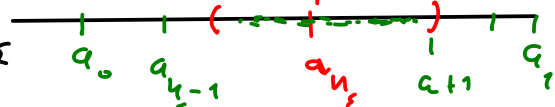
$$\Rightarrow |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

" $\Leftarrow$ " Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge.

① Zeige:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.

Setze  $\varepsilon := 1 > 0$

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon$



$\Rightarrow \forall m \geq n_\varepsilon : |a_m - a_{n_\varepsilon}| < \varepsilon = 1$

Setze:  $S := \max\{|a_{n_\varepsilon}| + 1, |a_0|, \dots, |a_{n_\varepsilon-1}|\}$

$\Rightarrow$  1. Fall:  $n < n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \leq S$

2. Fall:  $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| = |a_n - a_{n_\varepsilon} + a_{n_\varepsilon}| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_\varepsilon}|}_{< 1} + |a_{n_\varepsilon}| < 1 + |a_{n_\varepsilon}| \leq S$

Also:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt



② Bw 11.26  $\Rightarrow \exists$  TF  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, d.h.  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

③ Z.ziel:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

•  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist CF  $\Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n > u \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a_u| < \frac{\varepsilon}{2}$

•  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konv. gegen  $a \Rightarrow \exists k_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall k \geq k_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze:  $n_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ . Sei  $n \geq n_\varepsilon$ .

Wähle ein  $k \geq k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ , s.d.  $n_k \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a_n - a| &= |a_n - a_k + a_k - a| \\ &\leq \underbrace{|a_n - a_k|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_k - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

□

Bsp. 11.31:

Sei  $1 \neq q \in \mathbb{K}$  mit  $|q| = 1$ . Dann ist  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent.

Z.ziel:  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist kein Cauchy-Folge.

d.h.  $\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon)$

d.h.  $\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon : \exists m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| \geq \varepsilon$

Setze:  $\varepsilon := |q - 1| > 0$ . Sei  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  beliebig gegeben.

Setze:  $m := n_\varepsilon + 1$  und  $n := n_\varepsilon \Rightarrow m > n \geq n_\varepsilon$ .

$$\Rightarrow |a_m - a_n| = |q^{n_\varepsilon+1} - q^{n_\varepsilon}| = \underbrace{|q^{n_\varepsilon}|}_{|q|^{n_\varepsilon} = 1^{n_\varepsilon} = 1} \cdot \underbrace{|q - 1|}_{= \varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow (q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist kein CF}$$

□

Bem. 11.32:

Behaupte:  $a_0 := 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$  für  $n \geq 0$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge  $\in \mathbb{Q}$  mit  $a_n \rightarrow \sqrt{2}$   
 $\mathbb{A}$   
 $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat keinen GW in  $\mathbb{Q}$

Abw:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine CF, weil sie als Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert ist!

## G) Bestimmt divergente Folgen

Def. 11.33: Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

Ⓐ  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **bestimmt divergent gegen  $\infty$**

$\Leftrightarrow \forall s > 0 \exists n_s \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_s : a_n > s$

Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  oder  $a_n \rightarrow \infty$ ,  $\infty$  heißt **uneigentlicher GW** d. Folge.

Ⓑ  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **bestimmt divergent gegen  $-\infty$**

$\Leftrightarrow \forall s < 0 \exists n_s \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_s : a_n < s$

Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  oder  $a_n \rightarrow -\infty$ ,  $-\infty$  heißt **uneigentlicher GW** d. Folge.

Bsp. 11.34:

Ⓐ  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist bestimmt divergent gegen  $\infty$

Ⓑ  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent, aber nicht bestimmt divergent

Bem. 11.35:

Ⓐ Rechenregeln: Sei  $a \in \mathbb{R}$ .

Definition:

$a + \infty := \infty$ ,  $a - \infty := -\infty$   
falls  $a > 0$ :  $a \cdot \infty := \infty$ ,  $a \cdot (-\infty) := -\infty$   
falls  $a < 0$ :  $a \cdot \infty := -\infty$ ,  $a \cdot (-\infty) := \infty$   
 $\frac{a}{\infty} := 0$ ,  $\frac{a}{-\infty} := 0$ ,  $\infty + \infty := \infty$ ,  $\infty \cdot \infty := \infty$   
 $-\infty + (-\infty) := -\infty$ ,  $(-\infty) \cdot (-\infty) := \infty$

⑤ GW-Sätze in 11.15 verallgemeinern sich in verallgemeinertes Weise auf unrichtige Grenzwerte mit Hilfe von ②

z.B.:

- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + \infty = \infty$
- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{\infty} = 0$

⑥ Neue GW-Sätze:

- $a_n \rightarrow a \neq 0$  &  $b_n \rightarrow 0$  &  $\exists n_0: \forall n \geq n_0: b_n > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \infty$
- $a_n \rightarrow a \neq 0$  &  $b_n \rightarrow 0$  &  $\exists n_0: \forall n \geq n_0: b_n < 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot (-\infty)$
- $a_n \rightarrow a \neq 0$  &  $b_n \rightarrow 0$  &  $\nexists n_0: (\forall n \geq n_0: b_n < 0) \text{ oder } (\forall n \geq n_0: b_n > 0) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent

# § 12 Unendliche Reihen

## A) Konvergenz unendlicher Reihen

### Def. 12.1

Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ .

①  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$  heißt **Partiellsomme** von  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

② Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partiellsommen von  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt die durch  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definierte **Reihe**.

Notation:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := (s_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$

③ Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt **konvergent**, wenn sie als Folge konvergent ist.

Notation:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  bezeichnet **auch** den Grenzwert der Reihe!

④ Reihen müssen nicht bei 0 starten:

$(a_k)_{k \geq n_0}$  und  $s_n := \sum_{k=n_0}^n a_k \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k := (s_n)_{n \geq n_0}$

### Bsp. 12.2:

Beh:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$  ist konvergent mit Grenzwert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$

Bew:

$$\text{Beachte: } \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 0 = 1$$

Teleskopsumme

Bsp. 12.3 (Harmonische Reihe)

Beh.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.

Beweis:

Sätze  $n_k = 2^k$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow S_{n_k} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{k}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow (S_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist bestimmt divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent

Lemma 12.4 (GW-Sätze für Reihen)

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konvergente Reihen in  $\mathbb{K}$ ,  $a, k \in \mathbb{K}$ .

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot a_n) = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$(d) \underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}: a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Zus. alle Reihen sind  $k$ -konvergent!

Beweis: 11.15 + 11.17 (a)

## B) Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Prop. 12.5 (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  in  $\mathbb{K}$  ist genau dann **konvergent**,

Wenn:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_{\varepsilon} : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon.$

Beweis:

Satz:  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k \quad \xrightarrow{m > n} \quad s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^m a_k \quad \xrightarrow{12.30} \quad \text{Beh.} \quad \square$

Lemma 12.6:

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe in  $\mathbb{K}$ , dann:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$

d.h. die Folge der Restglieder ist eine Nullfolge.

Beweis:

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben

$\xrightarrow{12.5} \exists n'_{\varepsilon/2} : \forall m > n \geq n'_{\varepsilon/2} : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon/2$

Halte  $n$  fest und lasse  $m$  variabel

$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - 0 \right|$

$\forall n \geq n_{\varepsilon}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0 \quad \square$

Lemma 12.7: (Nullfolgenkriterium)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Beweis:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$                        $\downarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$                        $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

□

Bsp. 12.8:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  ist divergent, weil  $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \geq 1}$  keine Nullfolge ist.

(b)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolge  $\not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent

12.3  
harmon. Reihe

Satz 12.9 (Geometrische Reihe)

$s_n = q \in \mathbb{K}$ .

(a)  $|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ist konvergent mit GW  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

(b)  $|q| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ist divergent.

Beweis:

(a)  $s_n = \sum_{k=0}^n q^k \stackrel{7.22}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{|q| < 1} \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$

(b)  $|q| \geq 1 \Rightarrow (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge

$\stackrel{12.7}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  divergent

□

Satz 12.10 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge in  $\mathbb{R}$ .

Dann:  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$  ist konvergent.

Beweis:

Satz:  $S_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot a_k$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Betrachte die TF der geraden Partialsummen:  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{2 \cdot (n+1)} &= S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \\ &= S_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \leq S_{2n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Folge  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend.

Analog: Die TF der ungeraden Partialsummen  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend!

Zudem:

$$S_1 \leq S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$$

$\Rightarrow (S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sind beschränkt

$\Rightarrow$  Monotonie-Krit. 12.11  $S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$ ,  $S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$

$$\Rightarrow s - t \xleftarrow{n \rightarrow \infty} S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{12.7} 0$$

$$\Rightarrow s - t = 0 \Rightarrow s = t$$

Zeige:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

$\cdot S_{2n} \rightarrow s \Rightarrow \exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : |S_{2n} - s| < \varepsilon$

$\cdot S_{2n+1} \rightarrow s \Rightarrow \exists n''_\varepsilon : \forall n \geq n''_\varepsilon : |S_{2n+1} - s| < \varepsilon$



Satz 1:  $u_\varepsilon := \max\{2 \cdot u', 2u'' + 1\}$ .

Sei  $u \geq u_\varepsilon$ .

$$\Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon$$

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

□

Bsp. 12.11 (Alternierende harmonische Reihe)

$(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  ist eine monoton fallende Nullfolge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  ist konvergent

Zudem:  $-1 = S_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \leq S_2 = -\frac{1}{2}$

Lemma 12.22 (Umklammerung in Reihen)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe in  $\mathbb{K}$  und sei

$0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots$  eine aufsteigende Folge nat. Zahlen.

Satz 1:  $b_n := \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} a_k = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$ .

Dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  ist konvergent mit GW  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

Beweis:

Satz 2:  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$  und  $t_n := \sum_{k=0}^n b_k$ .

$\Rightarrow t_n = s_{k_{n+1}-1} \Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine TF von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

□

# C) Absolut konvergente Reihen

Def. 12.13

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv.

Dann heißt  $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \dots)$

eine **Umordnung** von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und die

Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  eine **Umordnung** von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

Bsp. 12.14i

Die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  ist konvergent!

Betrachte folgende Umordnung der Reihe:

$$\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{24}\right) + \frac{1}{26} + \dots$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12, 1/14, 1/16, 1/18, 1/20, 1/22, 1/24, 1/26, ...

Jeder n ist ungerade    Jeder durch 2 teilbar ist nicht durch 4    Jeder durch 4 teilbar    Jeder ungerade    Jeder durch 2 teilbar ist nicht durch 4    Jeder durch 4 teilbar    Jeder ungerade    Jeder durch 2 teilbar ist nicht durch 4    Jeder durch 4 teilbar

Lemma 12.22

falls die Reihe konvergiert

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{20}\right) + \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{24}\right) + \frac{1}{26} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{d.h. die GU der altern. harm. Reihe hat sich durch Umordnen behoben!}$$

Fazit: Die GU von konvergenten Reihen kann sich durch Umordnen ändern!

Def. 12.15:

Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent**

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  konvergiert

$\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist **beschränkt**, mit  $t_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$

Bsp. 12.16:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  ist konvergent, nicht absolut konvergent

Lemma 12.17:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  **absolut konvergent**  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  **konvergent**

Beweis:

Zu zeigen:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall m > n \geq n_{\varepsilon} : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$   
(dann fertig mit Cauchy-Kriterium).

Vor.  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  konvergent

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben  $\Rightarrow \exists n_{\varepsilon} : \forall m > n \geq n_{\varepsilon} : \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{k=n+1}^m |a_k|$$

□

Umordnungssatz 12.18:

Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent mit demselben Grenzwert.

# Beweis:

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent und  $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv.

① Zielp:  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{d(n)})$  ist konvergent mit GG 0.

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall n \geq n_{\varepsilon} : \left| \sum_{k=0}^n (a_k - a_{d(k)}) - 0 \right| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Vor.  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent

$\Rightarrow \exists n'_{\frac{\varepsilon}{3}}$  :  $\forall m > n \geq n'_{\frac{\varepsilon}{3}} : \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| < \frac{\varepsilon}{3}$   
Cauchy //  $\sum_{k=n+1}^m |a_k|$

Wird  $d$  surjektiv und  $\{0, 1, \dots, n'_{\frac{\varepsilon}{3}}\}$  endlich ab

$\Rightarrow \exists n_{\varepsilon} : \{0, 1, \dots, n'_{\frac{\varepsilon}{3}}\} \subseteq \{d(0), d(1), d(2), \dots, d(n_{\varepsilon})\}$

Sei nun  $n \geq n_{\varepsilon}$ . (Beachte:  $n_{\varepsilon} \geq n'_{\frac{\varepsilon}{3}}$ )

$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n (a_k - a_{d(k)}) - 0 \right| \leq \sum_{i=n'_{\frac{\varepsilon}{3}}+1}^n |a_i| < \varepsilon$   
 $\Delta$ -Ungl. + 1. Fall + 2. Fall

Wie oft kommt ein  $a_i$  höchstens vor? wobei:  $n_i = \max\{0, \dots, n, d(0), \dots, d(n)\} + 1 > n'_{\frac{\varepsilon}{3}}$

Wie oft mindestens?

1. Fall:  $i \leq n'_{\frac{\varepsilon}{3}} \Rightarrow i \in \{0, 1, \dots, n'_{\frac{\varepsilon}{3}}\} \subseteq \{d(0), \dots, d(n_{\varepsilon})\}$   
 $\wedge \{0, \dots, n\}$   $\{d(0), \dots, d(n_{\varepsilon})\}$

$\Rightarrow a_i$  kommt mehr den  $a_j$ 's und den  $a_{d(k)}$ 's jeweils genau einmal vor

$\Rightarrow$  in der Summe haben sich die beide raus!

2. Fall:  $i > n'_{\frac{\varepsilon}{3}} \Rightarrow a_i$  kommt doppelt vor und hebt sich raus oder kommt nur 1x positiv oder negativ vor

② GV-Sätze für Reihen

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - (a_n - a_{d(n)})) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{d(n)})}_{=0 \text{ (GV)}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

||

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{d(n)}$$

③ Wende ① & ② auf  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_{d(n)}|$  ist konvergent  
 $\downarrow$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{d(n)}$  ist abs. konvergent  $\square$

## D) Konvergenzkriterien für absolute Konvergenz

Satz 12.19 (Majorantenkriterium)

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  Reihen in  $\mathbb{K}$ .

Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  absolut konvergent ist und  $\exists n_0: \forall n \geq n_0: |a_n| \leq |b_n|$ ,

dann ist auch  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

Wir nennen  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  dann eine konvergente Majorante für  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

Beweis.

Satz:  $s_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$

$\Rightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt durch  $s_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$

$\Rightarrow$  D.h.  $\square$

Prop. 12.20 (Minorantenkriterium)

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  zwei Reihen in  $\mathbb{R}$ .

Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  divergent ist und  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq b_n \geq 0$ , dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergent.

Wir nennen  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  eine divergente Minorante für  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

Beweis:

Satz:  $t_n := \sum_{k=0}^n b_k$

$\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend, weil  $b_k \geq 0 \forall k$

Var.  $\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent  $\xrightarrow{11.21} (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt.

Zudem:  $S_n := \sum_{k=0}^n a_k \geq \sum_{k=0}^n b_k = t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt  $\xrightarrow{11.11} (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent  
 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

□

Bsp. 12.21:

Beh:  $k \geq 2$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  ist absolut konvergent

Bew:

$k=2$ :

$a_n := \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (n+1)} =: b_n \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow$  Pos. krit.  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$  ist konv. Neg. für  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist abs. konvergent

$k \geq 2$ :

$0 < \frac{1}{n^k} < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  ist konv. Neg. für  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

□

### Satz 12.22 (Wurzelkriterium)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe in  $\mathbb{K}$ .

(a)  $\exists q < 1 : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent

(b)  $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist divergent.

Beweis:

(a)  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n \stackrel{0 < q < 1}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ist konv. Ry. wo  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(b)  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1^n = 1 \quad \forall n \geq n_0$   
 $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist keine Nullfolge  $\Rightarrow$  Beh.  $\square$

### Satz 12.23 (Quotientenkriterium)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe in  $\mathbb{K}$  mit  $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$ .

(a)  $\exists q < 1 : \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent

(b)  $\forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist divergent.

Beweis:

(a)  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \Rightarrow |a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \leq q^2 \cdot |a_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \cdot q^{-n_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$

ist konvergente Rygeante von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

(b)  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_n| \neq 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_0}| \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist keine Nullfolge  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergent.  $\square$

# Lov. 12.24 (Praktische Wurzel-/Quotientenkriterium)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe in  $\mathbb{K}$  mit  $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ .

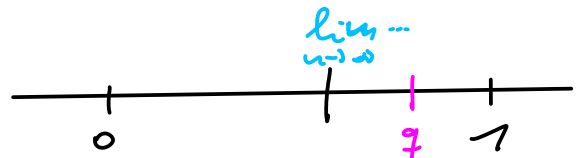
(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist **absolut konvergent**

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist **divergent**

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow$  keine Aussage zur Konvergenz

Beweis:

(a)  $q := \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \dots}{2}$



$\Rightarrow$  Wende 12.22 (a) oder 12.23 (a) an!

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists n_0; \forall n \geq n_0; \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \stackrel{12.23(d)}{\Rightarrow}$  Beh.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \exists n_0; \forall n \geq n_0; \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \stackrel{12.22(d)}{\Rightarrow}$  Beh.

□

Bem. 12.25:

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist **divergent**

A D E R:  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \ \forall n \geq 1$

$\nexists q < 1; \forall n; 1 - \frac{1}{n+1} \leq q \rightarrow$  OK geht nicht

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$





② Definieren:  $d_n := a_k \cdot b_l$ , wenn  $\sigma(n) = (k, l)$

Zu zeigen:  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$  ist absolut konvergent

$$\sum_{n=0}^m |d_n| \leq \sum_{n=0}^{(m+1)^2-1} |d_n| \stackrel{\textcircled{*}}{=} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m |a_k \cdot b_l| = \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot \sum_{l=0}^m |b_l|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|$$

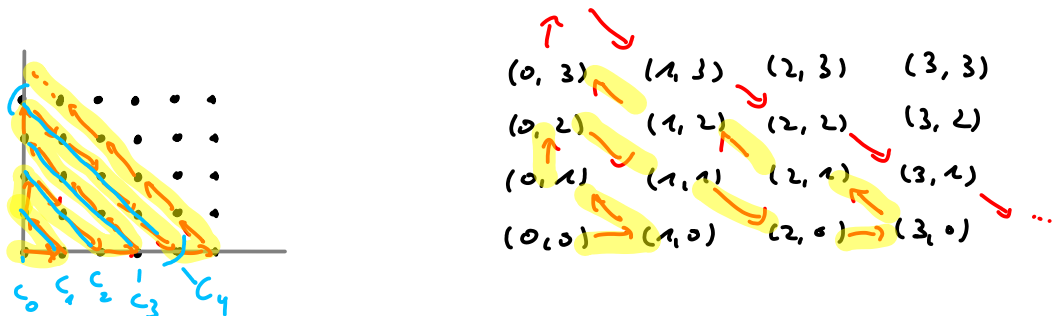
für alle  $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$  ist beschränkt, also konvergent

③ Behauptung:  $\sum_{i=0}^{\infty} d_i \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{(n+1)^2-1} d_i \stackrel{\textcircled{*}}{=} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \sum_{l=0}^n b_l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} d_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$$

④ Konstruieren mit Cartesischem Diagonilverfahren 2. Bijektion  $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :



Setz  $e_n := a_k \cdot b_l = d_{\sigma^{-1}(\pi(n))}$  wenn  $\pi(n) = (k, l)$

$\sigma^{-1} \circ \pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist bijektiv  $\Rightarrow (e_n)_{n \in \mathbb{N}} = (d_{\sigma^{-1}(\pi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$   
ist Umordnung von  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e_n$  ist absolut konvergent mit  $\sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$

⑤  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  existiert zu  $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$  durch Umklammern  
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$  ist konvergent mit  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad \sum_{h=0}^m |c_n| &= \sum_{h=0}^m \left| \sum_{k+l=n} a_k \cdot b_l \right| \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{h=0}^m \sum_{k+l=n} |a_k \cdot b_l| \\
 &\leq \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot \sum_{l=0}^m |b_l| \leq \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} |a_h| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|}_{\text{hängt nicht von } n \text{ ab!}} \\
 \Rightarrow \left( \sum_{h=0}^m |c_n| \right)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ ist beschränkt, also konvergent} \\
 \Rightarrow \sum_{h=0}^{\infty} c_n &\text{ abs. konvergent.} \quad \textcircled{B}
 \end{aligned}$$

## F) Potenzreihen

Def. 12.28:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ ,  $a \in \mathbb{K}$  und  $t$  eine Veränderliche.

Ein Ausdruck der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$  wird **Potenzreihe** in der Veränderlichen  $t$  mit **Entwicklungspunkt**  $a$  genannt.

Merkt:  $a=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$

Ziel: setze für  $t$  Werte  $x \in \mathbb{K}$  ein und erhalte eine konvergente oder divergente Reihe in  $\mathbb{K}$ !

Lemma 12.19

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $y \in \mathbb{K}$ , so daß

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$  konvergiert.

Dann:  $\forall x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < |y|$  gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  ist **absolut konvergent**.

Bew:

$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$  konvergiert  $\Rightarrow (a_n \cdot y^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge

$\Rightarrow (a_n \cdot y^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt  $\Rightarrow \exists s: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n \cdot y^n| \leq s$

- Sei  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < |y|$ . Setze:  $q := \frac{|x|}{|y|} < 1$
- $\Rightarrow |a_n \cdot x^n| = |a_n \cdot y^n| \cdot \frac{|x^n|}{|y^n|} = \underbrace{|a_n \cdot y^n|}_{\leq s} \cdot q^n \leq s \cdot q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s \cdot q^n = s \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ist konv. Reihe für  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$
- $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ist abs. konv. nach Majorantenkriterium. (3)

### Notation 12.30:

- Definition:
- $\sup(\emptyset) := -\infty$
  - $A \subseteq \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt  $\Rightarrow \sup(A) := \infty$
  - Also:  $\forall A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
  - Sei  $x \in \mathbb{R}$ .
    - $\frac{x}{0} := 0$                       •  $\frac{x}{-\infty} := 0$
    - $\frac{x}{0} := \infty$  falls  $x > 0$
    - $\frac{x}{0} := -\infty$  falls  $x < 0$

### Def. 12.31

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$  ein Potenzreih in  $\mathbb{K}$ .

Dann heißt  $r := \sup \{ |y| \mid y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ konvergiert} \} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

der **Konvergenzradius** von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ .

$a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n$  ist konvergent

### Satz 12.32:

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$  ein Potenzreihe in  $\mathbb{K}$  mit Konvergenzradius  $r$ .

(a)  $\forall x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < r$  :  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  ist abs. konvergent.

(b)  $\forall x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| > r$  :  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  ist divergent.

Für  $\mathcal{U}_r(0) := \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < r\}$  =  $r$ -Umgebung der 0, dann  
definiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$  eine Abbildung

$$\mathcal{U}_r(0) \longrightarrow \mathbb{K}; x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$\mathcal{U}_r(0)$  heißt **Konvergenzintervall** der Potenzreihe.

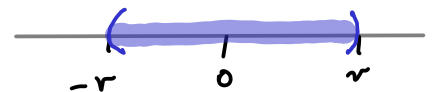
### Bem. 12.33:

(a) 12.32 macht keine Aussage zu  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| = r$ !

Die Menge  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| = r\}$  heißt **Rand des Konvergenzintervalls**.

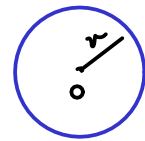
(b) Falls  $r = \infty$ , dann:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ist konvergent  $\forall x \in \mathbb{K}$ .

(c)  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :  $\mathcal{U}_r(0) = (-r, r)$



$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

$\mathcal{U}_r(0) =$  Kreisscheibe um 0 mit Radius  $r$



### Beweis von 12.32:

(a) Satz:  $A := \{|y| \mid y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ konvergent}\}$

$$\Rightarrow r = \sup(A)$$

Zeige:  $\forall x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < r \Rightarrow \exists |y| \in A : |x| < |y|$   
 mit  $y \in \mathbb{K}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  konvergent

1. Fall:  $r = \infty$ .

Sei  $x \in \mathbb{K} \Rightarrow |x| < \infty = \sup(A) \Rightarrow \exists |y| \in A : |x| < |y|$   
 mit  $y \in \mathbb{K}$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  konvergent

2. Fall:  $r < \infty$

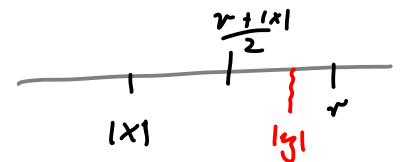
Sei  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < r \stackrel{\sup(A)}{\parallel} \Rightarrow \varepsilon = \frac{r - |x|}{2} > 0$

$\Rightarrow r - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $A$

$\Rightarrow \exists |y| \in A$  mit  $y \in \mathbb{K}$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  konverg.

und  $r - \varepsilon < |y|$

$$|x| < \frac{r + |x|}{2}$$



Damit: Lemma 12.29  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ist abs. konv.

ⓑ  $|x| > r = \sup(A) \Rightarrow |x| \notin A \xrightarrow[\text{Def. A}]{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  divergiert  $\square$

### Satz von Cauchy-Hadamard 12.34

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{K}$ .

ⓐ Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$  als reellwertig oder

unreellwertig GW existiert, dann ist  $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$  der

Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ .

⑥ Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$  als reziproker oder  
 unreciproker GW existiert, dann ist  $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  der

Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ .

Beweis:

① Sei  $r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ .

Sei  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < r$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| < 1$$

$\Rightarrow$   $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  ist abs. konvergent.  
 POK

Analog:  $|x| > r \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  divergiert  
 POK

Also:  $r =$  Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ .

⑥ Analog mit POK

⑧

Bsp. 12.35:

① Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$  ist  $1 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}}$

und  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  ist divergent  $\forall |x| = 1$ , d.h.  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$  ist in jedem

Randpunkt des Konvergenzradius divergent

② Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n}$  ist  $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n}{1/(n+1)} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ ,

aber  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  ist konvergent, d.h.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n}$  ist im Randpunkt  $-1$  des KBs konvergent!

# G) Exponentialfunktion, Sinus & Cosinus als Potenzreihe

Satz 12.35:

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$  hat den Konvergenzradius  $\infty$ .

Die dadurch definierte Abbildung

$$\exp: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heissen wir die Exponentialfunktion.

Für  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis:

• Cauchy-Kriterium  $\Rightarrow r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \right|}$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i t^i$  für  $\sum_{i=0}^n a_i t^i$ , wobei  $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{0} = \infty$$

• Seien  $x, y \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \stackrel{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}}_{= \binom{n}{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \exp(x+y) \quad \square \end{aligned}$$

Bem. 12.37:

Definition:  $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$

Sei  $n \geq 2$   $\Rightarrow \exp(n) = \underbrace{\exp(1) \cdot \exp(1) \cdots \exp(1)}_n = e^n$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \cdot \frac{1}{n}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \Rightarrow \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{e}$$

Definition für  $x \in \mathbb{K}$ :  $e^x := \exp(x)$ , damit:  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$



Satz 12.38

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  hat  $\mathbb{K}R \infty$  und  $\cos: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  heißt Cosinus.
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  hat  $\mathbb{K}R \infty$  und  $\sin: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  heißt Sinus.
- (c)  $\sin$  ist eine ungerade Fkt., d.h.  $\sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}$   
 $\cos$  " " gerade Fkt., d.h.  $\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}$
- (d)  $\forall x \in \mathbb{K}; e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$
- (e)  $\forall x \in \mathbb{K}; \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- (f)  $\forall x \in \mathbb{K}; \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \wedge \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{ix} - e^{-ix})$
- (g)  $\forall x, y \in \mathbb{R}; \begin{cases} \cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \\ \sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y) \end{cases}$  } Additionstheoreme
- (h)  $\forall x \in \mathbb{R}; |e^{ix}| = 1$

Beweis:

(a)  $\forall x \in \mathbb{K}$ . Satz 12.3:  $a_n = \begin{cases} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}, & \text{falls } n=2m \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent,

weil sie die konvergente Majorante  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \exp(x)$  hat,

damit  $|a_n| = \begin{cases} \frac{|x^{2m}|}{(2m)!}, & \text{falls } n=2m \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \leq \frac{|x^n|}{n!}$

Also  $\mathbb{K}R$  von  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  ist  $\infty$ .

(b) analog  
 (c)  $\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$

Analog:  $\cos(-x) = \cos(x)$

(d) Beweis:  $(i)^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n, \quad (i)^{2n+1} = i \cdot (i)^{2n} = i \cdot (-1)^n$   
 $\Rightarrow \cos(x) + i \cdot \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$   
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot x)^n}{n!} = \exp(i \cdot x)$

⑧ Sei  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(x) - i \cdot \sin(x))$$

$$\stackrel{\text{①}}{=} (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) + (\cos(-x) + i \cdot \sin(-x))$$

$$\stackrel{\text{②}}{=} \exp(i \cdot x) \cdot \exp(-i \cdot x) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1$$

④  $e^{ix} + e^{-ix} \stackrel{\text{③}}{=} (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) + (\cos(-x) + i \cdot \sin(-x))$

$$\stackrel{\text{④}}{=} \cos(x) + i \cdot \cancel{\sin(x)} + \cos(x) - i \cdot \cancel{\sin(x)} = 2 \cdot \cos(x)$$

Analog:  $\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{ix} - e^{-ix})$

⑨ Sei  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \underbrace{\cos(x+y)}_{\in \mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{\sin(x+y)}_{\in \mathbb{R}} \stackrel{\text{⑤}}{=} \exp(i \cdot (x+y))$$

$$= \exp(ix) \cdot \exp(iy) \stackrel{\text{⑥}}{=} (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

$$= \underbrace{(\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y))}_{\in \mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{(\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y))}_{\in \mathbb{R}}$$

Vergleiche Real- und Imaginärteil  $\Rightarrow$  Beh.

⑩ Sei  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{ix} \stackrel{\text{⑦}}{=} \underbrace{\cos(x)}_{\in \mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\in \mathbb{R}}$

$$\Rightarrow |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \stackrel{\text{⑧}}{=} \sqrt{1} = 1$$

□

Bem. 12.41:

Sei  $a \in \mathbb{K}$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$  eine PR mit {atw: -kl. splt. a.}

Dann:  $r = \sup\{|y| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ konvergiert}\} =$  Konvergenzradius von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$

•  $\forall x : |x-a| < r \Rightarrow \sum a_n \cdot (x-a)^n$  also konvergent

•  $\forall x : |x-a| > r \Rightarrow \dots \dots \dots$  divergent

• Formeln wie Cauchy-Weierstrassfunktionensatz

zur Berechnung des KR

□

# § 13 Grenzwerte von Funktionen

## A) Häufungspunkte von Teilmengen von $\mathbb{R}$

### Def. 13.1

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ .

$a$  heißt **Häufungspunkt** von  $U$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in U \setminus \{a\} : 0 < |x - a| < \varepsilon$$

Achtung:  $a$  muss kein Element von  $U$  sein.

### Bem. 13.2:

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$ .

Dann heißt  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$

↓:  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ : 

Defini:  $a$  ist HP von  $U \Leftrightarrow$  jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  enthält ein  $x$  aus  $U$  mit  $x \neq a$ .

### Bsp. 13.3:

Jede reelle Zahl ist HP von  $U = \mathbb{Q}$ .

### Dabei

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q} \cap (a, a + \varepsilon) \Rightarrow x \in U \setminus \{a\} \text{ mit } |x - a| < \varepsilon$$

g.l.

$$\Rightarrow a \text{ ist HP von } \mathbb{Q}.$$

□

### Prop. 13.4 (Folgenkriterium für HP)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ .

Dann:  $a$  ist **HP** von  $U$

$$\Leftrightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in U \setminus \{a\} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Beweis:

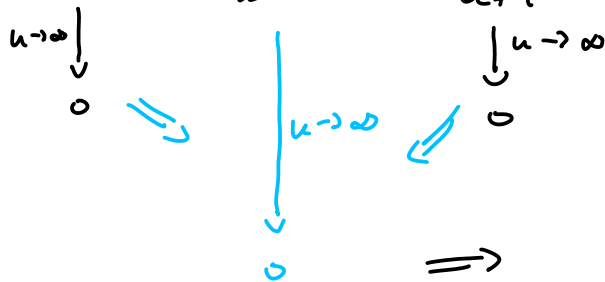
" $\Rightarrow$ " Sei  $a$  HP von  $\mathcal{U}$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$

Setze:  $\varepsilon := \frac{1}{n+1} > 0$

$\Rightarrow \exists x \in \mathcal{U} \setminus \{a\} : |x - a| < \varepsilon = \frac{1}{n+1}$

Setze:  $a_n := x \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$

Zudem:  $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n+1}$



$\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

" $\Leftarrow$ " Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$  und  $a_n \rightarrow a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Setze:  $x := a_{n_\varepsilon} \Rightarrow x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$  und  $|x - a| < \varepsilon$

Also:  $a$  ist HP von  $\mathcal{U}$ . □

Bsp. 13.5:

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .

Dann:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist HP von } (a, b)\} = [a, b]$

Beweis:

" $\subseteq$ " Sei  $c$  HP von  $(a, b)$   $[a, b]$   
|  
|  
|

$\Rightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in (a, b)$  und  $a_n \neq c$   
10.4

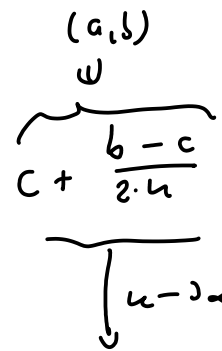
und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \in [a, b]$

11.28

" $\supset$ " Sei  $c \in [a, b]$

1. Fall:  $c < b$

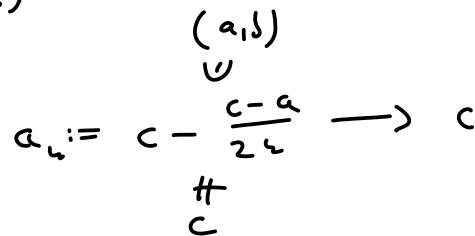
Sei  $n \geq 1$ . Setze:  $a_n := c + \frac{b-c}{2 \cdot n} \neq c$



$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in (a, b)$  und  $a_n \neq c$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

$\Rightarrow$  13.4  $c$  ist HP von  $(a, b)$

2. Fall:  $c = b$ , analog.



13

## B) Grenzwerte von Funktionen

Def. 13.6:

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$  HP von  $U$ .

$y \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert von  $f$  in  $a$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U$  mit  $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

Schreib. dann:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$  oder  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} y$

Sage:  $f(x)$  konvergiert gegen  $y$  für  $x$  gegen  $a$ .

Prop. 13.7: (Folgenkriterium für GWe von Funktionen)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a$  ein HP von  $U$ .

Dann sind  $\dots$ :

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$

(b)  $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in U \setminus \{a\}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$

Beweis:

(a)  $\Rightarrow$  (b): Sei  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Zunächst:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |f(a_n) - y| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}$  mit  $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \exists n_{\delta_\varepsilon} : \forall n \geq n_{\delta_\varepsilon} : |a_n - a| < \delta_\varepsilon$

Setze:  $n_\varepsilon := n_{\delta_\varepsilon}$ . Sei  $n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(a_n) - y| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$

(b)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $y$  nicht GW von  $f$  in  $a$

d.h.  $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \mathcal{U} \setminus \{a\} : 0 < |x_\delta - a| < \delta$ , aber  $|f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$

Sei  $n \geq 1$ . Setze:  $\delta_\varepsilon := \frac{1}{n}$  und  $a_n := x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Abzu:  $|f(a_n) - y| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow f(a_n) \not\rightarrow y$

□

Bsp. 13.81

(a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ ,  $a = 3$  ist HP von  $\mathbb{R}$

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$  und  $a_n \rightarrow 3$

$\Rightarrow$   $f(a_n) = a_n^2 = a_n \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 3 = 9$   
11.25  
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $3 \quad 3$

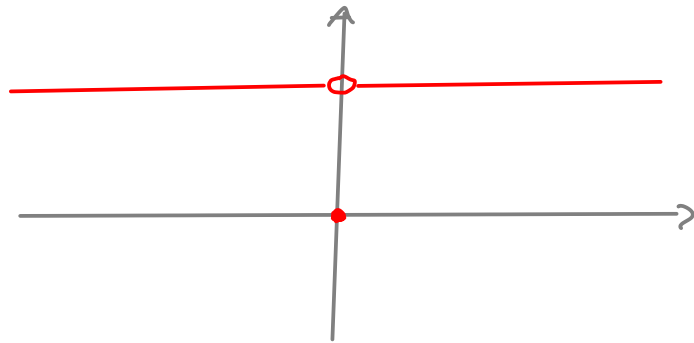
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 = f(3)$

(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ,  $a = 0$

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $a_n \rightarrow 0$

$\Rightarrow f(a_n) = \underset{a_n \neq 0}{1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$

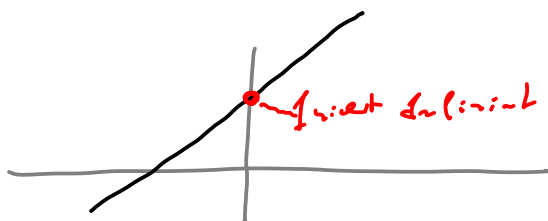


(c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ,  $a = 0$  ist HP von  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \neq 1$  und  $a_n \rightarrow 0$ .

$\Rightarrow f(a_n) = \frac{a_n^2 - 1}{a_n - 1} = \frac{(a_n + 1) \cdot \cancel{a_n - 1}}{\cancel{a_n - 1}} = a_n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 1 = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , obwohl  $a = 0$  nicht im Definitionsbereich von  $f$  liegt!

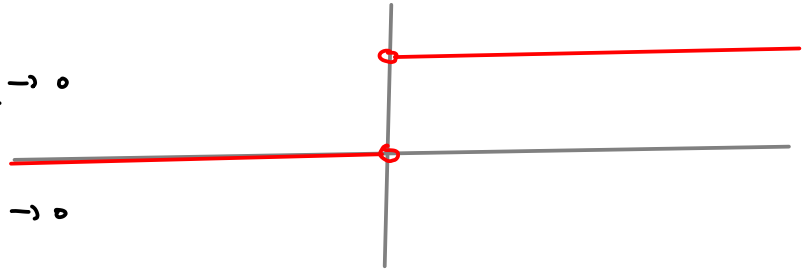


$$d) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{array}{l} a = 0 \\ \text{ist HP} \\ \text{von } \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

Betrachte die Folgen:

$$\cdot a_n = -\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } a_n \rightarrow 0$$

$$\cdot b_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } b_n \rightarrow 0$$



$$\text{Aber: } \begin{array}{l} f(a_n) = 0 \longrightarrow 0 \\ f(b_n) = 1 \longrightarrow 1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

## c) Die Grenzwertsätze für Funktionen

Def. 13.9:

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen,  $c \in \mathbb{R}$ .

Definiere:  $\cdot c \cdot f: U \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c \cdot f(x)$

$$\cdot f+g: U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) + g(x)$$

$$\cdot f-g: U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) - g(x)$$

$$\cdot f \cdot g: U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$$

$$\cdot \frac{f}{g}: \{x \in U \cap V \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Prop. 13.10 (Grenzwertsätze für Funktionen)

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen,  $a$  HP von  $U$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

$$a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = y \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = z \Rightarrow y = z$$

b) Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existieren, dann gelten

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f)(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad 2) \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad 4) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \Rightarrow \text{a HP von } \{x \in U \mid f(x) \neq 0\} \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$



Beweis:

①  $a$  ist HP von  $\mathcal{U}$   $\stackrel{13.4}{\Rightarrow} \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$$\stackrel{13.7}{\Rightarrow} y = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = z \stackrel{11.26}{\Rightarrow} y = z$$

② analog mit 11.15.

③ 13.4  $\Rightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$$\stackrel{13.7}{\Rightarrow} y := \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

$$\stackrel{11.25}{\Rightarrow} \exists n_0, \forall n \geq n_0 : f(a_n) \neq 0$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \geq n_0}$  ist Folge in  $\{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\} \setminus \{a\}$

$$\text{und } a_n \rightarrow a$$

$$\stackrel{13.4}{\Rightarrow} a \text{ ist HP von } \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\}$$

Rest analog mit 11.15.

□

Def. 13.11:

① Sei  $t$  eine Variable und  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Dann heißt der Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + a_1 \cdot t + a_0$$

ein **Polynom** in der Variable  $t$  mit

Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  in  $\mathbb{R}$

Wenn  $a_n \neq 0$ , heißt  $n =: \deg\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k\right)$  der **Grad** des Polynoms  $\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$ .

Satz:  $\deg(0) := -\infty$

② Setze:  $\mathbb{R}[t] := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$   
 = Menge aller Polynome in der Variable  $t$   
 mit Koeffizienten in  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \deg: \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

$$f \longmapsto \deg(f)$$

③ Sei  $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$  ein Polynom.

Dann:  $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$

Funktionen dieser Form heißen **Polynomfunktionen**!

Zudem: Sei  $f, g \in \mathbb{R}[t]$  mit  $g \neq 0$

dann gibt eine Funktion der Form

$$\frac{f}{g}: \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

eine **rationale Funktion**.

④  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$ , dann heißt  $x$  eine **Nullstelle** von  $f$ .

Bem. 13.12:

$$0 \neq g \in \mathbb{R}[t] \longrightarrow \left| \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \right| \leq \deg(g) < \infty$$

Bsp. 13.13:

①  $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$  und  $a \in \mathbb{R} \xRightarrow{13.10} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} x \right)^k = f(a)$

②  $f, g \in \mathbb{R}[t], a \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$   
 $\neq P$  in  $\mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \left\{ \begin{array}{l} \xRightarrow{13.10} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f(a)}{g(a)} \end{array} \right.$

# D) Uneigentliche Grenzwerte

## Def. 13.14

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $y \in \mathbb{R}$ .

(a)  $U$  heißt **nach oben unbeschränkt**  $\Leftrightarrow U \cap [0, \infty)$  ist nicht beschränkt  
 $U$  " **nach unten unbeschränkt**  $\Leftrightarrow U \cap (-\infty, 0]$  " " "

(b) Sei  $U$  nach oben unbeschränkt.  $y$  heißt der **Grenzwert von  $f$  in  $\infty$**   
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists s_\varepsilon > 0 : \forall x \in U$  mit  $x > s_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$

(c) Sei  $U$  nach unten unbeschränkt.  $y$  heißt der **Grenzwert von  $f$  in  $-\infty$**   
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists s_\varepsilon < 0 : \forall x \in U$  mit  $x < s_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$

## Bem. 13.15 (Grenzwertsätze & Folgerung für GU in $\pm \infty$ )

Folgerungskriterium 13.10 und GU-Sätze 13.15 verallgemeinern sich:

z.B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in U$  und  $a_n \rightarrow \infty : f(a_n) \rightarrow y$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x).$$

## Def. 13.16:

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a$  HP von  $U$ .

(a)  $\infty$  heißt **uneigentlicher GW** von  $f$  in  $a$

$\Leftrightarrow \forall s > 0 \exists \delta_s > 0 : \forall x \in U$  mit  $0 < |x - a| < \delta_s$  gilt:  $f(x) > s$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

(b)  $-\infty$  heißt **uneigentlicher GW** von  $f$  in  $a$

$\Leftrightarrow \forall s < 0 \exists \delta_s > 0 : \forall x \in U$  mit  $0 < |x - a| < \delta_s$  gilt:  $f(x) < s$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

③  $\infty$  heißt unregelmäßiger GW von  $f$  in  $\infty$

:( $\Leftrightarrow$ )  $\forall s > 0 \exists t > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x > t$  gilt:  $f(x) > s$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

④  $-\infty$  heißt unregelmäßiger GW von  $f$  in  $\infty$

:( $\Leftrightarrow$ )  $\forall s < 0 \exists t > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x > t$  gilt:  $f(x) < s$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

⑤  $\infty$  heißt unregelmäßiger GW von  $f$  in  $-\infty$

:( $\Leftrightarrow$ )  $\forall s > 0 \exists t < 0 : \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x < t$  gilt:  $f(x) > s$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

⑥  $-\infty$  heißt unregelmäßiger GW von  $f$  in  $-\infty$

:( $\Leftrightarrow$ )  $\forall s < 0 \exists t < 0 : \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x < t$  gilt:  $f(x) < s$

Schreibe:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Bem. 13.17:

Die GW-Sätze 13.10 und die Folgerit. verallgemeinern sich auf unregelmäßige GW wie in 13.16, wenn wir die Reihenfolge aus 11.35 beachten:

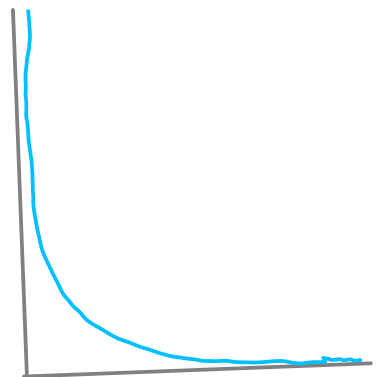
z.B.:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R}$  und  $a_n \rightarrow \infty$  gilt:  $f(a_n) \rightarrow -\infty$

Bsp. 13.18:

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



Defini:

• Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in (0, \infty)$  mit  $a_n \rightarrow 0$

Z.B.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty$

d.h.  $\forall s > 0 \exists n_s : \forall n \geq n_s : f(a_n) > s$

Sei  $s > 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{s} > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - 0| < \varepsilon$   
 $\parallel$   
 $a_n < \frac{1}{s}$

$\Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\frac{1}{s}} = s \quad \forall n \geq n_\varepsilon =: n_s$

Folgekrit.  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ .

• Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in (0, \infty)$  und  $a_n \rightarrow \infty$ .

Z.B.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |f(a_n) - 0| < \varepsilon$   
 $\parallel$   
 $f(a_n)$

Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow s := \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\Rightarrow \exists n_s : \forall n \geq n_s : a_n > s$

$\Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_s =: n_\varepsilon$

Folgekrit.  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

[5]

Bsp. 13.19:

Sei  $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$  ein Polynom mit  $n = \deg(f) \geq 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & , \text{ falls } a_n > 0 \\ -\infty & , \text{ falls } a_n < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } (a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade}) \text{ oder} \\ & (a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade}) \\ -\infty, & \text{falls } (a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade}) \text{ oder} \\ & (a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade}) \end{cases}$$

Beweis für  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und  $a_n > 0$ :

$$f(x) = \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \underbrace{\left( \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \right)}_{\substack{\geq 0 \text{ (*)} \\ \text{für } x \text{ groß}}} \geq \frac{\overset{\geq 0}{a_n} \cdot \overset{\geq 0}{x^n}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

Zu (\*):

$$x \geq \max \left\{ 1, \frac{-2 \cdot n \cdot a_0}{a_n}, \frac{-2 \cdot n \cdot a_1}{a_n}, \dots, \frac{-2 \cdot n \cdot a_{n-1}}{a_n} \right\}$$

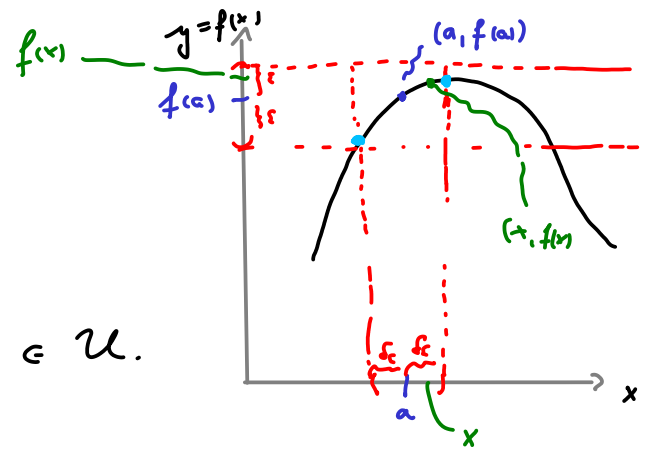
$$\Rightarrow \frac{a_n \cdot x^n}{2 \cdot n} \geq \underbrace{-a_k \cdot x^k}_{\forall k=0, \dots, n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n \cdot x^n}{2} = n \cdot \frac{a_n \cdot x^n}{2 \cdot n} \geq \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \cdot x^k$$

$$\Rightarrow \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \geq 0$$

□

# § 14 Stetigkeit



## A) Stetige Funktionen

### Def. 14.1

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$ .

$f$  heißt **stetig** in  $a$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U \text{ mit } |x-a| < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$f$  heißt **stetig** (auf  $U$ ), wenn  $f$  stetig in jedem Punkt von  $U$  ist.

Notation:  $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } U\}$

### Bem. 14.2

Für die Stetigkeit von  $f$  in  $a$  ist nur das Verhalten von  $f$  in einer kleinen Umgebung  $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$  von  $a$  maßgeblich. Wir nennen die Stetigkeit deshalb eine **lokale Eigenschaft**.

### Lemma 14.3

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a$  HP von  $U$ .

Dann:  $f$  ist **stetig** in  $a$   $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Beweis: Def. 13.6 + Def. 14.1.

### Bsp. 14.4:

(a) Jede Polynomfkt.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

Dann:  $a \in \mathbb{R} \xrightarrow{13.13} a$  HP von  $\mathbb{R}$  &  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

(b) Jede rationale Fkt.  $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x)=0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

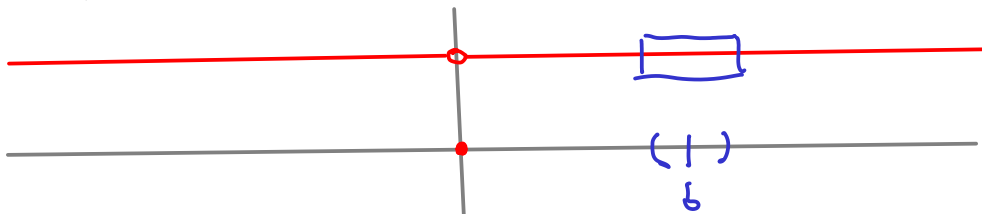
Dann:  $a \in \mathbb{R}$  mit  $g(a) \neq 0 \xrightarrow{13.13} a$  HP von  $\mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x)=0\}$  &  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f}{g}(a)$

$$\textcircled{c} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in  $a = 0$

Denn,  $a$  ist HP von  $\mathbb{R}$  &  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$

Beweis:  $f$  stetig in  $b \quad \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



①  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig &  $V \subseteq U \Rightarrow f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig

② Sei  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  irgendeine Funktion, dann ist  $f$  stetig!

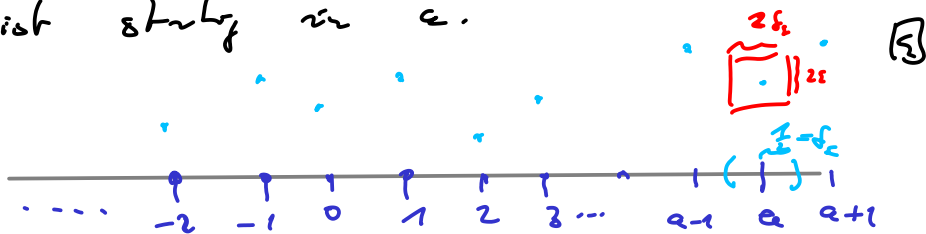
**! d.h. Stetigkeit ist für Fkt. von  $\mathbb{Z}$  kein gutes Konzept!**

Denn: Sei  $a \in \mathbb{Z}$  und sei  $\varepsilon > 0$ .

Setze:  $\delta_\varepsilon := \frac{1}{2}$ . Sei  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $|x - a| < \delta_\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x = a \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

Also  $f$  ist stetig in  $a$ .



Satz 14.5 (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$ .

Denn:  $f$  ist stetig in  $a$

$\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in U$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$

Beweis: wörtlich 13.7.

□



Bsp. 14.6:

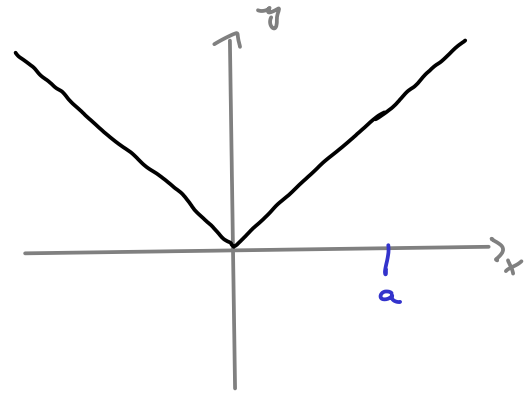
Beh: Die Betragsfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$  ist stetig.

Wz:

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$ .

$\Rightarrow f(a_n) = |a_n| \rightarrow |a| = f(a)$   
11.15 □



## B) Rechnen mit stetigen Funktionen

Proposition 14.7

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in U$  und sei  $c \in \mathbb{R}$ .

(a)  $c \cdot f$ ,  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  sind stetig in  $a$ .

(b) Falls  $g(a) \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g}: U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .

Beweis:

Folgerungen 14.5 + GW-Sätze für Folgen

z.B.: Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in U$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$  +  $g(a_n) \rightarrow g(a)$   
14.5

$\Rightarrow (f+g)(a_n) = f(a_n) + g(a_n) \rightarrow f(a) + g(a) = (f+g)(a)$   
11.15

$\Rightarrow f+g$  stetig in  $a$ . □

Prop. 14.8

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{Im}(f) \subseteq V$  und  $a \in U$ .

Wenn  $f$  stetig in  $a$  und  $g$  stetig in  $f(a)$ , dann:  $g \circ f$  stetig in  $a$

Bew. ist:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in U$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

z.z.:  $(g \circ f)(a_n) \rightarrow (g \circ f)(a)$

$$\begin{array}{ccc}
 a_n \rightarrow a & \xrightarrow[\substack{\text{14.5} \\ \text{f stetig in a}}]{=} & f(a_n) \rightarrow f(a) \\
 & & \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 & & U \quad \quad U
 \end{array}$$

14.5  $\Downarrow$   $g$  stetig in  $f(a)$

$$(g \circ f)(a_n) = g(f(a_n)) \rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

Also:  $g \circ f$  stetig in  $a$  wegen 14.5. □

Def. 14.10:

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $a \in \mathbb{R} \setminus U$  ein HP von  $U$ .

Dann:  $f$  heißt **stetig fortsetzbar in  $a$**   $\iff$  **lim  $f(x)$  existiert  $x \rightarrow a$**

zudem:  $g: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in U \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a \end{cases}$

heißt die **stetige Fortsetzung** von  $f$  in  $a$

Bemerk:  $g$  ist stetig (auch in  $a$ ), wegen 14.3

Bsp. 14.11:

①  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  ist stetig als rat. Fkt.

und  $1$  ist HP von  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  und  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$   
13.80

Also:  $f$  ist **stetig fortsetzbar in  $1$**

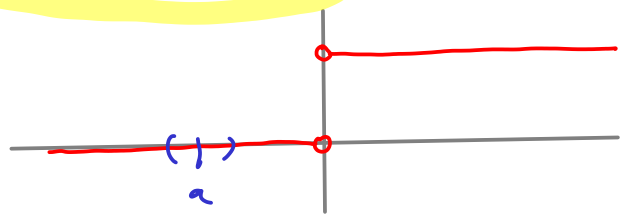
Durch:  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Dann:  $g(x) = x + 1$

①  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  ist stetig!

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$\Rightarrow f$  nicht stetig fortsetzbar in  $0$



②  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  ist stetig in  $a$   $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Trotzdem ist  $f$  in  $0$  nicht stetig fortsetzbar, weil  $f$  in  $0$  schon definiert ist!

## C) Der Zwischenwertsatz

### Satz 14.12 (Zwischenwertsatz)

Eine stetige Fkt.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

Beweis:

o.E.:  $f(a) \leq f(b)$ . Sei  $c \in [f(a), f(b)]$ .

Def.:  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - c \Rightarrow$  14.7  $g$  ist stetig

Z.z.:  $\exists x \in [a, b] : g(x) = 0$  (d.h.  $f(x) = c$ )

Idee: Konstruieren  $x$  mittels Intervallschachtelung

Setze:  $[a_0, b_0] := [a, b]$  und  $x_0 := \frac{b_0 + a_0}{2} \in [a, b]$

1. F.11:  $g(x_0) = 0 \Rightarrow x := x_0$  tut's

2. F.11:  $g(x_0) > 0 \Rightarrow g(a_0) < g(x_0)$ . Setze:  $[a_1, b_1] := [a_0, x_0]$

3. F.11:  $g(x_0) < 0 \Rightarrow g(x_0) < g(b_0)$ . Setze:  $[a_1, b_1] := [x_0, b_0]$

Funktion mit  $[a, b]$  fort wie mit  $[a, b]$ , usw.

Dann folgende Fälle auftreten:

Fall a): wir finden nach endl. vielen Schritten ein  $x_n \in [a, b]$   
mit  $g(x_n) = 0 \implies x := x_n$  tut's

Fall b): das Verfahren bricht nicht ab!

$\implies$  wir finden Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
wobei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und beschränkt,  
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ... .. fallend ... ..

$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$   
Nestkriterium

Zudem:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ y - x & & [a, b] \end{array}$$

$\implies x = y = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in [a, b]$   
Mittel

$\implies g(x) \leftarrow g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n) \longrightarrow g(x)$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ g(x) \leq 0 & & 0 \leq g(x) \end{array}$$

$\implies g(x) = 0$  □

Bsp. 14.13

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Polynomfunktion ungerader Grades, dann hat  $f$  ein Nullstell.

Dann:

Sei  $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k, a_n \neq 0, n$  ungerade.

Dann hat  $f$  mindestens Nullstelle wie  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{a_n} \cdot f(x)$

$\implies \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$$x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot x^k$$

$\implies \exists a < b : g(a) < 0 < g(b) \stackrel{ZWS}{\implies} \exists x \in [a, b] : g(x) = 0$  □

# D) Beschränktheit stetiger Funktionen

Def. 14.14:

Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **beschränkt**, wenn  $Z_n(f)$  beschränkt ist.

Proposition 14.15

Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig**, dann ist  $f$  **beschränkt**.

Beweis:

Ang:  $f$  ist nicht beschränkt

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in [a, b] : f(a_n) > n \quad (*)$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Folge im Intervall  $[a, b]$ , d.h. beschränkt

$$\stackrel{11.26}{\Rightarrow} \stackrel{BW}{\exists} \text{ TF } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = c \in [a, b] \\ \downarrow \\ 11.28 \end{array} \right\}$$

$$\text{Vor.} \Rightarrow f \text{ stetig} \Rightarrow |f| \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(c)|}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{|f(a_{n_k})|}_{(*)} > n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$



□

Satz 14.16:

Eine **stetige** Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt ihr **Maximum** & **Minimum** an

d.h.  $\exists c, d \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : f(c) \leq f(x) \leq f(d)$

Beweis:

$$14.15 \Rightarrow Z_n(f) \text{ beschränkt} \Rightarrow \exists \eta = \sup(Z_n(f)) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : \exists a_n \in [a, b] : \eta - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq \eta$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $[a, b]$ , damit beschränkt

$$\stackrel{11.26}{\Rightarrow} \stackrel{BW}{\exists} \text{ TF } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} =: d \in [a, b] \\ \downarrow \\ 11.28 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \eta < \underbrace{\eta - \frac{1}{n_k}}_{k \rightarrow \infty} < f(a_{n_k}) \leq \eta \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \eta$$

$$\stackrel{11.17}{\Rightarrow} \eta = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(d)$$

Analogy:  $\exists c \in [a, b] : \inf(Z_n(f)) = f(c)$

□

Bsp. 14.17:

Ⓐ  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$  ist stetig

$$\Rightarrow \max(\text{Dom}(f)) = 1 = f(1) = f(-1)$$

$$\min(\text{Dom}(f)) = 0 = f(0)$$

Ⓑ  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig

$\Rightarrow \text{Dom}(f) = (0, \infty)$  ist nicht nach oben beschränkt

und  $f$  nimmt weder sein Maximum noch sein Minimum an.

## E) Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen

Def. 14.18:

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $U \subseteq \mathbb{R}$ .

Ⓐ  $f$  heißt **monoton wachsend**  $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) \leq f(y)$

Ⓑ  $f$  heißt **streng monoton wachsend**  $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) < f(y)$

Ⓒ  $f$  heißt **monoton fallend**  $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) \geq f(y)$

Ⓓ  $f$  heißt **streng monoton fallend**  $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$  mit  $x < y$  gilt:  $f(x) > f(y)$

Bsp. 14.19:

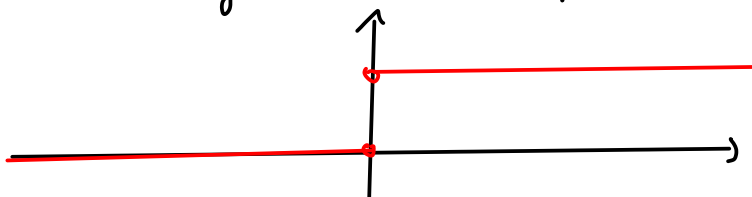
Ⓐ  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^u$  (für ein  $u \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ )

ist streng monoton wachsend,

denn: 8.17  $\Rightarrow (0 \leq x < y \Rightarrow f(x) = x^u < y^u = f(y))$

Ⓑ  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  ist monoton

wachsend, aber nicht streng monoton!





Zu zeigen:  $\mathcal{D}_m(f) = (c, d)$

" $\subseteq$ "  $y \in \mathcal{D}_m(f) \Rightarrow c = \inf(\mathcal{D}_m(f)) \leq y \leq \sup(\mathcal{D}_m(f)) = d$   
 $\Rightarrow y \neq c, d \Rightarrow y \in (c, d)$

" $\supseteq$ " Sei  $y \in (c, d) \Rightarrow c < y < d$   
 $\inf(\mathcal{D}_m(f)) \qquad \qquad \sup(\mathcal{D}_m(f))$

$\Rightarrow y$  ist kein oberer / unterer Schranke von  $\mathcal{D}_m(f)$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in (a, b) : f(x_1) < y < f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 < x_2$

$f$  stetig  
 monoton wachsend.

$\Rightarrow f|_{[x_1, x_2]} : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig

$\Rightarrow \exists x \in [x_1, x_2] \subseteq (a, b) : f(x) = y$

ZWS

$\Rightarrow y \in \mathcal{D}_m(f)$

Damit:  $f : (a, b) \rightarrow \mathcal{D}_m(f) = (c, d)$  stetig und stetig monoton wachsend.

$\Rightarrow$   $f$  injektiv + surjektiv, also bijektiv

14.70

$\Rightarrow$  ①

Zu zeigen:  $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$  stetig monoton wachsend

Seien  $y_1, y_2 \in (c, d)$  mit  $y_1 < y_2$

$f(a, b)$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in (a, b) : y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 < x_2$   
 $f$  stetig  
 monoton wachsend.  
 $f^{-1}(y_1) \qquad f^{-1}(y_2)$

$\Rightarrow f^{-1}$  ist stetig monoton wachsend.



Zu zeigen:  $f^{-1}$  ist stetig

Sei  $y_0 \in (c, d)$  und  $\varepsilon > 0$ .

Z.z.:  $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall y \in (c, d)$  mit  $|y - y_0| < \delta_\varepsilon : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

Setze  $x_0 := f^{-1}(y_0)$  und

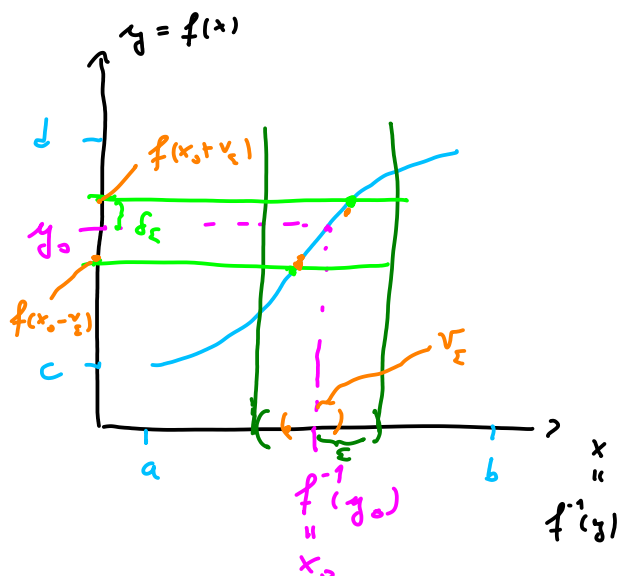
$$r_\varepsilon := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-x_0}{2}, \frac{x_0-a}{2} \right\} > 0$$

$$\Rightarrow a < x_0 - r_\varepsilon < x_0 < x_0 + r_\varepsilon < b$$

$$\Rightarrow f(x_0 - r_\varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + r_\varepsilon)$$

f s.t.v. || || ||

||  $y_0$  ||



Setze:  $\delta_\varepsilon := \min \{ y_0 - f(x_0 - r_\varepsilon), f(x_0 + r_\varepsilon) - y_0 \} > 0$

$$\Rightarrow f(x_0 - r_\varepsilon) \leq y_0 - \delta_\varepsilon < y_0 < y_0 + \delta_\varepsilon \leq f(x_0 + r_\varepsilon)$$

Sei  $y \in (y_0 - \delta_\varepsilon, y_0 + \delta_\varepsilon) \subseteq (c, d)$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x_0 - r_\varepsilon)) \leq f^{-1}(y_0 - \delta_\varepsilon) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta_\varepsilon) \leq f^{-1}(f(x_0 + r_\varepsilon))$$

f s.t.v. || || || || ||

$x_0 - r_\varepsilon$  ||  $x_0$  ||  $x_0 + r_\varepsilon$

$$\Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < r_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Also:  $f^{-1}$  ist stetig in  $y_0$ , damit auf  $(c, d)$

Ⓛ analog

Bem. 14.22:

Wenn  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig & streng monoton wachsend,

$$\text{denn: } c := \inf(\text{Zw}(f)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad d := \sup(\text{Zw}(f)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

Wenn  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig & streng monoton fallend,

$$\text{denn: } c := \inf(\text{Zw}(f)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x), \quad d := \sup(\text{Zw}(f)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Wenn  $f$  stetig nach  $a$  oder  $b$  fortgesetzt werden kann,  
 dann:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  ist dann in  $\mathbb{R}$   
 und  $f^{-1}$  kann in  $c$  bzw.  $d$  stetig fortgesetzt  
 werden durch die entsprechenden G.W.  $a$  bzw.  $b$ .

D.h. 14.21 gilt auch für **Halboffen & abgeschlossene Intervalle**.

Bsp. 14.23:

Sei  $n \geq 2$ .

$\Rightarrow f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$  ist streng monoton wachsend  
& stetig

$\Rightarrow$  14.21  $f^{-1}: (\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) \rightarrow (0, \infty)$  ist streng monoton wachsend  
& stetig  
 " $\sqrt[n]{\cdot}$ "

dabei:  $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$

$\Rightarrow$  14.22  $\sqrt[n]{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist str. mon. wach. & stetig

Wird  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = 0$ .

Zus.:  $\sqrt{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig & str. mon. wach.

Korollar 14.24:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Beweis:

Satz 2:  $a_n := \sqrt[n]{n} - 1, n \geq 2$ .

z.z.:  $(a_n)_{n \geq 2}$  ist eine Nullfolge!

Bemerkung:  $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{a_n^k}_{>0} \cdot 1^{n-k} \geq 1 + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2}_{>0} > 1$$

$$\Rightarrow n-1 \geq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \geq a_n^2 > 0 \quad \Rightarrow a_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \frac{2}{n} \\ & \downarrow n \rightarrow \infty \\ & 0 \end{aligned}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty \\ 0$$

$\int \sqrt{x}$  stetig

$$a_n = \sqrt[n]{a_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[0]{0} = 0$$

□

## F) Gleichmäßige Stetigkeit

Bem. 14.25:

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig auf  $U$

$\Leftrightarrow \forall a \in U$  gilt  $f$  ist stetig in  $a$

$\Leftrightarrow \forall a \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \forall x \in U$  mit  $|x-a| < \delta$  :  $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

Def. 14.26.

Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig auf  $U$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0; \forall x, y \in U$  mit  $|x-y| < \delta$  :  $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Bem. 14.27

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig stetig auf  $U \Rightarrow f$  stetig auf  $U$

Satz 14.28:

Wenn  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, dann ist  $f$  glm. stetig auf  $[a, b]$ .

## Beweis:

Ang:  $f$  ist nicht glm. stetig auf  $[a, b]$ .

d.h.  $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta_\varepsilon > 0 \exists x_{\delta_\varepsilon}, y_{\delta_\varepsilon} \in [a, b]$  mit  $|x_{\delta_\varepsilon} - y_{\delta_\varepsilon}| < \delta_\varepsilon$ , aber  $|f(x_{\delta_\varepsilon}) - f(y_{\delta_\varepsilon})| \geq \varepsilon$

Für  $n > 1$  und  $\delta_\varepsilon := \frac{1}{n}$  wählen die passenden Werte  
 $x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}}$  und  $y_{\delta_\varepsilon} = y_{\frac{1}{n}}$  wie oben und setze:

$$a_n := x_{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad b_n := y_{\frac{1}{n}}.$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$  ist eine Folge in  $[a, b]$ , und damit beschränkt

$\stackrel{M.26}{\Rightarrow}$   $\exists$  TF  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \eta \in [a, b]$   
BW  $M.26$

$\Rightarrow (b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist Folge in  $[a, b]$  und damit beschränkt

$\stackrel{M.26}{\Rightarrow}$   $\exists$  TF  $(b_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $b_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \zeta$   
BW

$$\Rightarrow a_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \eta$$

$$\text{Zudem: } |a_{n_{k_l}} - b_{n_{k_l}}| = |x_{\frac{1}{n_{k_l}}} - y_{\frac{1}{n_{k_l}}}| < \frac{1}{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

$$| \eta - \zeta | \Rightarrow \eta = \zeta \in [a, b]$$

$$\Rightarrow 0 = |f(\eta) - f(\zeta)| \stackrel{(*)}{\geq} |f(a_{n_{k_l}}) - f(b_{n_{k_l}})| \geq \varepsilon > 0 \quad \downarrow$$

Also:  $f$  ist glm. stetig auf  $[a, b]$  □

## Bsp. 14.29:

(a)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$  ist stetig

$\stackrel{M.28}{\Rightarrow}$   $f$  ist glm. stetig auf  $[0, 1]$ .

Prüfe dies mit der Definition nach:

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall \underset{[0, 1]}{x, y}: |x - y| < \delta_\varepsilon: |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Satze:  $\delta_{\frac{\varepsilon}{2}} := \frac{\varepsilon}{2} > 0$ .

Seien  $x, y \in (0, 1)$  mit  $|x - y| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x - y|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{|x + y|}_{\leq 2} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

⑥  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig auf  $(0, \infty)$

Zeige:  $f$  ist  $\varepsilon$ -stetig gdw. stetig

d.h.  $\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists x, y_{\delta} : |x - y_{\delta}| < \delta : |f(x) - f(y_{\delta})| \geq \varepsilon$

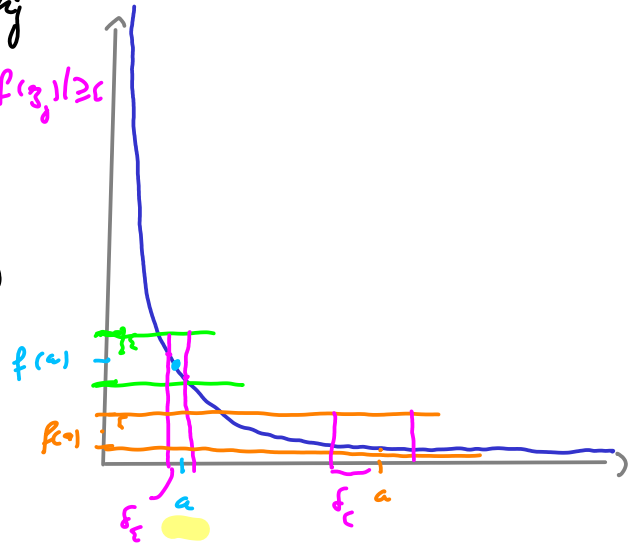
Satze  $\varepsilon = 1$ . Sei  $\delta > 0$  gegeben.

Setze:  $x_{\delta} := \delta$ ,  $y_{\delta} := \frac{\delta}{1+\delta} \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow |x_{\delta} - y_{\delta}| = \delta - \frac{\delta}{1+\delta} < \delta$$

aber:  $|f(x_{\delta}) - f(y_{\delta})|$

$$\left| \frac{1}{\delta} - \frac{1+\delta}{\delta} \right| = \frac{\delta}{\delta} = 1 = \varepsilon \geq \varepsilon$$



Problem: Der Graph hat in der Nähe der 0 eine unbeschränkte Steigung!

# § 15 Konvergenz von Funktionenfolgen

## A) Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

### Def. 15.1

Ⓐ Sei  $f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $n \in \mathbb{N}$ , dann heißt  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen auf  $U$ .

Ⓑ Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen auf  $U$ .

•  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **punktweise konvergent**;  $(\Leftrightarrow) \forall x \in U \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

• Dann heißt  $f: U \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  Grenzfunktion von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Wir sagen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $U$  **punktweise** gegen  $f$ .

d.h.  $\forall x \in U \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon, x} : \forall n \geq n_{\varepsilon, x} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Ⓒ  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $U$  **gleichmäßig** gegen  $f$

$(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \ \& \ \forall x \in U : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

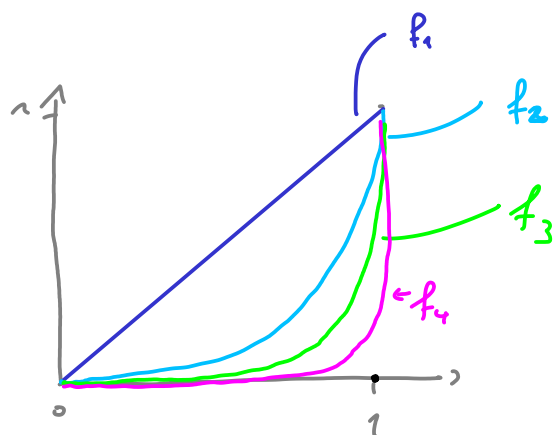
### Beim. 15.2

$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  glm. auf  $U \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  punktweise auf  $U$

### Bsp. 15.3:

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$$

$$\Rightarrow f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & | x = 1 \\ 0 & | 0 \leq x < 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $[0, 1]$  punktweise gegen  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Beachte:  $f_n$  stetig  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

aber  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  ist nicht stetig!

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Bew:  $f_n \rightarrow f$  nicht gln. auf  $[0, 1]$

d.h.  $\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon : \exists n \geq n_\varepsilon \text{ \& } \exists x \in U : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$

Dann: Setze  $\varepsilon := \frac{1}{4} > 0.$   $n := n_\varepsilon$  beliebig.

Setze:  $n := \max\{2, n_\varepsilon\} \geq n_\varepsilon$  und  $x := \frac{1}{\sqrt{2}} \in [0, 1]$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon$$

□

Satz 15.4

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$  eine Potenzreihe über  $\mathbb{R}$  mit KR  $r.$

Für  $n \in \mathbb{N}$  setze:  $f_n : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

Dann: •  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $(-r, r)$  punktweise

gegen  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$

•  $\forall 0 \leq R < r : (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $[-R, R]$  gln. gegen  $f$

Bew:

• D-f.  $\Rightarrow f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = f(x) \quad \forall x \in (-r, r)$

d.h.  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$

• Zuif:  $f$  konv. auf  $[-R, R]$  gln. gegen  $f.$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \text{ \& } \forall x \in [-R, R] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Beachte:  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot R^k$  ist konvergent

$\Rightarrow$  Folge der Restglieder ist eine Nullfolge!

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot R^k \right| < \varepsilon$  (\*)

Sei  $n \geq n_2$  und  $x \in [-R, R]$ .

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cdot x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot R^k < \epsilon$$

□

Bsp. 15.5

$f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$  konvergiert auf  $(-1, 1)$

punktweise gegen  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Beh:  $f_n \rightarrow f$  nicht glm. auf  $(-1, 1)$

d.h.  $\exists \epsilon > 0 \forall n_2 : \exists n \geq n_2 \text{ \& } x \in (-1, 1) : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$

Satz:  $\epsilon := 1 > 0$ . Sei  $n_2$  gegeben.

Behaupte:  $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^{n_2+1}}{1-x}$  ist stetig

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \exists x \in (0, 1) : 1 \leq g(x) = \frac{x^{n_2+1}}{1-x}$$

$$\Rightarrow |f_{n_2}(x) - f(x)| = \sum_{k=n_2+1}^{\infty} x^k = x^{n_2+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^{n_2+1} \cdot \frac{1}{1-x} = g(x)$$

□

## B) Gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen

Satz 15.6

Sei  $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $U$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $f_n \xrightarrow{u \rightarrow \infty} f$  glm. auf  $U$ .

Dann:  $f$  ist stetig auf  $U$ .



Beweis: Sei  $a \in U$ .

Zeige:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 ; \forall x \in U$  mit  $|x - a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

•  $f_n \rightarrow f$  glm. auf  $U \Rightarrow \exists U_{\frac{\varepsilon}{3}} : \forall u \geq U_{\frac{\varepsilon}{3}} \exists \forall x \in U : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

•  $f_{n_\varepsilon}$  ist stetig an  $a$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in U$  mit  $|x - a| < \delta : |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$

• Setze:  $\delta_\varepsilon := \delta > 0$

Sei  $x \in U$  mit  $|x - a| < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) + f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a) + f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

□

Ksv. 15.7

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  ein PR über  $\mathbb{R}$  mit  $\forall R > 0$ .

Dann:  $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ist stetig auf  $(-r, r)$ .

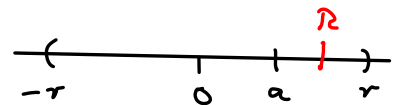
Beweis:

Sei  $a \in (-r, r)$ . Setze:  $R := \frac{|a| + r}{2} \in (0, r)$

$\Rightarrow$   $f_n: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$

konv. glm. auf  $[-R, R]$

gegen  $f|_{[-R, R]}$



$\Rightarrow$   $f_n$  stetig als PF  $f|_{[-R, R]}$  stetig  $\Rightarrow f$  stetig in  $a$ .

□

Bsp. 15.8:

$\exp, \cos, \sin$  sind stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ . □

# § 16 Exponentialfunktion, Logarithmus & trigonometrische Funktionen

## A) Exponential- und Logarithmusfunktionen

Satz 16.1:

Die Exponentialfunktion  $\exp: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ist  
stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Inbesondere gelten:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

Beweis:

Sei  $z > 0$ .

$$\Rightarrow \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \geq \frac{z^1}{1!} + \frac{z^0}{0!} = z + 1 > 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z + (-z)) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

$$\Rightarrow \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} > 0$$

$$\Rightarrow \text{Im}(\exp) \subseteq (0, \infty)$$

Sei  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$ .

$$\Rightarrow \exp(y) = \exp(y-x+x) = \underbrace{\exp(y-x)}_{> 0} \cdot \exp(x) > \underbrace{1 \cdot \exp(x)}_{\exp(x)}$$

$\Rightarrow \exp$  ist streng monoton wachsend und nach 15.8 stetig

$\Rightarrow \exp: (-\infty, \infty) \rightarrow (c, d)$  ist bijektiv

14.21 wobei  $c = \inf(\text{Im}(f)) \stackrel{14.22}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$

$$d = \sup(\text{Im}(f)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)$$

Behauptung:  $x > 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 1 + x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$

$$\Rightarrow d = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$$

$$\cdot \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow c = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

Also:  $\text{Im}(\exp) = (c, d) = (0, \infty)$

□

Bem. 16.2:

$e := \exp(1)$  = Eulersche Zahl ist **irrational**

und  $e \in (2, 3)$ .

Def. 16.3:

Die Umkehrfunktion von  $\exp$  heißt **(natürliche) Logarithmus**,

$$\ln: (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty).$$

Satz 16.4:

Der natürliche Logarithmus ist **stetig, bijektiv** und **streng monoton wachsend**.

Inbesondere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

Beweis:

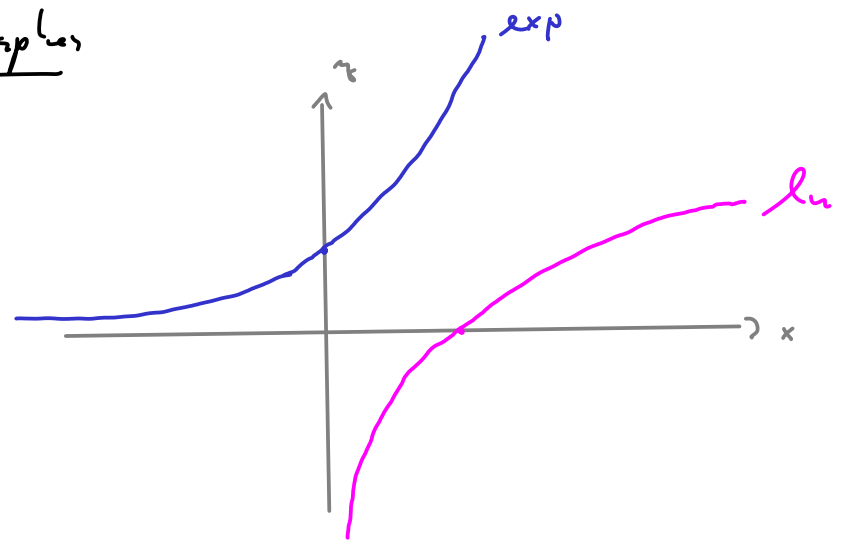
$$14.21 + 16.1 + 14.22.$$

□

Bem. 16.5:

Bearbeitet:  $\cdot \exp(0) = 1$  und  $\exp(1) = e$   
 $\cdot \ln(1) = 0$  und  $\ln(e) = 1$

Skizze der Graphen



Def. 16.6

Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

Satz:  $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$

Insb.:  $e^x = \exp(x \cdot \underbrace{\ln(e)}_1) = \exp(x)$

Satz 16.7:

Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $a \neq 1$ .

Ⓐ Die Abb.  $\exp_a : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty) ; x \mapsto a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$  heißt die Exponentialfunktion zur Basis  $a$  und sie ist stetig, bijektiv und streng monoton  $\begin{cases} \text{wachsend, } a > 1 \\ \text{fallend, } a < 1 \end{cases}$ .

Ⓑ Die Umkehrabb.:  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  von  $\exp_a$  heißt Logarithmus zur Basis  $a$  und sie ist stetig, bijektiv und streng monoton  $\begin{cases} \text{wachsend, } a > 1 \\ \text{fallend, } a < 1 \end{cases}$ .

## Beweis:

Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 1$ .

$\Rightarrow \ln(a) > 0$ , denn  $\ln(1) = 0$  und  $\ln$  str. mon. wach.

Sei  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(a) < y \cdot \ln(a)$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Exp. s. m. w.}}{\exp_a(x)} = \exp(x \cdot \ln(a)) < \exp(y \cdot \ln(a)) = \exp_a(y)$$

$\Rightarrow \exp_a$  streng monoton wachsend

Zudem:  $g: X \mapsto x \cdot \ln(a)$  stetig &  $\exp$  stetig

$$\Rightarrow \exp_a = \exp \circ g \text{ stetig}$$

Behauptung:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x \cdot \ln(a)}_{> 0} = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x \cdot \ln(a)}_{> 0} = -\infty$

$$\Rightarrow \underset{\text{Exp. stetig}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x \cdot \ln(a)) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x \cdot \ln(a)) = 0$$

$\Rightarrow \text{Im}(\exp_a) = (0, \infty)$  und  $\exp_a$  ist bijektiv

Teil b) für  $a > 1$  folgt aus 14.21 + (a) + 14.22.

Der Fall  $a < 1$  geht analog!

(3)

## B) Potenz- und Logarithmusgesetze

Kor. 16.8:

Seien  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$

(a)  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(b)  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(c)  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

(d)  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(e)  $\forall n \in \mathbb{Z}$  stimmen die Def. von  $a^n$  in 7.9 & 16.6 überein.

(f)  $\forall p, q \in \mathbb{Z}$  mit  $q \geq 2$ :  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ . Insb. Def. 9.8 & 16.6 für  $a^{\frac{1}{q}}$  stimmen überein.

### Basisi

Ⓐ  $a^{x+y} = \exp((x+y) \cdot \ln(a)) = \exp(x \cdot \ln(a) + y \cdot \ln(a))$   
 $= \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \exp(y \cdot \ln(a)) = a^x \cdot a^y$

Ⓑ  $a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) \Rightarrow \ln(a^x) = \ln(\exp(x \cdot \ln(a))) = x \cdot \ln(a)$

$\Rightarrow (a^x)^y = \exp(y \cdot \ln(a^x)) = \exp(y \cdot x \cdot \ln(a)) = a^{x \cdot y}$

Ⓒ  $(a \cdot b)^x = \exp(x \cdot \ln(a \cdot b)) \stackrel{16.9 \text{ D}}{=} \exp(x \cdot (\ln(a) + \ln(b)))$   
 $= \exp(x \cdot \ln(a) + x \cdot \ln(b)) = \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \exp(x \cdot \ln(b)) = a^x \cdot b^x$

Ⓓ  $a^x \cdot a^{-x} \stackrel{\text{Ⓐ}}{=} a^{x+(-x)} = a^0 = \exp(0 \cdot \ln(a)) = \exp(0) = 1$

$\Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Ⓔ Sei  $n \in \mathbb{Z}$  und  $n > 0 \rightarrow a^n \stackrel{\text{Def. 7.9}}{=} a \cdot \dots \cdot a$   
 $a^n \stackrel{\text{16.6}}{=} \exp(n \cdot \ln(a))$  ! mit 7.9.

zu 8:  $n=1: a \stackrel{\text{16.6}}{=} \exp(\ln(a)) \checkmark$

$n-1 \mapsto n: \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a \cdot \underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{n-1} = \exp(\ln(a)) \cdot \exp((n-1) \cdot \ln(a))$   
 $\stackrel{\text{Ⓒ}}{=} \exp(n \cdot \ln(a)) = \exp((1+(n-1)) \cdot \ln(a))$

Wurde  $n=0$ :  $1 = \exp(0 \cdot \ln(a)) \checkmark$

Wurde  $n > 0$ :  $a^{-n} \stackrel{\text{7.9}}{=} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} \stackrel{\text{Ⓓ}}{=} a^{-n}$

Ⓕ  $(a^{\frac{p}{q}})^q \stackrel{\text{Ⓑ}}{=} a^{\frac{p}{q} \cdot q} = a^p \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{\frac{p}{q}})^q} = \sqrt[q]{a^p}$  Ⓕ

### Kor. 16.9:

Seien  $a, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $a \neq 1$  und  $z \in \mathbb{R}$ .

Ⓐ  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Ⓑ  $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Ⓒ  $\log_a(x^z) = z \cdot \log_a(x)$

Ⓓ  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Beweis:

(a) Wenn  $a \neq 1$ , dann:

$$\exp_a \left( \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right) = \exp \left( \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \cdot \ln(a) \right) = \exp(\ln(x)) = x$$
$$\exp_a(\log_a(x))$$

$$\implies \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \log_a(x)$$

$\exp_a$   
injektiv

$$(b) \exp_a(\log_a(x \cdot y)) = x \cdot y = \exp_a(\log_a(x)) \cdot \exp_a(\log_a(y))$$

|| 16.8(3)

$$\exp_a(\log_a(x) + \log_a(y))$$
$$\implies \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

$\exp_a$   
injektiv

$$(c) x^z = \exp(z \cdot \ln(x)) \stackrel{(3)}{=} \exp(z \cdot \log_a(x) \cdot \ln(a))$$
$$= \exp_a(z \cdot \log_a(x))$$

$$\implies \log_a(x^z) = \log_a(\exp_a(z \cdot \log_a(x))) = z \cdot \log_a(x)$$

$$(d) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \stackrel{(b)}{=} \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) \stackrel{(c)}{=} \log_a(x) - \log_a(y) \quad \square$$

## C) Die Zahl $\pi$

Satz 16.10

Der Sinus besitzt eine kleinste positive Nullstelle, die wir  $\pi$  nennen, und es gilt  $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$ .

Beweis:

Sei  $x \in (0, 4]$  beliebig.

$$\text{Entwicklung: } \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{Satz 16.1: } a_n := \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad n \geq 1.$$

Zu zeigen:  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist monoton fallend

$$\text{Denn: } a_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{x^{2n+1} \cdot x \cdot x}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)} \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{16}{20} < a_n$$

Besatz:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sin(x) - x$  ist absolut konvergent

$$\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} = (|(-1)^n \cdot a_n|)_{n \geq 1} \text{ ist Nullfolge}$$

Beweis des Leibniz-Kriteriums mit  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot a_k$

$$\Rightarrow S_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \leq S_4$$

$$\Rightarrow \boxed{x + S_1 \leq \sin(x) \leq x + S_4} \quad (*)$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

Satz  $x=1$ :  $\Rightarrow \sin(1) \geq 1 - \frac{1^3}{6} > 0$

Satz  $x=4$ :  $\sin(4) \leq S_4(4) + 4 = -\frac{268}{405} < 0$

Also:  $\sin$  stetig,  $\sin(1) > 0$  und  $\sin(4) < 0$

$$\Rightarrow \exists x \in [1, 4] : \sin(x) = 0$$

$$\Rightarrow A := \{x \in [1, 4] \mid \sin(x) = 0\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists \pi := \inf(A)$$

Zu zeigen:  $\sin(\pi) = 0$

$$\pi = \inf(A) \xrightarrow{\text{M. 22}} \exists (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } b_n \in A, \text{ monoton fallend}$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pi$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \sin(b_n) \\ \parallel \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin(\pi) \Rightarrow \sin(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \pi = \min(A) \text{ und } \pi > 1, \text{ weil } \sin(1) > 0$$



Zugehörigkeit:  $\forall x \in (0, \pi) ; \sin(x) > 0$

1. Fall:  $x \in [1, \pi)$

A<sub>1</sub>:  $\sin(x) = 0 \Rightarrow x \in A \wedge x < \pi \quad \hookrightarrow \pi = \min(A)$

A<sub>2</sub>:  $\sin(x) < 0$

$\Rightarrow \sin(1) > 0, \sin(x) < 0 \xrightarrow{\text{ZWS}} \exists y \in [1, x] : \sin(y) = 0$

$\Rightarrow y \in A \wedge y < \pi \quad \hookrightarrow \pi = \min(A)$

A<sub>3</sub>:  $\sin(x) > 0$

2. Fall:  $x \in (0, 1)$

$\Rightarrow \sin(x) \geq \sin_1(x) + x = x - \frac{x^3}{6} \geq x - \frac{x}{6} = \frac{5}{6} \cdot x > 0$

Bem. 16.11:

Wir wissen zur Zeit nur:

$$1 < \pi < 4$$

Erst später:  $\pi \approx 3.14159 \dots$

## D) Der Cosinus

Satz 16.12

$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  ist stetig, streng monoton fallend und bijektiv.

Beweis:

Seien  $x, y \in [0, \pi]$  mit  $x < y$ .

Z.z.:  $\cos(x) > \cos(y)$

$$\cos(y) = \cos\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right) \stackrel{AT}{=} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2}\right) \stackrel{AT}{=} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{y-x}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) + \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)}_{\in (0, \pi)} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}_{\in (0, \pi)} > 0$$

Dabei:  $0 \leq x < \frac{y+x}{2} < y \leq \pi$

$$0 < \frac{y-x}{2} < y < \pi$$

Also:  $\cos$  streng monoton fallend auf  $[0, \pi)$  und stetig

$$\Rightarrow_{14.21} \cos : [0, \pi] \longrightarrow \left[ \lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x), \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \right] \text{ bijektiv}$$

$\parallel \leftarrow \cos \text{ stetig}$   
 $\cos(\pi)$   $\cos(0)$   
 $\parallel$   
 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{0^{2k}}{(2k)!} = 1$

Darüber:  $\cos^2(\pi) = 1 - \underbrace{\sin^2(\pi)}_{=0} = 1$

$\Rightarrow \cos(\pi) \in \{1, -1\}$

$\Rightarrow \cos(\pi) = -1$ , weil  $\cos(0) = 1$  und  $\cos$  streng monoton fallend auf  $[0, \pi]$ .

□

## E) Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Satz 16.13

Ⓐ  $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + \pi) = -\sin(x)$  und  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

Ⓑ  $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x) \in [-1, 1]$  und  $\cos(x) \in [-1, 1]$

Ⓒ

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1

Ⓓ  $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  und  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Ⓔ  $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$  und  $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

Ⓕ  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$  ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

Ⓖ  $\sin(x) = 0 \iff x \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos(x) = 0 \iff x \in \{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Beweis:

Ⓒ  $\sin(x + \pi) \stackrel{AT}{=} \sin(x) \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} + \overbrace{\sin(\pi)}^{=0} \cdot \cos(x) = -\sin(x)$

$\cos(x + \pi) \stackrel{AT}{=} \cos(x) \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \sin(x) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -\cos(x)$

$$\textcircled{b} \quad 1 = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \geq |\sin(x)| \Rightarrow \sin(x) \in [-1, 1]$$

$$1 = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \geq \sqrt{\cos^2(x)} = |\cos(x)| \Rightarrow \cos(x) \in [-1, 1]$$

$$\textcircled{c} \quad x=0: \quad \sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n)!} = 1$$

$$x=\pi: \quad \text{Ab. 10} \Rightarrow \sin(\pi) = 0$$

$$\text{Ab. 12} \Rightarrow \cos(\pi) = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \quad -1 = \cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{A7}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}_{\leq 1} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \quad \wedge \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Downarrow \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Downarrow \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \{1, -1\}$$

$$\Downarrow \sin(y) > 0 \quad \forall y \in (0, \pi)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}: \quad 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{A7}{=} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \quad (*)$$

$$\text{Zudem:} \quad 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\text{Beachte: } \sin(y) > 0 \quad \forall y \in (0, \pi) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cdot \cos \text{ str. mon. fallend auf } [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{3\pi}{2}: \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \stackrel{a)}{=} -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \stackrel{a)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\underline{x = 2\pi} : \quad \cos(2\pi) = \cos(\pi + \pi) \stackrel{②}{=} -\cos(\pi) \stackrel{③}{=} -(-\cos(0)) = 1$$

$$\sin(2\pi) = \sin(\pi + \pi) \stackrel{③}{=} -\sin(\pi) = 0$$

$$① \quad \cos(x + 2\pi) \stackrel{②}{=} -\cos(x + \pi) \stackrel{②}{=} \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) \stackrel{③}{=} -\sin(x + \pi) \stackrel{③}{=} \sin(x)$$

$$② \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{AT}{=} \sin(x) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot \cos(x) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

$$③ \quad \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{③}{=} -\cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow \sin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  streng monoton wachsend und bijektiv auf  $[-1, 1]$

$$④ \quad \cdot \quad x = k \cdot \pi \stackrel{\substack{=} \\ \text{Zahl} \\ \text{von } k}}{\Rightarrow} \sin(x) = 0$$

$$\cdot \quad \sin(x) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 \leq x - k \cdot \pi < \pi$$

$$\Rightarrow \sin(x - k \cdot \pi) \stackrel{②}{=} \pm \sin(x) = 0$$

$$\Rightarrow \pi \text{ unv. pers. Wert von } \sin \quad x - k \cdot \pi = 0 \Rightarrow x = k \cdot \pi$$

$$\cdot \quad \cos(x) = 0$$

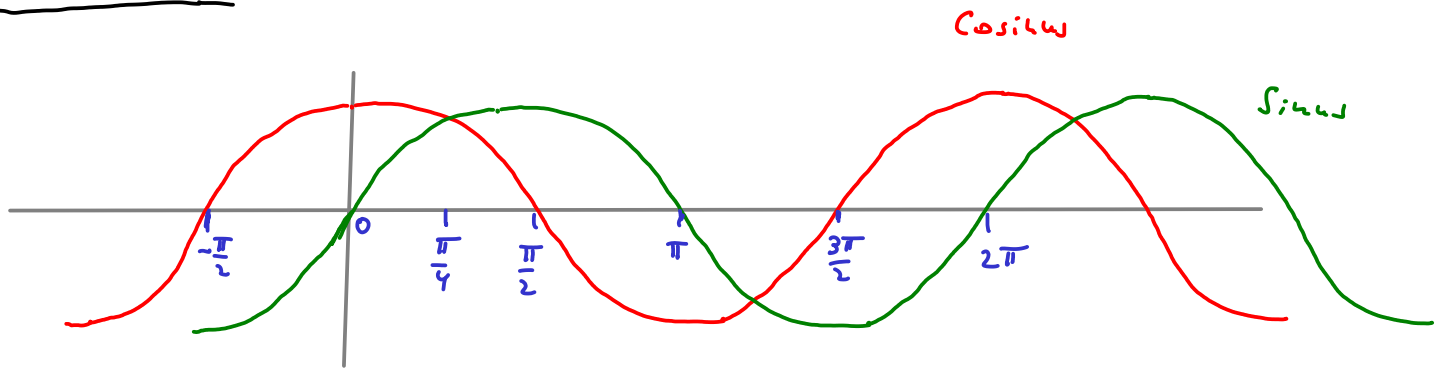
$$\parallel \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{k \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\parallel \\ \{k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Bem. 16.14:

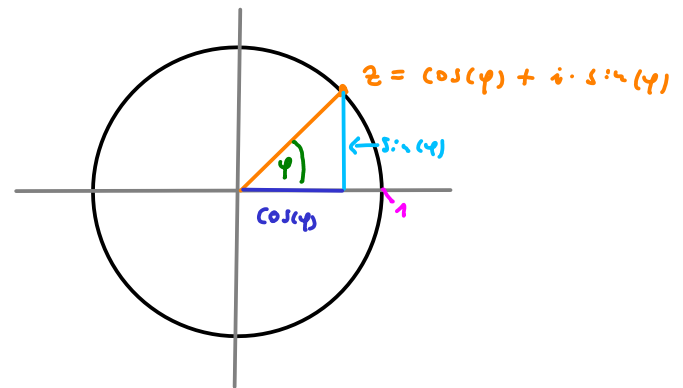


## F) Polarkoordinaten

Bem. 16.15

Beh: Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt:  $|z| = 1 \iff \exists_1 \varphi \in [-\pi, \pi) : z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Dann:  $z \in \mathbb{C}$  beliebig  
 $\Rightarrow \exists_1 \varphi \in [0, \pi) : z = |z| \cdot e^{i\varphi}$



Beweis:

$$\begin{aligned} \text{"} \Leftarrow \text{" } z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) &\Rightarrow |z|^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \\ \Rightarrow |z| = \pm 1 &\stackrel{|z| \geq 0}{\Rightarrow} |z| = 1 \end{aligned}$$

$$\text{"} \Rightarrow \text{" } \text{Sei } z = a + ib \text{ mit } 1 = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 - b^2 \leq 1 \Rightarrow a \in [-1, 1] = \cos([0, \pi])$$

$$\Rightarrow \exists_1 x \in [0, \pi] : a = \cos(x)$$

$$\Rightarrow b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow b \in \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) \\ \sin(-x) \end{array} \right\}$$

$$\text{1. Fall: } b = \sin(x) \Rightarrow z = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \Rightarrow \varphi = x$$

$$\text{2. Fall: } b = \sin(-x) \Rightarrow z = \cos(x) = \cos(-x) \Rightarrow z = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) \Rightarrow \varphi = -x$$

$$\text{Also: } \varphi \in [-\pi, \pi]. \text{ o.ä. } \varphi \in [-\pi, \pi]$$

□

Damit:  $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ e^{i \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k} \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$

↑  
n-te Einheitswurzel

" $\supseteq$ "  $\left( e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k} \right)^n = e^{2\pi i \cdot k} = \underbrace{\cos(2\pi \cdot k)}_{=1} + i \cdot \underbrace{\sin(2\pi \cdot k)}_{=0} = 1$

" $\subseteq$ "  $p = z^n - 1$  hat höchstens  $n$  Nullstellen □

## G) Weitere trigonometrische Funktionen

Def. 16.16

Ⓐ  $\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  heißt **Tangens**.

Ⓑ  $\cot: \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  heißt **Cotangens**.

Satz 16.17

Ⓐ  $\tan(x) = -\tan(-x)$ ,  $\cot(x) = -\cot(-x)$ ,  $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ ,  $\cot(x+\pi) = \cot(x)$

Ⓑ  $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  ist **stetig**, **streng monoton wachsend**, **bijektiv**, **punktsymm. zu 0**.

Ⓒ  $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  ist **stetig**, **streng monoton fallend**, **bijektiv**, **punktsymm. zu  $\frac{\pi}{2}$** .

Beweis

Ⓐ  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan(-x)$

$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$

analog für  $\cot$ !

Ⓑ Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$ .

$\Rightarrow \cos(x) > \cos(y) > 0$ ,  $0 \leq \sin(x) < \sin(y)$

$\uparrow$   $\cos$  str. unf. auf  $[0, \pi]$   $\quad$   $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$   $\quad$   $\uparrow$   $\sin(0) = 0$   $\quad$   $\uparrow$   $\sin$  str. unf. auf  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y)$

$\Rightarrow \tan$  **streng monoton wachsend** auf  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \tan$  **streng monoton wachsend** auf  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ , also auch  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$   
 $\tan$  **punkt. symm. zu 0** (a)

Darmit:  $\tan$  ist str. m. w. auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und stetig

$\Rightarrow \tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x))$  ist bijektiv

$$\text{Dabei: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x)}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin(x)}{\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos(x)} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Also:  $\tan\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

⊆ anhang zu Ⓛ.

Ⓛ

Satz 16.18 (Arcusfunktionen)

ⓐ  $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  hat eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, die sog. **Arcussinus**  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

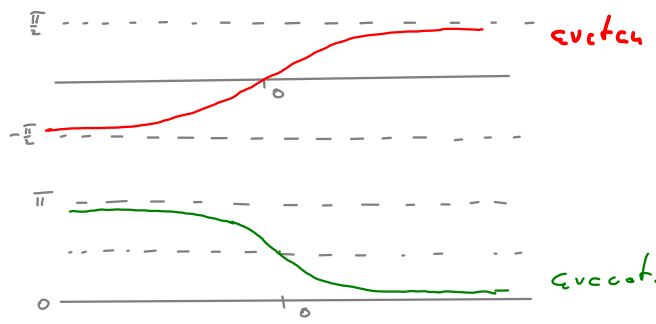
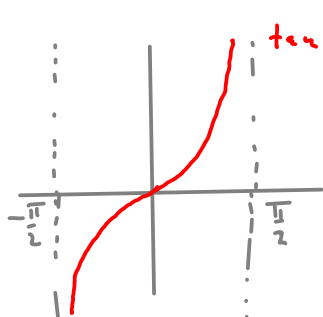
ⓑ  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  hat eine stetige, streng monoton fallende Umkehrfunktion, die sog. **Arcuscosinus**  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .

ⓒ  $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  hat eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, die sog. **Arcustangens**  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

ⓓ  $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  hat eine stetige, streng monoton fallende Umkehrfunktion, die sog. **Arcocotangens**  $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ .

Bew: 14.21 + 16.12 + 16.13 + 16.17.

Ⓛ



# § 17 Differenzierbarkeit

## A) Der Differenzenquotient

Def. 17.1

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$ .

Dann heißt  $\text{Diff}_{f,a}: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  der

Differenzenquotient von  $f$  an der Stelle  $a$ .

Sei  $b \in U \setminus \{a\}$  fest gegeben.

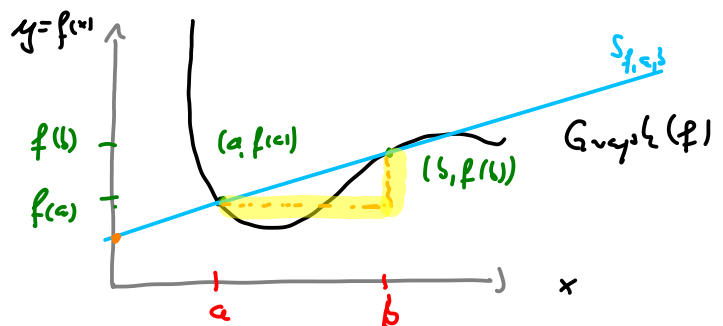
Satz:  $S_{f,a,b}$  = Sekante an den Graphen von  $f$  durch  $a$  &  $b$   
= Gerade durch  $(a, f(a))$  &  $(b, f(b))$

Grenzwertgleichung von  $S_{f,a,b}$ :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{b - a}$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

$$= \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{= \text{Diff}_{f,a}(b) = \text{Steigung von } S_{f,a,b}} \cdot (x - a) + f(a)$$



Bsp. 17.2:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^u, \quad u \geq 1$$

und  $a \in \mathbb{R}$  &  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f,a}(x) = \frac{x^u - a^u}{x - a} = \sum_{k=0}^{u-1} a^k \cdot x^{u-1-k} = x^{u-1} + a \cdot x^{u-2} + \dots + a^{u-2} \cdot x + a^{u-1}$$



## B) Differenzierbarkeit und die Ableitung.

Def. 17.3

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$  ein Häufungspunkt von  $U$ .

(a)  $f$  heißt **differenzierbar in  $a$**   $\Leftrightarrow$   $\lim_{x \rightarrow a} \text{Diff}_{f,a}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existiert

Wir nennen dann  $f'(a) := \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  die **Ableitung** von  $f$  in  $a$ .

(b)  $f$  heißt **differenzierbar auf  $U$**

$\Leftrightarrow f$  ist differenzierbar in  $a \quad \forall a \in U$

Insbesondere muß dann jedes  $a \in U$  ein HP von  $U$  sein.

Wir nennen dann  $f': U \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$  die **Ableitung** von  $f$ .

Bem. 17.4:

$S_{f,a,b}$  = Sekante im Graph( $f$ ) durch  $a$  &  $b$

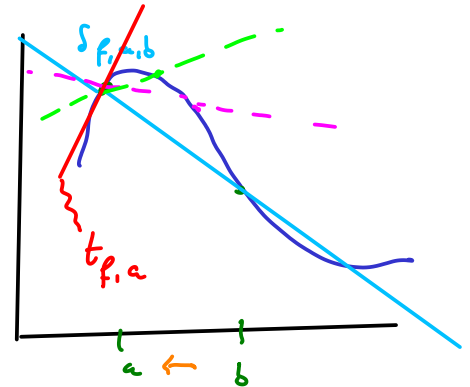
hat die Geradengleichung:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\downarrow b \rightarrow a$$

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Gleichung der **Tangente**  $\wedge$  im Graph( $f$ ) im Punkt  $(a, f(a))$



Bsp. 17.5:

(a) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto c$ ,  $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f,a}(x) = \frac{c - c}{x - a} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$\Rightarrow f$  ist diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 0$

(b)  $S := u \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^u, a \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow D: \text{D.} \text{ff}_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{u-1} a^k \cdot x^{u-1-k} \xrightarrow{x \rightarrow a} u \cdot a^{u-1}$$

$$\downarrow x \rightarrow a$$

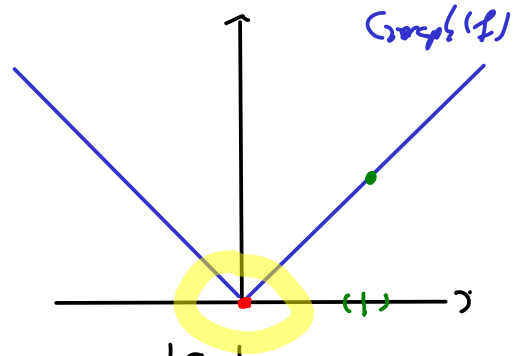
$$a^k \cdot a^{u-1-k} = a^{u-1}$$

$\Rightarrow f$  ist diff-bar auf  $\mathbb{R}$  mit  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto u \cdot x^{u-1}$

(c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$

Beh:  $f$  ist in  $a=0$  **wicht** diff-bar!

Betrachte  $(a_n)_{n \geq 1} = \left( \frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \geq 1}$



$$\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ und } \text{D.} \text{ff}_{f,0}(a_n) = \frac{|a_n|}{a_n} = (-1)^n$$

Konvergenz **wicht** für  $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \text{D.} \text{ff}_{f,0}(x) \text{ existiert } \text{wicht}$$

$$\Rightarrow f \text{ wicht diff-bar in } a=0$$

Beh:  $a \neq 0 \Rightarrow f$  diff-bar in  $a$  mit  $f'(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$

Bem. 17.6:

(a) Diff-barkeit ist eine **lokale Eigenschaft**, d.h. ob  $f$  diff-bar in  $a$  ist, hängt nur vom Verhalten von  $f$  in einer sehr kleinen Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  ab!

(b)  $f$  ist **diff-bar in  $a$**

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existiert}$$

$$= f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ und } g: U \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + g(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = 0$$

Dabei:  $f'(a) = c \wedge g(x) = (\text{D.} \text{ff}_{f,a}(x) - f'(a)) \cdot (x-a)$

## C) Differenzierbarkeit und Stetigkeit

### Satz 17.7

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$  diff. bar in  $a \Rightarrow f$  stetig in  $a$

Bew:

•  $f$  diff. bar in  $a \Rightarrow a$  ist ein HP von  $U$

• z.z.:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\downarrow x \rightarrow a} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\downarrow x \rightarrow a} + \underbrace{f(a)}_{\downarrow x \rightarrow a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$
$$f'(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{=0} + f(a) = f(a)$$

□

Bsp. 17.8:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$  ist stetig in  $a=0$ , nicht diff. bar in  $a=0$

D.h. die Umkehrung von 17.7 ist falsch!

## D) Ableitungsregeln - Linearität, Produkt- und Quotientenregel

Prop. 17.9 (Linearität)

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  diff. bar in  $a \in U$ , und  $c, d \in \mathbb{R}$ .

Dann:  $c \cdot f + d \cdot g$  ist diff. bar in  $a$  mit  $(c \cdot f + d \cdot g)'(a) = c \cdot f'(a) + d \cdot g'(a)$ .

Beweis:

$$\text{Diff}_{c \cdot f + d \cdot g, a}^{(x)} = \frac{(c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) - (c \cdot f(a) + d \cdot g(a))}{x - a}$$

$$= c \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\downarrow x \rightarrow a} + d \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\downarrow x \rightarrow a} \xrightarrow{x \rightarrow a} c \cdot f'(a) + d \cdot g'(a)$$

□

Bsp. 17.10:

$$\text{Sei } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k.$$

$\Rightarrow f$  ist diff. bar auf  $\mathbb{R}$  mit  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$   
17.9 + 17.5

Prop. 17.11 (Produktregel)

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  diff. bar in  $a \in U$ .

Dann:  $f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{R}$  ist diff. bar in  $a$  mit  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ .

Beweis:

$$\text{Diff}_{f \cdot g, a}^{(x)} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$\downarrow x \rightarrow a$       $\downarrow x \rightarrow a$       $\downarrow x \rightarrow a$       $\downarrow x \rightarrow a$

$$f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

weil  $g$  stetig in  $a$  nach 17.7

Prop. 17.12 (Quotientenregel)

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  diff. bar in  $a \in U$  mit  $g(a) \neq 0$ .

Dann:  $\frac{f}{g}: U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist diff. bar in  $a$

$$\text{mit } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Bew:

Zu zeigen:

$a$  ist HP von  $V := U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\}$   $\overset{!}{\iff} a \in U$   
 $a$  ist HP von  $U$  und  $g$  ist stetig in  $a$  (nach 17.7)  $g(a) \neq 0$

$\implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0 \xrightarrow{13.10d} a$  ist HP von  $V$ .

Dazu:

$$\text{Diff}_{\frac{1}{g}, a}(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a)}}{x - a}$$

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(a)} \cdot \left( - \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \xrightarrow{17.7} - \frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Rest folgt aus 17.11 erweitert auf  $f \cdot \frac{1}{g}$ . □

Bsp. 17.13

Jede rationale Fkt.  $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist diff. bzw.

z.B.:  $h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \geq 1$

$\implies h$  ist diff. bzw. auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{mit } h'(x) = - \frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = - \frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = - \frac{n}{x^{n+1}} = -n x^{-n-1}$$

# E) Ableitungsregeln - Ableitung der Umkehrfunktion + Kettenregel

## Satz 17.14 (Ableitung der Umkehrfkt.)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton.

Wenn  $f$  in  $a \in I$  diff. bar ist mit  $f'(a) \neq 0$ , dann ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{ diff. bar in } b = f(a) \text{ mit } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Bew:

17.21  $\Rightarrow f(I)$  ist ein Intervall &  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  stetig & bijektiv

Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $f(I) \setminus \{b\}$  mit  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ .

$$\Rightarrow x_n := f^{-1}(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge in  $I \setminus \{a\}$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f,a}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} \text{Diff}_{f,a}(x) = f'(a)$$

Wie  $f^{-1}$  bijektiv &  $y_n \neq b$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f^{-1},b}(y_n) = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\text{Diff}_{f,a}(x_n)}$$

$$\stackrel{17.7}{\Rightarrow} \exists \lim_{y \rightarrow b} \text{Diff}_{f^{-1},b}(y) = \frac{1}{f'(a)}$$

[3]

Bsp. 17.15:  $n \geq 2$

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty): x \mapsto x^n$  ist str. monoton wachsend, stetig

und diff. bar auf  $[0, \infty)$  mit  $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \neq 0 \forall x \in (0, \infty)$

$\stackrel{17.14}{\Rightarrow} \sqrt[n]{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty): y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$  diff. bar in  $y \forall y \in (0, \infty)$

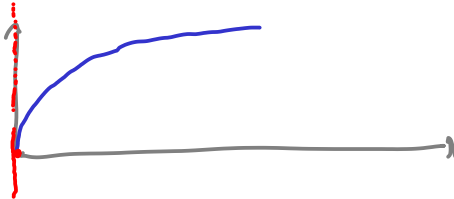
$$\text{mit } (\sqrt[n]{\cdot})': (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \frac{1}{f'(\sqrt[n]{y})} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot y^{\frac{n-1}{n}}} \\ = \frac{1}{n \cdot y^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

Bemerkung:  $\sqrt[n]{\cdot}$  ist nicht diffbar in  $a=0$ !

dazu:  $a_k = \frac{1}{k^n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

aber:  $D:ff_{y,0}(a_k) = \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{k^n}} - 0}{\frac{1}{k^n} - 0} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^n}} = k^{n-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} D:ff_{y,0}(x) \Rightarrow \sqrt[n]{\cdot}$  nicht diffbar in 0



Insbesondere:  $n=2$

$\sqrt{\cdot}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist diffbar auf  $(0, \infty)$

mit  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Prop. 17.16 (Kettenregel)

Seien  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $J_n(f) \subseteq V$  und  $a \in U$ .

Wenn  $f$  diffbar in  $a$  und  $g$  diffbar in  $f(a)$ , dann

$g \circ f$  ist diffbar in  $a$  mit  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

äußere Ableitung  $\times$  innere Ableitung

Beweis:

Satz:  $h: V \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto \begin{cases} D:ff_{g, f(a)}(y) = \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}, & y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & , y = f(a) \end{cases}$

$\Rightarrow$   $g$  diffbar in  $f(a)$   $\left. \begin{array}{l} h(y) \xrightarrow{y \rightarrow f(a)} g'(f(a)) = h(f(a)) \\ \text{d.h. } h \text{ ist stetig in } f(a) \end{array} \right\} (*)$

Zudem:  $\forall y \in V$  :  $h(y) \cdot (y - f(a)) = g(y) - g(f(a))$  (\*\*)

$\Rightarrow$  Diff  $g \circ f, a$  (x) =  $\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{h(f(x)) \cdot (f(x) - f(a))}{x - a}$

(\*\*)  
↑  
g = f(a)

=  $h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} h(f(a)) \cdot f'(a)$

$\downarrow x \rightarrow a$   
 $f(a)$   
 weil f stetig in a nach 17.7  
 $\downarrow x \rightarrow a$   
 $h(f(a))$   
 wegen (\*)

$\downarrow x \rightarrow a$   
 $f'(a)$

$\parallel$   
 $g'(f(a)) \cdot f'(a)$

□

Bsp. 17.17

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

$\Rightarrow h = g \circ f$  mit  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$   
 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto x^2 + 1$

$\Rightarrow$  17.16  $h$  ist diff. bar auf  $\mathbb{R}$  mit

$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

□



# F) Stetige Differenzierbarkeit

Def. 17.18: Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

①  $f$  heißt **stetig differenzierbar**  $\Leftrightarrow f$  ist diff.-bar auf  $U$  &  $f'$  ist stetig auf  $U$ .

② Wir definieren  **$k$ -fache Differenzierbarkeit rekursiv:**

•  $f^{(0)} := f$

• Für  $k \geq 1$ :  $f$  heißt  **$k$ -fach differenzierbar**  $\Leftrightarrow f^{(k-1)}$  ist diff.-bar

•  $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$

Notation:  $f'' := f^{(2)}$ ,  $f''' := f^{(3)}$

③  $f$  heißt  **$k$ -fach stetig differenzierbar**  $\Leftrightarrow f$   $k$ -fach diff.-bar und  $f^{(k)}$  stetig auf  $U$

Notation:  $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } k\text{-fach stetig diff.-bar}\}$

④  $f$  heißt  **$\infty$ -oft differenzierbar**  $\Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) \quad \forall k \geq 1$

Notation:  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$

Bsp. 17.19:

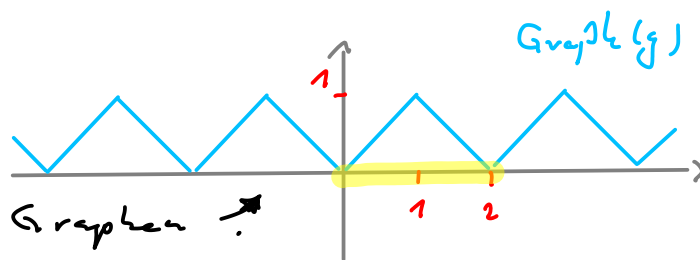
①  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

ist differenzierbar, aber  $f'$  ist in  $x=0$  **nicht** stetig!

② Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind  $\infty$ -oft diff.-bar, da die Ableitungen wieder Polynomfkt. oder rationale Fkt. sind!

Bem. 17.20

Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die periodische Fkt. mit folgendem Graphen  $\rightarrow$



$\Rightarrow g$  ist stetig,  $g$  nur in  $x \in \mathbb{Z}$  nicht diff.-bar

Definition:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(2^n \cdot x)}{2^n}$

$\Rightarrow f$  ist **stetig**, aber  $f$  ist **nirgendwo diff-bar**

Wie sieht man die Stetigkeit?

Satz:  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{g(2^k \cdot x)}{2^k}$

ist stetig als Summe stetiger Funktionen

Klar,  $f_n \rightarrow f$  punktweise auf  $\mathbb{R}$ .

Z.z.:  $f_n \rightarrow f$  glm. auf  $\mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g(2^k \cdot x)}{2^k} \leq 1$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

unabh. von  $x!$   $\downarrow$   
 $\infty$   
 $0$

Also:  $f$  ist als glm. GL von stetigen Fkt. stetig!

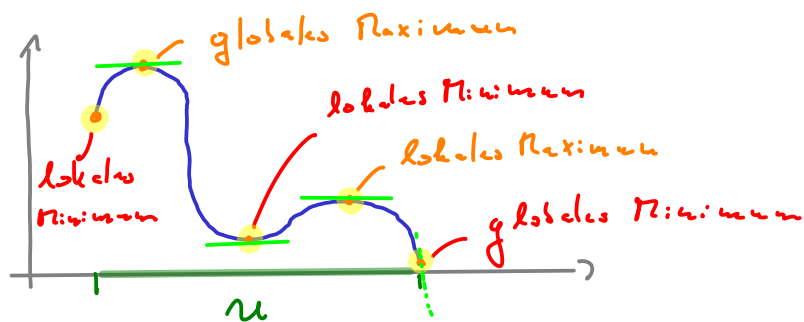
# § 18 Der Mittelwertsatz und seine Anwendungen

## A) Notwendige Bedingung für Extremstellen

### Def. 18.1

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in U$ .

- Ⓐ  $f$  hat in  $a$  ein **globales Maximum**  $\Leftrightarrow \forall x \in U : f(x) \leq f(a)$
- Ⓑ  $f$  hat in  $a$  ein **lokales Maximum**  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in U \cap U_\delta(a) : f(x) \leq f(a)$
- Ⓒ  $f$  hat in  $a$  ein **globales Minimum**  $\Leftrightarrow \forall x \in U : f(x) \geq f(a)$
- Ⓓ  $f$  hat in  $a$  ein **lokales Minimum**  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in U \cap U_\delta(a) : f(x) \geq f(a)$
- Ⓔ  $a$  heißt **Extremstelle** und  $f(a)$  **Extremum** von  $f$   
 $\Leftrightarrow f$  hat in  $a$  ein **lokales Maximum** oder **Minimum**



### Prop. 18.2 (Notwendiges Kriterium für Extremstellen)

Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f$  sei **diffbar** in  $c \in (a, b)$ .

Wenn  $f$  in  $c$  eine **Extremstelle** hat, dann gilt:  **$f'(c) = 0$** .

### Beweis:

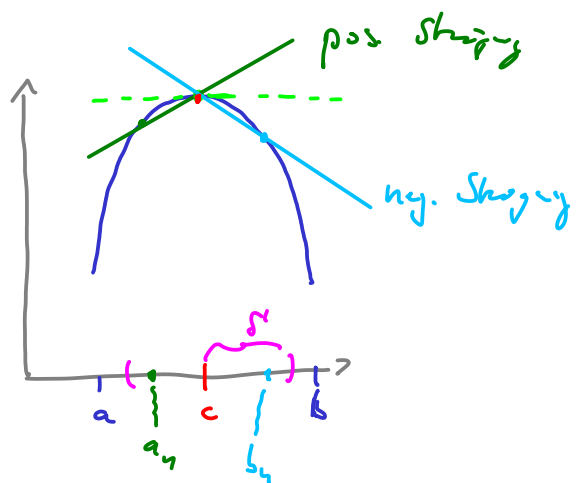
1. Fall:  $f$  hat in  $c$  ein **lok. Max.**

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in (a, b) \cap U_\delta(c) : f(x) \leq f(c)$$

$$\text{Setze: } \delta' := \min\{\delta, c-a, b-c\} > 0$$

$$\Rightarrow U_{\delta'}(c) = (c-\delta', c+\delta') \subseteq (a, b) \cap U_\delta(c)$$

$$\text{Für } n \geq 2 \text{ setze: } a_n := c - \frac{\delta'}{n} \in U_{\delta'}(c), \quad b_n := c + \frac{\delta'}{n} \in U_{\delta'}(c)$$



$$\Rightarrow \underbrace{0 \leq \frac{\overbrace{f(a_n) - f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{a_n - c}_{< 0}}}_{\text{yellow}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} f'(c) \Rightarrow 0 \leq f'(c)$$

$$\underbrace{0 \geq \frac{\overbrace{f(b_n) - f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{b_n - c}_{> 0}}}_{\text{yellow}} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} f'(c) \Rightarrow 0 \geq f'(c)$$

$f'(c) = 0$

2. Fall:  $f$  hat lok. Min. in  $c$

$\Rightarrow -f$  " " Max. in  $c$

$$\Rightarrow 0 = (-f)'(c) = -(f'(c)) \Rightarrow f'(c) = 0 \quad (3)$$

Bsp. 12.3:

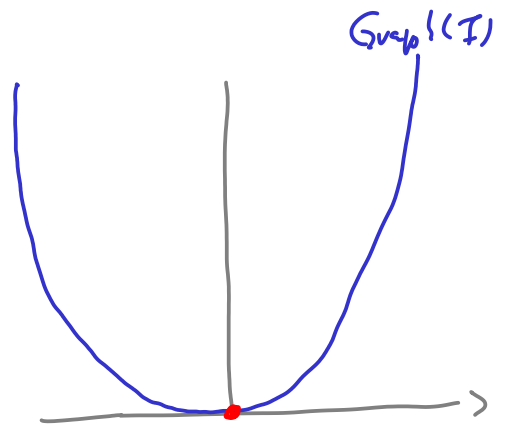
(a)  $n \geq 2$  und  $n$  gerade:

$$\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^n$$

$\Rightarrow f$  hat in  $0$  globales Minimum,

$$\text{weil } f(x) = x^n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{und } f(0) = 0$$



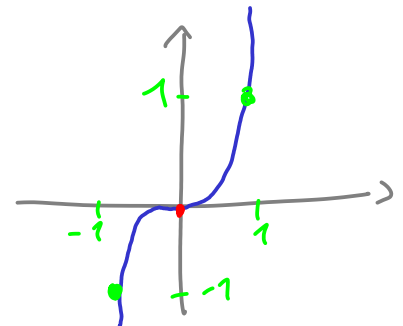
$$\text{Zudem: } f'(x) = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow f'(0) = 0$$

(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3$

$\Rightarrow f$  hat in  $x=0$  keine Extremstelle,

$$\text{weil: } x^3 = f(x) < 0 \quad \forall x < 0 \quad \text{und}$$

$$x^3 = f(x) > 0 \quad \forall x > 0$$



ABER:  $f'(x) = 3 \cdot x^2 \stackrel{f(0)}{\Rightarrow} f'(0) = 0$ , d.h.  $f' = 0$  ist kein hinreichendes Kriterium für Extremstelle!

## Bem. 18.4:

Auch wenn  $f$  auf  $[a, b]$  definiert und in  $a$  &  $b$  diffbar ist, macht 18.2 keine Aussage für  $c=a$  oder  $c=b$ .

Denn:  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

$\Rightarrow f$  hat in  $x=-1$  ein lok. Minimum &  
 $f$  " "  $x=1$  " " Maximum,

Denn:  $1 = f(1) \geq x^3 \geq f(-1) = -1$   
 $\forall x \in [-1, 1]$

Aber:  $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3 \neq 0 \neq 3 = f'(-1)$

## B) Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz

### Satz von Rolle 18.5

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und diffbar auf  $(a, b)$  mit  $a < b$ .

Wenn  $f(a) = f(b)$ , dann:  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

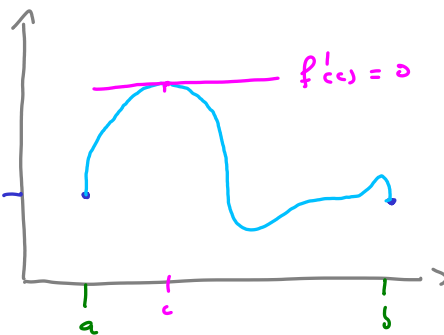
### Beweis:

1. Fall:  $f = \text{konstant}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow$  jedes  $c$  in  $(a, b)$  tut's ✓

$f(a) = f(b)$



2. Fall:  $f$  nicht konstant  $\Rightarrow \exists y \in (a, b) : f(y) \neq f(a) = f(b)$

Fall 2.1:  $f(y) > f(a) = f(b)$

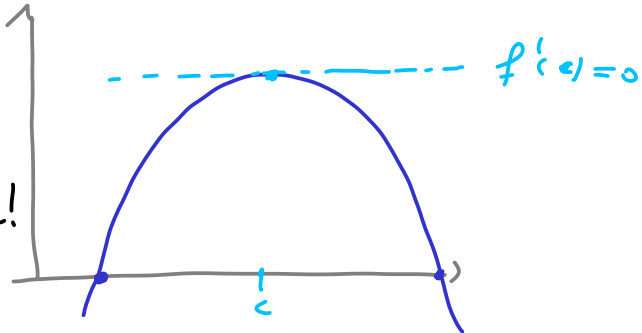
$f$  stetig auf  $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(c) \Rightarrow c \in (a, b)$   
17.16  $\Rightarrow f'(c) = 0$   
18.2

Fall 2.2:  $f(y) < f(a) = f(b)$ . analog.

□

Bem. 18.6:

Σine diff. bar Fkt. hat zw. ischen  
je zwei Nullstellen stets ein Extremum!



Mittelwertsatz 18.7

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und diff. bar auf  $(a, b)$  mit  $a < b$ .

Dann:  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Beweis:

Setze:  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$

$\Rightarrow g$  ist stetig auf  $[a, b]$  und diff. bar auf  $(a, b)$

mit  $g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a)$

$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$

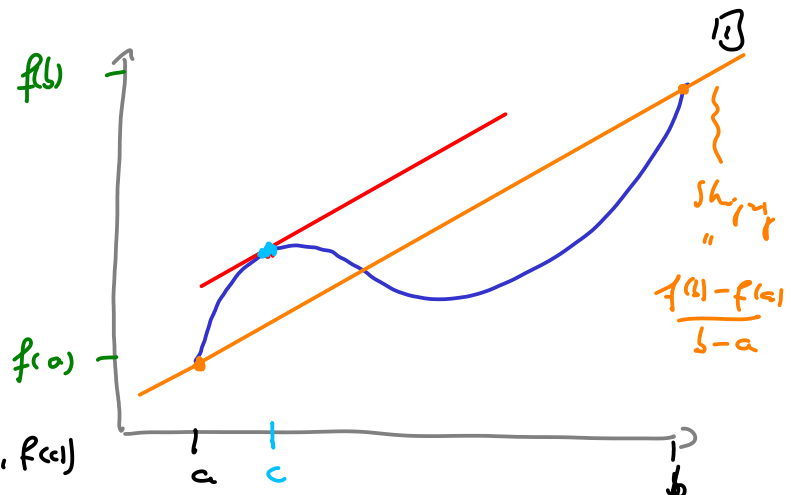
$\stackrel{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in (a, b) : 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Bem. 18.8:

MWS  $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$

s.d. Steigung der Sekante  
durch  $(a, f(a))$  &  $(b, f(b))$

$\hat{=}$  Steigung der Tangente in  $(c, f(c))$



Bsp. 18.11:

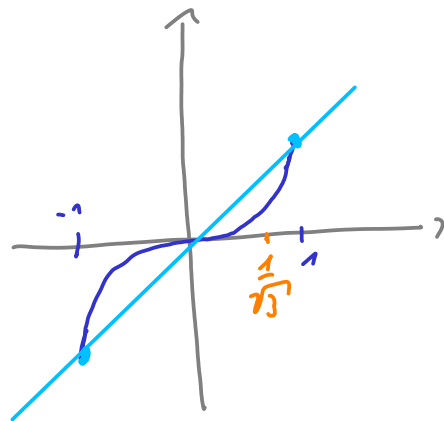
$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

ist stetig & diffbar auf  $[-1, 1]$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 \stackrel{!}{=} \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Kor. 18.10 (Allgemein RLWS Lw Differentialrechnung)

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und diffbar auf  $(a, b)$  mit  $a < b$ .

Dann:  $\exists c \in (a, b) : f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$ .

Beweis:

Satz 2.2  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a))$

$\Rightarrow h$  stetig auf  $[a, b]$  und diffbar auf  $(a, b)$

$$\text{mit } h(a) = f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a) = h(b)$$

$$\stackrel{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in (a, b) : 0 = h'(c) = f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) \quad \square$$

## C) Anwendungen des Mittelwertsatzes

### C.1) Konstante Funktionen

Prop. 18.11 (Kriterium für Konstanzheit)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und diffbar auf  $(a, b)$  mit  $a < b$ .

Wenn  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , dann ist  $f$  konstant auf  $[a, b]$ .

Beweis: Sei  $x \in (a, b]$  fest.

$\Rightarrow f|_{[a, x]}$  ist stetig auf  $[a, x]$  und diffbar auf  $(a, x)$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists c \in (a, x) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$$

□

### C.2) Monotonie und Ableitung

Prop. 18.12: (Kriterium für Monotonie)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und diffbar auf  $(a, b)$  mit  $a < b$ .

(a)  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  ist streng monoton wachsend auf  $[a, b]$ .

(b)  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  ist streng monoton fallend auf  $[a, b]$ .

Beweis:

(a) Seien  $x, y \in [a, b]$  mit  $x < y$ .

$\Rightarrow f|_{[x, y]}$  ist stetig auf  $[x, y]$  und diffbar auf  $(x, y)$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists c \in (x, y) : f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{> 0} \cdot \underbrace{(y - x)}_{> 0} > 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$$

$\Rightarrow f$  ist streng monoton wachsend auf  $[a, b]$ .

(b) analog.

□



Bsp. 18.13: Sei  $n \geq 1$

$\Rightarrow f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^n$  ist streng monoton wachsend!

Zeige dies wieder mit Hilfe von 18.12:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} > 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$\Rightarrow$   $f$  ist str. monoton wachsend auf  $[0, b]$   $\forall b > 0$   
18.12

$\Rightarrow$   $f$  " " " " "  $[0, \infty)$

□

### C.3) Hinreichendes Kriterium für Extremstellen

Prop. 18.14 (Hinreichendes Kriterium für Extremstellen)

Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  2-fach diff. bar und sei  $c \in (a, b)$ .

Ⓐ  $f'(c) = 0$  und  $f''(c) < 0 \Rightarrow f$  hat ein lokales Maximum in  $c$

Ⓑ  $f'(c) = 0$  und  $f''(c) > 0 \Rightarrow f$  hat ein lokales Minimum in  $c$

Beweis:

Ⓑ Vor.  $\Rightarrow 0 < f''(c) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - \overset{=0}{f'(c)}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c}$

Sei  $\varepsilon := \frac{f''(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x \in (a, b)$  mit  $|x - c| < \delta_\varepsilon$

gilt:  $\left| \frac{f'(x)}{x - c} - f''(c) \right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{f''(c)}{2} = -\varepsilon < \frac{f'(x)}{x - c} - f''(c) < \varepsilon = \frac{f''(c)}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{x - c} > -\frac{f''(c)}{2} + f''(c) = \frac{f''(c)}{2} > 0 \quad (*)$$

O.E.:  $\delta_\varepsilon$  so klein, dass:  $(c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon) \not\equiv (a, b)$

$$\text{Si: } x \in (c - \delta_\varepsilon, c) \Rightarrow x - c < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \cdot (x - c) = 0$$

⊗

⇒ f ist auf  $[c - \delta_\varepsilon, c]$  streng monoton fallend

$$\text{Si: } x \in (c, c + \delta_\varepsilon) \Rightarrow x - c > 0$$

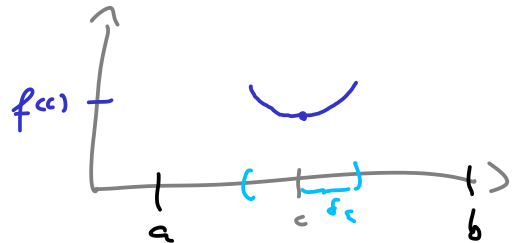
$$\Rightarrow f'(x) > 0 \cdot (x - c) = 0$$

⊗

⇒ f ist auf  $[c, c + \delta_\varepsilon]$  streng monoton wachsend

$$\text{Also: } f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in [c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon]$$

⇒ f hat in c ein lokales Minimum.



ⓐ analog.

ⓑ

Bsp. 18.15:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \stackrel{!}{=} 0$$

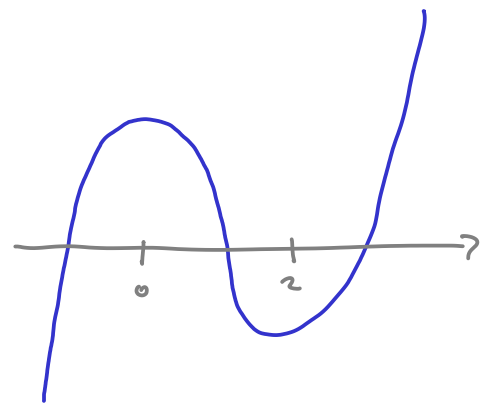
$$3 \cdot (x - 2) \cdot x$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2$$

$$\text{Zudem: } f''(x) = 6x - 6$$

$$\Rightarrow \cdot f(0) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ hat lok. Maximum in } 0$$

$$\cdot f(2) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ " " Minimum in } 2$$



Bem. 18.17

$f'(c) = 0$  und  $f'$  hat in c Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow$  f hat in c eine Extremstelle

# C.4) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung

Satz 18.17

Sei  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diffbar,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $f_n \xrightarrow{u \rightarrow \infty} f$  punktweise  
 und  $f_n' \xrightarrow{u \rightarrow \infty} g$  gleichmäßig, dann ist  $f$  stetig diffbar mit  $f' = g$ .

Beweis:

Behauptung:  $f_n$  stetig diffbar &  $f_n' \xrightarrow{g.l.m.} g \xRightarrow{15.6} g$  stetig

Sei  $c \in [a, b]$ .

Zielformel:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g(c)$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

Z.z.:  $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in [a, b]$  mit  $0 < |x - c| < \delta_\varepsilon$  gilt:  $\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right|$$

Behauptung:  $g$  ist in  $c$

$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in [a, b]$  mit  $|x - c| < \delta_\varepsilon$  gilt:  $\underbrace{|g(x) - g(c)|}_{**} < \frac{\varepsilon}{2}$

Behauptung:  $f_n' \xrightarrow{g.l.m.} g$  auf  $[a, b]$

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon$  und  $\forall x \in [a, b]$ :  $\underbrace{\left| f_n'(x) - g(x) \right|}_{***} < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei nun  $x \in [a, b]$  mit  $0 < |x - c| < \delta_\varepsilon$  und  $n \geq n_\varepsilon$ .

$\xrightarrow{18.7}$   $\exists y$  zwischen  $x$  und  $c$  mit  $\frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = f_n'(y)$  (\*)

$\Rightarrow |y - c| \leq |x - c| < \delta_\varepsilon$

$$\text{Damit: } \left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} - g(c) \right| \stackrel{(*)}{=} \left| f_n'(y) - g(c) \right| =$$

$$= \left| f_n'(y) - g(y) + g(y) - g(c) \right| \leq \underbrace{\left| f_n'(y) - g(y) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\left| g(y) - g(c) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} - g(c) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} - g(c) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Also,  $f$  ist diff. bar in  $c$  mit  $f'(c) = g(c)$   
 $\Rightarrow f' = g \Rightarrow f$  ist stetig d. ff. bar auf  $[a, b]$ . □

Bem. 18.19:

① 18.17  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n')'(c) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'(c)$   
 d.h. Ableitung und GW vertauschen

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}$$

d.h. 2 GW vertauschen !!!

② Man kann in 17.27 auf die Stetigkeit der  $f_n'$  verzichten!  
 (denn ist  $f'$  evtl. nicht vorher stetig).

③ In 18.27 fordert man nur punktw. Konvergenz der  $f_n$ ,  
 aber man kann zeigen, daß die  $f_n$  unter der Voraussetzung  
 von 18.27 immer gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren!

# C.5) Ableitung von Potenzreihen

Kor. 18.19

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$  eine Potenzreihe über  $\mathbb{R}$  mit Konvergenzradius  $r > 0$ .

Dann ist  $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  diff. bar auf  $(-r, r)$

mit  $f': (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ .

Beweis:

ÜA (12.45)  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$  &  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$  haben beide die KR  $r$

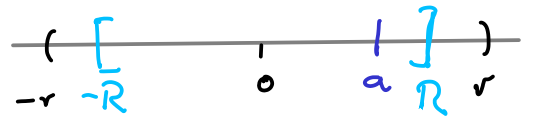
$\Rightarrow$  15.7  $g: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$  ist stetig auf  $(-r, r)$

Sei  $a \in (-r, r)$ .

Z.z.  $f$  diff. bar in  $a$  mit  $f'(a) = g(a)$

Setze  $R := \frac{r+|a|}{2} < r$

$\Rightarrow a \in [-R, R]$



$\Rightarrow f_n: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$  ist stetig diff. bar auf  $[-R, R]$

und  $f_n'(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot x^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)$

und  $f_n' \rightarrow g$  glw. auf  $[-R, R]$

und  $f_n \rightarrow f$  glw. auf  $[-R, R]$

$\Rightarrow$  18.7  $f$  ist diff. bar auf  $[-R, R]$ , also auch in  $a$ ,

mit  $f'(a) = g(a)$

□

Kor. 18.20:

Ein durch eine Potenzreihe definierte Funkt. ist  $\infty$  oft diff. bar!

# C.6) Ableitungen spezieller Funktionen

Kor. 18.21

- (a)  $\exp$  ist unendlich oft diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $\exp'(x) = \exp(x)$ .  
 (b)  $\sin$  ist unendlich oft diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $\sin'(x) = \cos(x)$ .  
 (c)  $\cos$  ist unendlich oft diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $\cos'(x) = -\sin(x)$ .  
 (d)  $\exp_a$  ist stetig diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .  
 (e)  $\log_a$  ist stetig diffbar auf  $(0, \infty)$  mit  $\log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ ,  $1 \neq a \in \mathbb{R}_{>0}$ .  
 Insbesondere:  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .  
 (f)  $\tan$  ist stetig diffbar auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  mit  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ .  
 (g)  $\cot$  ist stetig diffbar auf  $(0, \pi)$  mit  $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ .  
 (h)  $\arctan$  ist stetig diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .  
 (i)  $\operatorname{arccot}$  ist stetig diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .  
 (j)  $\operatorname{arcsin}$  ist stetig diffbar auf  $(-1, 1)$  mit  $\operatorname{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .  
 (k)  $\operatorname{arccos}$  ist stetig diffbar auf  $(-1, 1)$  mit  $\operatorname{arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Bew:

(a) 18.19 + 18.20  $\Rightarrow \exp$  ist  $\infty$  oft diffbar auf  $\mathbb{R}$   
 mit  $\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$

(b) 18.19 + 18.20  $\Rightarrow \sin$  ist  $\infty$  oft diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  
 $\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{x^{2n+1-1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$

(c) 18.19 + 18.20  $\Rightarrow \cos$  ist  $\infty$  oft diffbar auf  $\mathbb{R}$  mit  
 $\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$

(d)  $\exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$  ist wegen  $\ln \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$  diffbar auf  $\mathbb{R}$   
 mit  $\exp_a'(x) = \exp'(x \cdot \ln(a)) \cdot (x \cdot \ln(a))' = \ln(a) \cdot \exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \exp_a'(x) = \ln(a)$  ist ebenfalls stetig

(e) Beachte:  $\exp'_a(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$  17.14  $\log_a$  ist diff-bar auf  $(0, \infty)$  mit

$$\log'_a(x) = \frac{1}{\exp'_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \exp_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

Zudem:  $\log'_e$  ist stetig auf  $(0, \infty)$

Falls:  $a = e \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{\ln(e) \cdot x} = \frac{1}{x}$

(f)  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$  ist diff-bar auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  wegen QR mit

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

"  $1 + \tan^2(x)$

Zudem:  $\tan'$  stetig auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(g) Analog für  $\cot$ !

(h) Beachte:  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$  17.14  $\arctan$  ist diff-bar auf  $\mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} + 1} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\arctan(x)) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Zudem:  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan'$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$

(i) analog für  $\operatorname{arccot}$ !

(j) Beweis:  $\sin^{-1}(x) = \cos(x) > 0$  für  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$  arcsin ist d. f. s. ev auf  $\sin(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (-1, 1)$   
17.14

mit  $\arcsin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin^{-1}(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Zusatz:  $\arcsin^{-1}$  ist offenbar stetig auf  $(-1, 1)$

(k) Analog für arccos!

Bem. 17.22:

Man kann mit Zhl. leicht zeigen, daß alle Fkt. in 17.21  
 $\infty$  oft diffbar sind.

Bsp. 17.23

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$ .

Zeige:  $f$  ist  $\infty$  oft diffbar auf  $(0, \infty)$  mit  $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

Beweis:

KR  $\Rightarrow$   $f$  ist diffbar auf  $(0, \infty)$  mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'(a \cdot \ln(x)) \cdot (a \cdot \ln(x))' = \exp(a \cdot \ln(x)) \cdot \frac{a}{x} \\ &= x^a \cdot a \cdot x^{-1} = a \cdot x^{a-1} \end{aligned}$$

Da  $f'$  wieder vom selben Typ ist, folgt mit Zhl., daß  $f$   
 $\infty$  oft diffbar ist. 13



# C.7) Die Regeln von de l'Hôpital

Bem. 18.24

Grenzwertsätze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\cos(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{0}{1}}{\frac{1}{1}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2(x)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\exp(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ABER:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \stackrel{?}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}} = \frac{0}{0} ?$   $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{?}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = \frac{\infty}{\infty} ?$

## Satz 18.25 (Regeln von de l'Hôpital)

Seien  $a, b \in [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  mit  $a < b$ , sei  $c \in (a, b)$

und  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diff. bar.

Zudem sei  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  und  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty]$  existieren.

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{a} \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \\ \text{oder} \\ \textcircled{b} \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis:

Wir zeigen die Aussage nur für den Fall:

$$c \in \mathbb{R} \text{ und } k := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$$

(D.: Fälle  $c \in \{-\infty, \infty\}$  und  $k \in \{-\infty, \infty\}$  gehen selbsterhellend!)

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Z.z.:  $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \underset{c}{x} \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$

$$\text{Vor.} \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow c} k$$

$$\Rightarrow \exists \delta_{\frac{\epsilon}{2}} > 0 : \forall z \in (a,b) \text{ mit } 0 < |z-c| < \delta_{\frac{\epsilon}{2}} \text{ gilt: } \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - k \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Seien } c \neq x, y \in (a,b) \cap (c - \delta_{\frac{\epsilon}{2}}, c + \delta_{\frac{\epsilon}{2}})$$

$$\stackrel{\text{M. 10}}{\Rightarrow} \text{Anw.} \quad \exists z \text{ zwischen } x \text{ \& } y \text{ mit } f'(z) \cdot (g(x) - g(y)) = g'(z) \cdot (f(x) - f(y))$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad \text{und} \quad z \in (a,b) \cap (c - \delta_{\frac{\epsilon}{2}}, c + \delta_{\frac{\epsilon}{2}})$$

$\neq$   
 Anz. "0"  $\Rightarrow$  falls  
 $x \neq y$  mit  $g'(a) = 0$

$$\text{Zu (a):} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\text{1. Fall: } c \in (a,b) \xRightarrow{f, g \text{ stetig in } c} f(c) = 0 = g(c)$$

$$\text{2. Fall: } c \notin (a,b) \Rightarrow c \in \{a, b\} \Rightarrow f \text{ \& } g \text{ in } c \text{ stetig fortsetzbar durch } f(c) = g(c) = 0$$

Also: o.F.  $f \text{ \& } g$  in  $c$  stetig mit  $f(c) = g(c) = 0$ !

$$\text{Setzen: } \delta_{\epsilon} := \delta_{\frac{\epsilon}{2}} > 0 \text{ und } c \neq x, y \in (a,b) \cap (c - \delta_{\epsilon}, c + \delta_{\epsilon})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k \right| = \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - k \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| = \left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - k \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \text{Also: } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Zu (b): Sei  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$ .

1. Fall:  $f \equiv 0$  in einer kleinen Umgebung von  $c \Rightarrow f' \equiv 0$  nahe bei  $c$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{0}{\pm \infty} = 0 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

2. Fall:  $f \not\equiv 0$  in der Nähe von  $c$  (und  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$ )

$$\Rightarrow \exists y \in (a, b) \cap (c - \delta_{\frac{\epsilon}{2}}, c + \delta_{\frac{\epsilon}{2}}) : f(y) \neq 0 \neq g(y)$$

$$\text{Ausatz: } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x)} - l \right| =$$

$$= \left| \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} - l \right|$$

$$= \left| \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} - l \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{f(y)}{g(x)} \right|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right|}_{\leq 5} \cdot \underbrace{\left| \frac{g(y)}{g(x)} \right|}_{< \frac{\epsilon}{4 \cdot 5}} + \underbrace{\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l \right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad (***)$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \delta_{\frac{\epsilon}{4}} > 0 : \forall x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_{\frac{\epsilon}{4}} \text{ gilt } \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{\epsilon}{4 \cdot |f(y)|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

\textcircled{2} Für  $0 \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta_{\frac{\epsilon}{2}}, c + \delta_{\frac{\epsilon}{2}})$  gilt:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| = \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l + l \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l \right| + |l| = \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - l \right| + |l| < \frac{\epsilon}{2} + |l| \quad (***)$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon''' > 0; \forall x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\varepsilon''' \text{ gilt, } \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 5 \cdot |g(y)|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 5}$$

$$\textcircled{4} \text{ Für } c \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta_\varepsilon', c + \delta_\varepsilon') \text{ gilt,}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - h \right| = \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - h \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underline{\text{Satz:}} \quad \delta_\varepsilon := \min \left\{ \delta_\varepsilon', \delta_\varepsilon'', \delta_\varepsilon''', |g - c| \right\} > 0$$

$$\text{Für } x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\varepsilon.$$

$$\underline{\text{Dann:}} \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - h \right| < \varepsilon \quad \text{wobei } \textcircled{**}$$

$$\underline{\text{Also:}} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = h$$

□

Bem. 18.26: (Vgl. wie in 18.25)

$g'$  stetig  $\Rightarrow g'$  stets positiv oder stets negativ

$\Rightarrow g$  ist streng monoton

Bsp. 18.27:

$\textcircled{a}$   $(a, b) = (0, \infty)$ ,  $c = 0$ ,  $f = \sin$ ,  $g = \sqrt{\cdot}$  differenz  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$   
 $\forall x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin'(x)}{\sqrt{x}'} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = \cos(0) \cdot 2 \cdot \sqrt{0} = 0$$

⑥  $(a, b) = (0, \infty)$ ,  $c = \infty$ ,  $f = \ln$ ,  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^a$ ,  $a \in \mathbb{R}_{>0}$   
 $f \approx g$  diffbar,  $g'(x) = a \cdot x^{a-1} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln'(x)}{(x^a)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{a \cdot x^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a \cdot x^a} = \frac{1}{\infty} = 0$$

## C.8) Wachstum der Exponentialfunktion

### Korollar 19.28

Sei  $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$  ein Polynom über  $\mathbb{R}$ .

Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = 0$ .

D.h. die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Polynomfunktion.

### Beweis

Bauk:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$  ist diffbar mit  $f'(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$   
 d.h.  $f'$  ist auch ein Polynomkt. mit  $\deg(f') = \deg(f) - 1$ .

Zuge mit Ind. nach  $n$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = 0$

$n=0$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0}{\exp(x)} \stackrel{\text{GWS}}{=} \frac{a_0}{\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)} = \frac{a_0}{\infty} = 0$

$n-1 \mapsto n$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} \stackrel{\text{K.25}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\exp'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\exp(x)} = 0$   
Ind.

# C.9) Der Satz von Taylor

Def. 18.29

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U \subseteq \mathbb{R}$ .

① Ist  $f$   $n$ -fach diff. bar in  $a$ , dann heißt  $T_{f,a}^n := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$  das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $a$ .

② Ist  $f$   $\infty$ -ft diff. bar in  $a$ , dann heißt  $T_{f,a} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$  die Taylorreihe von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $a$  oder die Taylor-Entwicklung von  $f$  in  $a$ .

Beachte:  $T_{f,a}^n(a) = T_{f,a}(a) = f(a)$ .

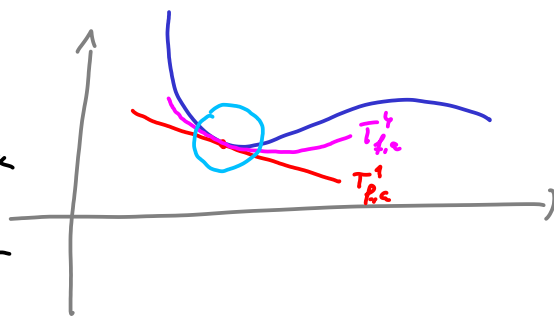
Bem. 18.30

$$T_{f,a}^1(x) = \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) \stackrel{!}{=} g$$

optimale lineare  
Approximation an  
 $f$  in  $(a, f(a))$

Gleichung der Tangente an den  
Graphen von  $f$  in  $(a, f(a))$

Zwei:  $T_{f,a}^n(x)$  ist eine Approximation  
von  $f(x)$  durch ein Polynom  
vom Grad  $n$



Hoffnung:  $T_{f,a}^n(x)$  approximiert  $f(x)$  nahe bei  $a$  besser als  $T_{f,a}^1$   
 $T_{f,a}^n(x)$  approximiert  $f(x)$  optimal, d.h.  $T_{f,a}^n(x) = f(x)$

Bsp. 18.31

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$  eine Potenzreihe über  $\mathbb{R}$  mit  $k \in \mathbb{R}$   $r > 0$ .

$\Rightarrow f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  ist  $\infty$  oft diff. bar

mit  $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

$$\Rightarrow T_{f,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \Rightarrow T_{f,0}(x) = f(x) \quad \forall x \in (-r, r)$$

Zudem:  $(T_{f,0}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $(-r, r)$  punktweise gegen  $f$   
und auf  $[-R, R] \subset (-r, r)$  sogar gleich!

Bsp. 18.32

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

Beh:  $f$  ist  $\infty$  oft diff. bar in  $a = 0$

mit  $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: ÜA.

Also:  $T_{f,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n = 0$  hat  $k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : T_{f,0}(x) = 0 \neq \exp(-\frac{1}{x^2}) = f(x)$$

Satz von Taylor 18.33

Sei  $I$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $n+1$ -fach diff. bar und  $x, a \in I$ .

Dann gibt es ein  $c$  zwischen  $a$  und  $x$ , so dass

$$f(x) - T_{f,a}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Restglied des  $n$ -ten Taylorpolynoms

Beweis: O.E:  $x > a$ .

Definition:  $z := \frac{(f(x) - T_{f,a}^n(x)) \cdot (n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \in \mathbb{R}$

und  $g: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\begin{aligned} g(y) &:= f(x) - T_{f,y}^n(x) - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \\ &= f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \end{aligned}$$

Vor  $\Rightarrow f$  ist  $(n+1)$ -fach diffbar auf  $I$ , also auch auf  $[a, x]$

$\Rightarrow g$  ist diffbar auf  $[a, x]$

$$\Rightarrow g'(y) = -f'(y) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - k \cdot \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^{k-1} \right) + \frac{z \cdot (n+1)}{(n+1)!} \cdot (x-y)^n$$

$$= -f'(y) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} \cdot (x-y)^{k-1} \right) + \frac{z}{n!} \cdot (x-y)^n$$

$$= -\cancel{f'(y)} + \cancel{f'(y)} - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n + \frac{z}{n!} \cdot (x-y)^n$$

$$= \frac{z}{n!} (x-y)^n - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n = \frac{z - f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n$$

Zurück:  $g(x) = \underbrace{f(x) - f(x)}_{=0} - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot \underbrace{(x-x)^k}_0 - \frac{z}{(n+1)!} \cdot \underbrace{(x-x)^{n+1}}_0 = 0$

$$g(a) = f(x) - T_{f,a}^n(x) - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} = 0$$

Def. von  $z$

$\Rightarrow$  Rolla  $\exists c \in (a, x) : 0 = g'(c) = \frac{z - f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot \underbrace{(x-c)^n}_{\neq 0}$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(c) = z \Rightarrow f(x) - T_{f,a}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \quad \square$$



Bsp. 19.34:

$$f = \exp, \quad a = 0, \quad x = 1$$

$$\Rightarrow T_{\exp, 0}^n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot (1-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \exists c \in (0, 1) : \left| \exp(x) - T_{\exp, 0}^n(x) \right| = \left| \frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} \right|$$

$$= \left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right|$$

$$\frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

$$n=6: \left| e - \frac{1957}{720} \right| < \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < \frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

d.h.  $e$  &  $\frac{1957}{720}$  stimmen zu bis zur 3. Nachkommastelle überein

$$\text{d.h. } e = 2,718 \dots$$

Bsp. 18.35:

$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\infty$  oft diffbar mit  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$\Rightarrow T_{\ln, 1}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$$

Sei  $x \in (1, 2]$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{\Rightarrow} \text{18.33} \quad \exists c \in (1, x) \subseteq (1, 2] : \left| \ln(x) - T_{\ln, 1}^n(x) \right| = \left| \frac{\ln^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-1)^{n+1} \right|$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{c^{n+1}} \cdot \underbrace{|x-1|^{n+1}}_{\leq 1}$$

$$\Rightarrow T_{\ln, 1}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \text{ glm. auf } [1, 2]$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$T_{\ln, 1} \text{ glm. auf } [1, 2]$$

$$\Rightarrow \ln(x) = T_{\ln, 1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

für alle  $x \in [1, 2]$

Später,  $\ln(x) = T_{\ln,1}(x) \quad \forall x \in (0, 2]$

Konkret:  $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2-1)^k}{k} = 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -\ln(2)$

(3)

### C.10) Allgemeiner Bedingung für Extremstellen

Satz 18.36

Sei  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$   $n+1$ -fach stetig diffbar,  $c \in (a,b)$  und  $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$  sowie  $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ .

(a)  $n$  gerade  $\Rightarrow f$  hat in  $c$  kein Extremum.

(b)  $n$  ungerade  $\wedge f^{(n+1)}(c) < 0 \Rightarrow f$  hat in  $c$  ein lokales Maximum.

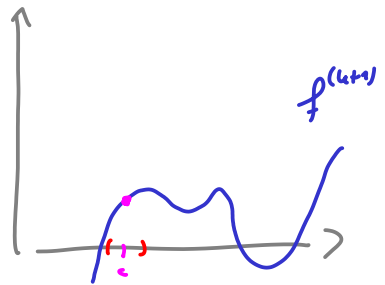
(c)  $n$  ungerade  $\wedge f^{(n+1)}(c) > 0 \Rightarrow f$  hat in  $c$  ein lokales Minimum.

Beweis: o.F.  $f^{(n+1)}(c) > 0$

Var.  $\Rightarrow f^{(n+1)}$  stetig und  $f^{(n+1)}(c) > 0$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) : f^{(n+1)}(x) > 0$

Vst.  $\Rightarrow T_{f,c}^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (t-c)^k = f(c)$



Sei  $c \neq x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

Taylor  
18.33

$\exists d_x$  zwischen  $x$  und  $c : f(x) - T_{f,c}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(d_x)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$

$\parallel$   
 $f(x) - f(c)$

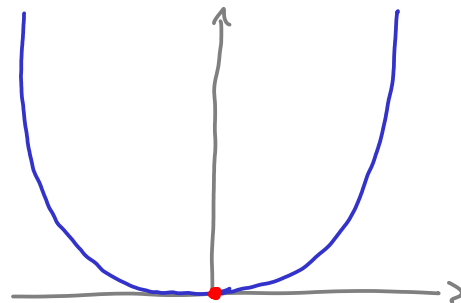
1. Fall:  $n$  gerade  $\Rightarrow n+1$  ungerade  $\Rightarrow (x-c)^{n+1}$  hat in  $c$  einen Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow f(x) - f(c) \begin{cases} < 0, & x \in (c-\varepsilon, c) \\ > 0, & x \in (c, c+\varepsilon) \end{cases}$   
 $\Rightarrow f$  hat in  $c$  keine Extremstelle

2. Fall:  $n$  ungerade  $\Rightarrow n+2$  gerade  $\Rightarrow (x-c)^{n+2} > 0 \forall x \neq c$   
 $\Rightarrow f(x) > f(c) \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Rightarrow f$  hat in  $c$  ein lokales Minimum.

Bsp. 18.37:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4$$

hat in  $c=0$  ein globales Minimum



Berechnung:

$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$$

$$f''(0) = 4 \cdot 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f'''(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$f^{(4)}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 0$$

$\xRightarrow{18.36}$   $f$  hat in  $0$  ein lokales Minimum!

Bemerkung 18.38:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$\xRightarrow{18.31}$   $f$  ist  $\infty$  oft diffbar mit  $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \geq 0$

Abb.:  $f$  hat in  $c=0$  ein globales Minimum,  
 weil  $f(x) > 0 \forall x \neq 0$

! 18.36 ist hier nicht anwendbar!

# § 19 Das Riemann-Integral

## A) Obersummen und Untersummen

Def. 19.1 Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .

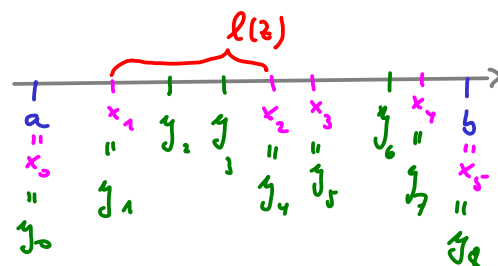
(a)  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  heißt **Zerlegung** von  $[a, b]$  :  $\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

•  $l(Z) := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i=1, \dots, n\}$  = **Länge** von  $Z$

•  $\text{supp}(Z) := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  = **Träger** von  $Z$

•  $|Z| := n$  = **Mächtigkeit** von  $Z$

•  $x_0, \dots, x_n$  heißen die **Stützpunkte** von  $Z$



(b) Seien  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  und  $Z' = (y_0, \dots, y_m)$  Zerlegungen von  $[a, b]$ .

Dann heißt  $Z'$  **Verfeinerung** von  $Z$  :  $\Leftrightarrow \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \{y_0, \dots, y_m\}$ .

(c) Seien  $Z$  und  $Z'$  zwei Zerlegungen.

Dann:  $Z * Z' = (z_0, \dots, z_k)$ , mit  $\text{supp}(Z) \cup \text{supp}(Z') = \{z_0, \dots, z_k\}$  und  $z_0 < \dots < z_k$  heißt **gemeinsame Verfeinerung** von  $Z$  und  $Z'$ .

Bsp. 19.2

$Z = (0, 1, 3, 5)$  > Zerlegungen von  $[0, 5]$

$Z' = (0, 2, 5)$

$\Rightarrow Z * Z' = (0, 1, 2, 3, 5)$  ist Verfeinerung von  $Z$  und  $Z'$



Def. 19.3

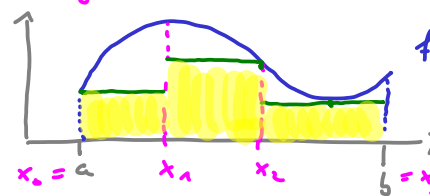
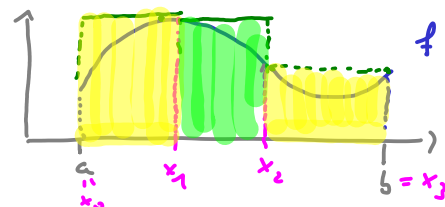
Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **beschränkt**,  $a < b$ ,  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  Zerlegung von  $[a, b]$

•  $OS(f, Z) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

= **Obersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$

•  $US(f, Z) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

= **Untersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$

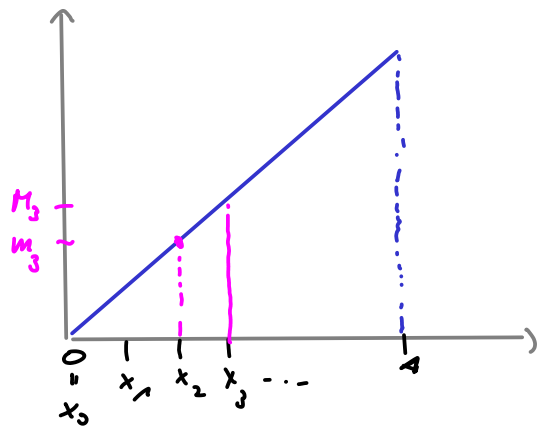


Bsp. 19.4:

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto x$$

$$Z^n = (x_0, \dots, x_n) = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\right)$$

= äquidistante Zerlegung von  $[0, 1]$



$$\Rightarrow [x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

$$\Rightarrow m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = \frac{i-1}{n}$$

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = \frac{i}{n}$$

$$\Rightarrow US(f, Z^n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \frac{i-1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$OS(f, Z^n) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{1}{n}} \cdot M_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

=  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

Lemma 19.5

Sei  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  beschränkt mit  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], a < b$ .

(a)  $Z'$  Verfeinerung von  $Z$

$$\Rightarrow 0 \leq US(f, Z') - US(f, Z) \leq 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot (|Z'| - |Z|)$$

$$0 \leq OS(f, Z) - OS(f, Z') \leq 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot (|Z'| - |Z|)$$

$$\text{Insbesondere: } US(f, Z) \leq US(f, Z') \leq OS(f, Z') \leq OS(f, Z)$$

(b) Seien  $Z$  &  $Z'$  sind zwei Zerlegungen von  $[a, b]$

$$\Rightarrow US(f, Z) \leq OS(f, Z')$$

(c) Zukunf:  $-M \cdot (b-a) \leq US(f, Z) \leq OS(f, Z) \leq M \cdot (b-a)$

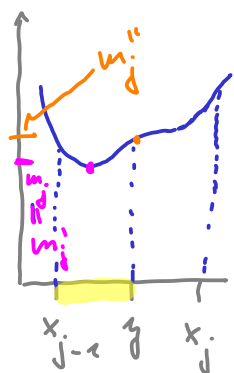
# Beweis!

(a) Sei  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  und  $m_j := \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j] \}$ .

Finden sei  $Z' = (x_0, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n)$ .

Satz:  $m_j' := \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{j-1}, y] \} \geq m_j$

$m_j'' := \inf \{ f(x) \mid x \in [y, x_j] \} \geq m_j$



$$\Rightarrow \mathcal{U}_S(f, Z) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (x_j - x_{j-1}) \cdot m_j$$

$$= \sum_{i \neq j} (x_i - x_{j-1}) \cdot m_i + \underbrace{(x_{j-1} - y) \cdot m_j + (y - x_{j-1}) \cdot m_j}_{\text{circled in pink}}$$

$$\leq \sum_{i \neq j} (x_i - x_{j-1}) \cdot m_i + \underbrace{(x_{j-1} - y) \cdot m_j' + (y - x_{j-1}) \cdot m_j''}_{\text{circled in pink}}$$

$$= \mathcal{U}_S(f, Z')$$

$$\Rightarrow 0 \leq \mathcal{U}_S(f, Z') - \mathcal{U}_S(f, Z)$$

$$= (x_j - y) \cdot (m_j' - m_j) + (y - x_{j-1}) \cdot (m_j'' - m_j)$$

$$\leq (x_j - y) \cdot (M + \pi) + (y - x_{j-1}) \cdot (M + \pi)$$

$$= 2 \cdot M \cdot \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\leq l(Z)} \leq 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot \underbrace{(|Z'| - |Z|)}_{=1}$$

Wenn  $|Z'| - |Z| > 1$ , dann mehr Zerteilungen mit dem Fall wie oben!

Für Obersummen geht das analog!



Bsp. 19.8:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x \quad \text{und} \quad Z^n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = US(f, Z^n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, Z^n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq UI(f) \leq OI(f) \leq \frac{1}{2}$$

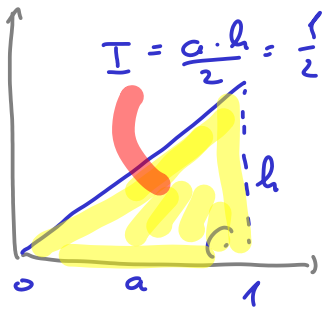
$\Downarrow$

$$UI(f) = OI(f) = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$f$  ist Riemann-int. auf  $[0, 1]$

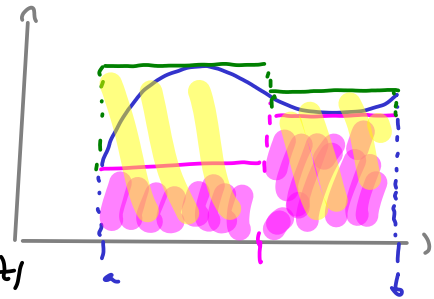
$$\text{mit} \quad \int_0^1 x \, dx = OI(f) = \frac{1}{2}$$



Bem. 19.9:

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) \geq 0 \, \forall x$  und beschränkt!

Sei  $I :=$  Flächeninhalt, den Graph von  $f$  mit  $x$ -Achse einschließt



$$\Rightarrow \forall Z: \quad US(f, Z) \leq I \leq OS(f, Z)$$

$\Downarrow$

$$UI(f) \leq I \leq OI(f)$$

$\Downarrow f$  R-int.

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$



Bsp. 19. 10:

Ⓐ  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto c$

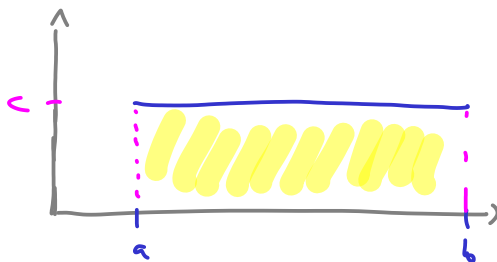
$\Rightarrow Z = (x_0, \dots, x_n)$  Zerlegung von  $[a, b]$

$\rightsquigarrow OS(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b - a)$

$US(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c$

$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = c \cdot (b - a)$

$\Rightarrow f$  ist  $\mathbb{R}$ -int. mit  $\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$



Ⓑ  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$   
 ist beschränkt

Dirichlet'sche  
Sprungfunktion

Sei  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  Zerlegung von  $[0, 1]$ .

$\Rightarrow US(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$

$[x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$OS(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = (x_n - x_0) \cdot 1$

$[x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow UI(f) = 0 \neq 1 = OI(f)$

$\Rightarrow f$  ist **nicht** Riemann-integrierbar!

# C) Das Riemannsches Integrierbarkeitskriterium

Satz 19.11 (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt,  $a < b$ .

Dann ist  $f$  **integrierbar** auf  $[a, b]$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \xi = \xi(\varepsilon) \text{ Zerlegung von } [a, b] : OS(f, \xi) - US(f, \xi) < \varepsilon$

Beweis

" $\Rightarrow$ " Sei  $\varepsilon > 0$ .

$\cdot$   $OI(f) = \inf \{ OS(f, \xi) \mid \xi = \xi_{\text{Zerl. von } [a, b]} \} =: A$   
 $\Rightarrow OI(f)$  ist die größte untere Schranke von  $A$   
 $\Rightarrow OI(f) + \frac{\varepsilon}{2}$  ist keine untere Schranke von  $A$   
 $\Rightarrow \exists \xi' = \xi'_{\text{Zerl. von } [a, b]} : OS(f, \xi') < OI(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\cdot$   $UI(f) = \sup \{ US(f, \xi) \mid \xi = \xi_{\text{Zerl. von } [a, b]} \} =: B$   
 $\Rightarrow UI(f)$  ist die kleinste obere Schranke von  $B$   
 $\Rightarrow UI(f) - \frac{\varepsilon}{2}$  ist keine obere Schranke von  $B$   
 $\Rightarrow \exists \xi'' = \xi''_{\text{Zerl. von } [a, b]} : US(f, \xi'') > UI(f) - \frac{\varepsilon}{2}$

$\cdot$  Satz 2:  $\xi := \xi' * \xi''$

$$\Rightarrow OS(f, \xi) - US(f, \xi) \leq OS(f, \xi') - US(f, \xi'')$$

$$< (OI(f) + \frac{\varepsilon}{2}) - (UI(f) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$$

$f$  integrierbar  $\xrightarrow{OI(f)}$

" $\Leftarrow$ " Satz 2:  $\varepsilon := \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \exists \xi^n = \xi^n_{\text{Zerl. von } [a, b]} : OS(f, \xi^n) - US(f, \xi^n) < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow n \rightarrow \infty} > OS(f, \xi^n) - US(f, \xi^n) \geq \underbrace{OI(f) - UI(f)}_{\downarrow n \rightarrow \infty} \geq 0$$

$\Downarrow$   
 $OI(f) = UI(f)$

## Lemma 19.12

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar auf  $[a, b]$ ,  $a < b$ .

Dann,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall Z = \text{Zerl. von } [a, b] \text{ mit } l(Z) < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } OS(f, Z) - US(f, Z) < \varepsilon$

### Beweis:

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

RJK 19.11  $\Rightarrow \exists Z' = \text{Zerl. von } [a, b] : OS(f, Z') - US(f, Z') < \varepsilon \quad (*)$

Setze:  $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{8 \cdot |Z'| \cdot M} > 0$ , wobei  $M := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$

Sei  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit  $l(Z) < \delta_\varepsilon$ .

$$\Rightarrow OS(f, Z) - US(f, Z) = \underbrace{OS(f, Z) - OS(f, Z * Z')}_{\textcircled{1} < \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{OS(f, Z * Z') - US(f, Z * Z')}_{\textcircled{2} < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{US(f, Z * Z') - US(f, Z)}_{\textcircled{3} < \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon$$

$$\text{zu } \textcircled{2}: OS(f, Z * Z') - US(f, Z * Z') \leq OS(f, Z') - US(f, Z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{zu } \textcircled{1}: OS(f, Z) - OS(f, Z * Z') \stackrel{19.5}{\leq} 2 \cdot M \cdot \underbrace{l(Z)}_{< \delta_\varepsilon} \cdot \underbrace{(|Z * Z'| - |Z|)}_{\leq |Z'|} < 2 \cdot M \cdot |Z'| \cdot \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\text{zu } \textcircled{3}: US(f, Z * Z') - US(f, Z) \stackrel{19.5}{\leq} 2 \cdot M \cdot \underbrace{l(Z)}_{< \delta_\varepsilon} \cdot \underbrace{(|Z * Z'| - |Z|)}_{\leq |Z'|} < 2 \cdot M \cdot |Z'| \cdot \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$$

□

## D) Zwei Klassen integrierbarer Funktionen

### Satz 19.13

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\Rightarrow f$  integrierbar auf  $[a, b]$

### Beweis:

Beachte:  $f$  stetig auf  $[a, b] \stackrel{14.15}{\Rightarrow} f$  ist beschränkt

$\stackrel{14.26}{\hookrightarrow} f$  ist glw. stetig auf  $[a, b] \quad (*)$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

$$(*) \Rightarrow \exists \delta_{\frac{\epsilon}{b-a}} > 0 : \forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x-y| < \delta_{\frac{\epsilon}{b-a}} \text{ gilt: } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a} (**)$$

Wähle eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  mit  $l(Z) < \delta_{\frac{\epsilon}{b-a}}$   
 $(x_0, \dots, x_n)$

Vor.  $\Rightarrow f$  ist stetig auf  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Rightarrow \exists y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i] : f(y_i) = \sup \{ |f(x)| \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\text{und } f(z_i) = \inf \{ |f(x)| \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\Rightarrow |y_i - z_i| \leq |x_i - x_{i-1}| \leq l(Z) < \delta_{\frac{\epsilon}{b-a}} \Rightarrow 0 \leq f(y_i) - f(z_i) < \frac{\epsilon}{b-a} (**)$$

$$\Rightarrow OS(f, Z) - US(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{(f(y_i) - f(z_i))}_{< \frac{\epsilon}{b-a}}$$

$$< \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\epsilon}{b-a} = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (x_n - x_0) = \epsilon$$

Dabei  $f$  integrierbar wegen 19.11. (RJK). b]

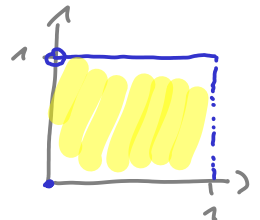
Bsp. 19.14:

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$  ist nicht stetig in 0.

Satz:  $Z^n := (0, \frac{1}{n}, 1)$  ist eine Zerlegung von  $[0, 1]$ ,  $n \geq 1$ .

$$\Rightarrow US(f, Z^n) = (\frac{1}{n} - 0) \cdot 0 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 1 = 1 - \frac{1}{n}$$

$$OS(f, Z^n) = (\frac{1}{n} - 0) \cdot 1 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 1 = 1$$



$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} = US(f, Z^n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, Z^n) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow n \rightarrow \infty & \Rightarrow & \downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty \\ 1 & & 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = 1$$

$$\Rightarrow f \text{ ist integrierbar auf } [0, 1] \text{ mit } \int_0^1 f(x) dx = 1$$

### Satz 19.15

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **monoton**  $\Rightarrow f$  ist **integrierbar** auf  $[a, b]$

Beweis o.E.  $f$  ist **monoton wachsend**

$\Rightarrow \forall x \in [a, b]: f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f$  ist **beschränkt**

1. Fall:  $f$  **konstant**  $\Rightarrow f$  ist **integrierbar**

2. Fall:  $f$  **nicht konstant**  $\Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

$$\Rightarrow \exists n \geq 1: \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{(b-a) \cdot (f(b) - f(a))} \quad (*)$$

Satz 19.2:  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$  für  $i = 0, \dots, n$

$$\Rightarrow OS(f, Z) - US(f, Z) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{= \frac{b-a}{n}} \cdot \left( \underbrace{\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{= f(x_i)} - \underbrace{\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{= f(x_{i-1})} \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_n) - f(x_0))$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (b-a) \cdot (f(b) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{(b-a) \cdot (f(b) - f(a))} \cdot (b-a) \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

$\Rightarrow f$  ist **integrierbar** auf  $[a, b]$

19.11  
RJK

13

### Bsp. 19.16

19.14  $\rightarrow f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$  ist **monoton**,  
also **integrierbar** nach 19.15

Achtung: 19.15 liefert nicht den Wert von  $\int f(x) dx$  !!!

# E) Riemannsche Zwischensummen

Def. 19.17

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt,  $a < b$ ,  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ .

Gilt für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  stets  $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , dann heißt

$ZS(f, Z, \alpha) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)$  die Riemannsche Zwischensumme von  $f$  bez. der Zerlegung  $Z$  und den Zwischenpunkten  $\alpha$ .

Lemma 19.18

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt,  $a < b$ ,  $Z = \text{Zerl. von } [a, b]$  und  $\varepsilon > 0$ .

Ⓐ  $\exists \alpha$  ZWP von  $Z$ , so dass  $0 \leq OS(f, Z) - ZS(f, Z, \alpha) < \varepsilon$

Ⓑ  $\exists \beta$  ZWP von  $Z$ , so dass  $0 \leq ZS(f, Z, \beta) - US(f, Z) < \varepsilon$

Beweis:

Ⓐ Sei  $Z = (x_0, \dots, x_n)$ .

Setze:  $M_i := \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$\Rightarrow M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$  ist eine obere Schranke für  $\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$\Rightarrow \exists \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i] : f(\alpha_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow M_i - f(\alpha_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (*)$

Setze:  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\Rightarrow OS(f, Z) - ZS(f, Z, \alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{(M_i - f(\alpha_i))}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}$

$$\stackrel{0 \leq}{<} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{(x_n - x_0)}_{\substack{= \\ b \\ - \\ a}} = \varepsilon$$

Ⓑ Analog.

□

# F) Riemannsches Folgenkriterium für Integrierbarkeit

## Satz 19.19

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt,  $a < b$  und  $I \in \mathbb{R}$ .

Dann sind gleichwertig:

Ⓐ  $f$  ist **integrierbar** auf  $[a, b]$  mit  $\int_a^b f(x) dx = I$

Ⓑ  $\forall ((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  gilt:  $ZS(f, z^n, \alpha^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$

## Beweis

Ⓐ  $\Rightarrow$  Ⓑ: Sei  $f$  integrierbar mit  $\int_a^b f(x) dx = I$ .

Sei zudem  $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von Zerl. von  $[a, b]$  mit  $l(z^n) \rightarrow 0$ ,

$$\text{so dass: } l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

$$\text{z.z.: } \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |ZS(f, z^n, \alpha^n) - I| < \varepsilon$$

$$\text{(d.h. } ZS(f, z^n, \alpha^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I).$$

Vor.  $\Rightarrow f$  integrierbar  $\xRightarrow{19.12} \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall z = \text{Zerl. von } [a, b] \text{ mit } l(z) < \delta_\varepsilon$

$$\text{gilt: } OS(f, z) - US(f, z) < \varepsilon \quad (*)$$

$$\text{Vor. } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} l(z^n) = 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : l(z^n) = |l(z^n) - 0| < \delta_\varepsilon$$

$$\text{Setze: } n_\varepsilon := n_{\delta_\varepsilon}. \text{ Sei nun } n \geq n_\varepsilon.$$

$$\Rightarrow ZS(f, z^n, \alpha^n) - I \leq OS(f, z^n) - I \leq OS(f, z^n) - US(f, z^n) \stackrel{(*)}{<} \varepsilon$$

$$\stackrel{(**)}{\leq} US(f, z^n) - I \geq US(f, z^n) - OS(f, z^n) \stackrel{(**)}{>} -\varepsilon$$

$$\Rightarrow |ZS(f, z^n, \alpha^n) - I| < \varepsilon$$

(b)  $\Rightarrow$  (c): Für  $n \geq 1$  setze:  $Z^n = (x_0, \dots, x_n)$  mit  $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} l(Z^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0$$

Zeige:  $\lim_{n \rightarrow \infty} OS(f, Z^n) = I$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

z.z.:  $\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |OS(f, Z^n) - I| < \varepsilon$

zu festem  $\varepsilon$  gibt es nach 19.19  $Z^n$  mit  $\alpha^n$  von  $Z^n$

s.d.:  $OS(f, Z^n) - ZS(f, Z^n, \alpha^n) < \frac{\varepsilon}{2}$  \*

Vor.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} ZS(f, Z^n, \alpha^n) = I$

$\Rightarrow \exists n_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}} : |ZS(f, Z^n, \alpha^n) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$  \*\*

Setze:  $n_\varepsilon := n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ . Sei  $n \geq n_\varepsilon$  gegeben

$$\Rightarrow |OS(f, Z^n) - I| \leq \underbrace{|OS(f, Z^n) - ZS(f, Z^n, \alpha^n)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|ZS(f, Z^n, \alpha^n) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Analyse:  $\lim_{n \rightarrow \infty} OS(f, Z^n) = I$

Damit:  $US(f, Z^n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, Z^n)$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow n \rightarrow \infty & \Rightarrow & \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty & \Leftarrow & \downarrow n \rightarrow \infty \\ I & & I & & I & & I \end{array}$$

$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = I \Rightarrow f$  integrierbar mit  $\int_a^b f(x) dx = I$

Bsp. 19.20:

$f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  mit  $b > 0$

$\Rightarrow f$  stetig  $\Rightarrow f$  integrierbar



Setze:  $Z^n := (x_0, \dots, x_n)$  mit  $x_i := i \cdot \frac{b}{n} =: \alpha_i$

$$\Rightarrow \ell(Z^n) = \frac{b}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \underset{19.19}{\mathcal{R}S(f, Z^n, \alpha^n)} \xrightarrow{\quad\quad\quad} \int_0^b f(x) dx$$

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{b}{n}} \cdot \underbrace{f(\alpha_i)}_{=: x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \cdot \left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2$$

$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$   
 // 2. Ableitung

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{b^3}{h^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

## G) Rechenregeln für Integrale - Linearität + Monotonie

Kor. 19.21

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar,  $a < b$ , und seien  $c, d \in \mathbb{R}$ .

(a)  $c \cdot f + d \cdot g$  ist integrierbar mit  $\int_a^b (c \cdot f + d \cdot g)(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx + d \cdot \int_a^b g(x) dx$ .

(b) Wenn  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ , dann:  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

Beweis:

(a) Beachte:  $Z = (x_0, \dots, x_n) = Z$  v.l. w.l.  $[a, b]$  mit  $Z \cup \alpha$

$$\Rightarrow \mathcal{R}S(c \cdot f + d \cdot g, Z, \alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (c \cdot f(\alpha_i) + d \cdot g(\alpha_i))$$

$$\stackrel{(*)}{=} c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i) + d \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot g(\alpha_i) = c \cdot \mathcal{R}S(f, Z, \alpha) + d \cdot \mathcal{R}S(g, Z, \alpha)$$

Sei  $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $zUP_n$ , so dass  $l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow ZS(c \cdot f + d \cdot g, z^n, \alpha^n) \stackrel{(*)}{=} c \cdot \underbrace{ZS(f, z^n, \alpha^n)}_{\substack{\text{19.11} \\ \downarrow \\ \int_a^b f(x) dx}} + d \cdot \underbrace{ZS(g, z^n, \alpha^n)}_{\substack{\text{19.11} \\ \downarrow \\ \int_a^b g(x) dx}}$$

unverändert von  $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$   $\rightarrow c \cdot \int_a^b f(x) dx + d \cdot \int_a^b g(x) dx$

19.11  $\Rightarrow c \cdot f + d \cdot g$  R-integrierbar mit  $\int_a^b (c \cdot f + d \cdot g)(x) dx$

(b) Sei  $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von Zerl. von  $[a, b]$  mit  $zUP_n$ , d.h.  $l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leftarrow ZS(f, z^n, \alpha^n) \leq ZS(g, z^n, \alpha^n) \rightarrow \int_a^b g(x) dx$$

$f(x) \leq g(x) \forall x$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Bsp. 19.22:

$$\int_0^b 3x^2 + 5 dx = 3 \cdot \int_0^b x^2 dx + \int_0^b 5 dx = 3 \cdot \frac{b^3}{3} + 5 \cdot b = b^3 + 5b$$

# H) Rechenregeln für Integrale - Additivität

## Bemerkung 19.23

$$\left. \begin{array}{l} z' = (x_0, \dots, x_n) \text{ Zerleg. von } [a, c] \\ z'' = (y_0, \dots, y_m) \text{ " " } [c, b] \end{array} \right\} \Rightarrow z' * z'' = (x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \text{ Zerl. von } [a, b]$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ ZWP}_k \text{ von } z' \\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \text{ ZWP}_k \text{ von } z'' \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cup \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \text{ ZWP}_k \text{ von } z' * z''$$

Offensichtlich:

$$\begin{aligned} OS(f, z' * z'') &= OS(f, z') + OS(f, z'') \\ US(f, z' * z'') &= US(f, z') + US(f, z'') \\ ZS(f, z' * z'', \alpha \cup \beta) &= ZS(f, z', \alpha) + ZS(f, z'', \beta) \end{aligned}$$

## Prop. 19.24

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt,  $a < b$ , und  $c \in (a, b)$ .

Dann  $f$  ist auf  $[a, b]$  integrierbar

$(\Leftrightarrow)$   $f$  ist auf  $[a, c]$  und  $[c, b]$  integrierbar

Zudem gilt dann:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

## Beweis:

" $\Leftarrow$ " Sei  $f$  integrierbar auf  $[a, c]$  und  $[c, b]$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben

$$\Rightarrow \exists z' = \text{Zerl. von } [a, c] : OS(f, z') - US(f, z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\cdot \exists z'' = \text{ " " } [c, b] : OS(f, z'') - US(f, z'') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow z := z' * z''$  ist Zerl. von  $[a, b]$  mit

$$OS(f, z) - US(f, z) = (OS(f, z') + OS(f, z'')) - (US(f, z') + US(f, z''))$$

$$= \underbrace{OS(f, z') - US(f, z')}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{OS(f, z'') - US(f, z'')}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$f$  int.  
auf  $[a, b]$   
11.11.2024

" $\Rightarrow$ " Sei  $f$  integrierbar auf  $[a, b]$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

$\Rightarrow$   $\exists z = z_{\text{w.l. von } [a, b]}$  :  $OS(f, z) - US(f, z) < \varepsilon$   
B.11  
 $(x_0, \dots, x_n)$

O.F.:  $c = x_j$  Stützpunkt von  $z$  (sonst verfeinern mit  $c$ )

Satz 2.1:  $z' := (x_0, \dots, x_j) = z_{\text{w.l. von } [a, c]}$

$z'' := (x_j, \dots, x_n) = \text{" " } [c, b]$

$\Rightarrow z = z' * z''$

$\Rightarrow OS(f, z') - US(f, z') + OS(f, z'') - US(f, z'')$

$$= OS(f, z) - US(f, z) < \varepsilon$$

$\Rightarrow OS(f, z') - US(f, z') < \varepsilon$  und  $OS(f, z'') - US(f, z'') < \varepsilon$

$\stackrel{\text{B.11}}{\Rightarrow}$   $f$  integrierbar auf  $[a, c]$  und  $[c, b]$ .

Zum Beweis des Integralswertes:

Wähle eine Folge  $((z^{1n}, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$  von t.w.l. von  $[a, c]$  mit ZWPen

und " "  $((z^{2n}, \beta^n))_{n \in \mathbb{N}}$  " " "  $[c, b]$  " " ,

so dass:  $l(z^{1n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und  $l(z^{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Satz 2.1:  $z^n := z^{1n} * z^{2n}$  und  $\gamma^n := \alpha^n \cup \beta^n$

ist z.w.l. von  $[a, b]$  mit ZWPen

Zu zeigen:  $l(z^n) = \max\{l(z^{1n}), l(z^{2n})\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \stackrel{!}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

□

Bsp. 19.25

$$0 < a < b \implies$$

$$\int_0^b x^2 dx = \int_0^a x^2 dx + \int_a^b x^2 dx$$

$$\implies \int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

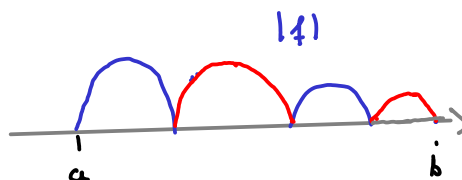
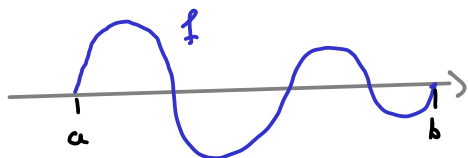
## I) Rechenregeln für Integrale - $\Delta$ -Ungleichung

Prop. 19.26

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar,  $a < b$

Dann:  $|f|$  ist integrierbar auf  $[a, b]$  mit  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

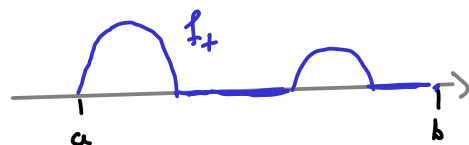
||  
"Flächeninhalt, den der Graph von  $f$  mit der  $x$ -Achse einschließt"



Beweis:

Definiere:  $f_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$

$$\implies |f| = 2 \cdot f_+ - f$$



Zeige:  $f_+$  ist integrierbar auf  $[a, b]$

(dann automatisch  $|f| = 2 \cdot f_+ - f$  integrierbar nach 19.24)

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Vor.  $\Rightarrow f$  integrierbar auf  $[a, b]$

$$\stackrel{\text{RZK}}{\Rightarrow} \exists \xi = \xi_{\text{Zw.}} \text{ von } [a, b] ; \quad US(f, \xi) - US(f, \xi) < \varepsilon$$

$$\text{Zun\u00e4chst: } \forall I \subseteq [a, b] ; \quad \sup\{f_+(x) | x \in I\} - \inf\{f_+(x) | x \in I\} \quad \left. \vphantom{\sup\{f_+(x) | x \in I\}} \right\} \otimes \\ \leq \sup\{f(x) | x \in I\} - \inf\{f(x) | x \in I\}$$

1. Fall:  $\forall x \in I : f(x) < 0$

$\Rightarrow f_+(x) = 0 \forall x \in I \Rightarrow$  linke Seite in  $\otimes = 0$

Aber: rechte Seite  $\geq 0 \Rightarrow \otimes$

2. Fall:  $\forall x \in I : f(x) \geq 0 \Rightarrow f_+ = f$  auf  $I \Rightarrow \otimes$

3. Fall:  $\exists \eta, z \in I : f(\eta) < 0 \leq f(z)$

$\Rightarrow \sup\{f_+(x) | x \in I\} = \sup\{f(x) | x \in I\}$  und  $\left. \vphantom{\sup\{f_+(x) | x \in I\}} \right\} \Rightarrow \otimes$   
 $\inf\{f_+(x) | x \in I\} = 0 > \inf\{f(x) | x \in I\}$

Damit:

$$US(f_+, \xi) - US(f_-, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left( \sup\{f_+(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{f_-(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left( \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \right)$$

$$= US(f, \xi) - US(f, \xi) < \varepsilon$$

$\Rightarrow f_+$  int. auf  $[a, b]$  nach 19.11 RZK

Noch zu zeigen:  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Beweis:  $\xi = \xi_{\text{Zw.}} \text{ von } [a, b] \text{ mit ZWP } \alpha$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} \cdot f(\alpha_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot |f(\alpha_i)| = \int_a^b |f(x)| dx \quad (**)$$

$\int$  ist eine Folge von ZWPs von  $[a, b]$  mit  $ZWP_n$ ,  
 so daß  $l(Z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \left| ZS(f, Z^n, d^n) \right| \leq ZS(|f|, Z^n, d^n)$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty \qquad \downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

□

Bem. 19.27:

Additivität  $\Rightarrow f$  int. auf  $[a, b]$  und  $a < c < d < b$   
 $\Rightarrow f$  int. auf  $[c, d]$

Satz 19.28:  $\int_a^c f(x) dx := 0$   
 $\int_a^c f(x) dx := - \int_c^a f(x) dx$  falls  $a > b$

Können darauf verzichten, dass unsere Integrale  
 keine sind!

$\rightarrow$  Linearität + Additivität verallgemeinern soll!

# § 20 Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung + Anwendungen

## A) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

### Def. 20.1

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Dann:  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Stammfunktion** von  $f$

$\iff F$  ist **differenzierbar** auf  $I$  mit  $F' = f$ .

### Prop. 20.2

Seien  $F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Stammfunktionen von  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  Intervall.

Dann:  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in I : F(x) = G(x) + c$

### Beweis:

Wähle  $a \in I$  fest. Setze:  $c := F(a) - G(a)$ .

Sei nun  $b \in I \setminus \{a\}$ , o.E.:  $a < b$

Z.z.:  $F(b) = G(b) + c$

Vor.  $\Rightarrow F - G$  ist diffbar auf  $[a, b] \subseteq I$ , also auch stetig

$$\text{und } (F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

$\Rightarrow$   $F - G$  ist konstant auf  $[a, b]$   
16.11

$$\Rightarrow c = F(a) - G(a) = F(b) - G(b) \Rightarrow F(b) = G(b) + c$$

□

### Bsp. 20.3:

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  hat die Stammfkt.  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ ,

$$\text{da } F'(x) = 3 \cdot \frac{x^{3-1}}{3} = x^2 = f(x) \quad \forall x \in [0, \infty)$$

Bes.: 19.20  $\Rightarrow \int_0^y f(x) dx = \int_0^y x^2 dx = \frac{y^3}{3} = F(y)$



# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $a \in I$ .

Dann ist  $F: I \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \int_a^y f(x) dx$  eine Stammfunktion von  $f$ .

Beweis: Sei  $c \in I$ .

Zu zeigen:  $F$  ist diff. bar in  $c$  mit  $F'(c) = f(c)$

$$\text{d.h.} \quad \lim_{y \rightarrow c} \frac{F(y) - F(c)}{y - c} = f(c)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

Z.z.:  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  :  $\forall y \in I$  mit  $0 < |y - c| < \delta_\varepsilon$  gilt:  $\left| \frac{F(y) - F(c)}{y - c} - f(c) \right| < \varepsilon$

Vor.  $\Rightarrow f$  stetig in  $c$

$\Rightarrow \exists \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$  :  $\forall x \in I$  mit  $|x - c| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$  gilt:  $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$  \*

Setze:  $\delta_\varepsilon := \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ .

Sei  $y \in I$  mit  $0 < |y - c| < \delta_\varepsilon = \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ .

$$\Rightarrow \left| \frac{F(y) - F(c)}{y - c} - f(c) \right| = \left| \frac{1}{y - c} \cdot \left( \int_a^y f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right) - f(c) \right|$$

$= \int_c^y f(x) dx - \int_c^y f(c) dx$

$$= \left| \frac{1}{y - c} \cdot \int_c^y f(x) dx - \frac{f(c) \cdot (y - c)}{y - c} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y f(x) dx - \int_c^y f(c) dx \right| = \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y (f(x) - f(c)) dx \right|$$

$= \frac{\varepsilon}{2} \cdot (y - c)$

$$\stackrel{19.26}{\leq} \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y \underbrace{|f(x) - f(c)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} dx \right| \leq \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y \frac{\varepsilon}{2} dx \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \square$$

## Korollar 20.5 (HDIR)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

$$\text{Dann, } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis:

$$20.2 + 20.4 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall y \in [a, b] : F(y) = \int_a^y f(x) dx + c$$

$$\Rightarrow F(a) = \int_a^a f(x) dx + c = 0 + c = c$$

$$\Rightarrow F(b) = \int_a^b f(x) dx + c = \int_a^b f(x) dx + F(a) \Rightarrow \text{Beh. 18}$$

Bem. 20.6:

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

(a) HDIR  $\Rightarrow$  Differenzieren ist Umkehrung der Integration

(b) Sei  $F$  eine Stammfkt. von  $f$ ,  $a, b \in I$ .

$$\text{Notation: } F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

(c)  $\int f(x) dx$  heißt ein unbestimmtes Integral

und  $F := \int f(x) dx$ , d.h.  $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ , bezeichnet

ein beliebiges Stammfkt. von  $f$ .

## B) Stammfunktionen durch Ableiten ablesen

Bsp. 20.7 (einige ausgewählte Stammfkt.)

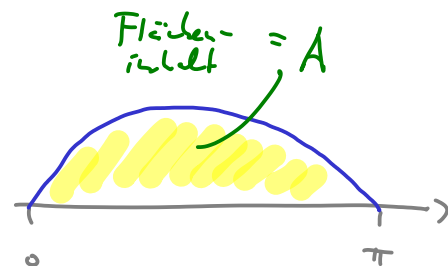
$f$	$F = \int f(x) dx$
exp	exp
$\exp_a, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a } \cdot \exp_a$
cos	sin
sin	-cos

$f$	$F = \int f(x) dx$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	ln
$x \mapsto x^a, a \neq -1$	$x \mapsto \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$	arctan
$\frac{1}{\cos^2}$	tan

Bsp. 20.8:

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$

"   
  $1 + 1 = 2$

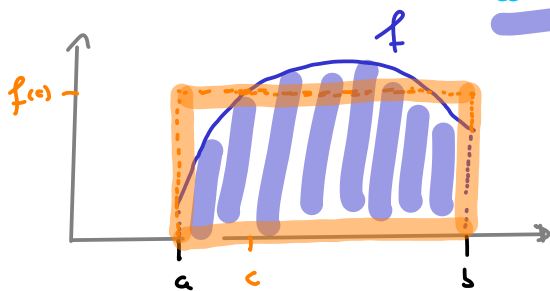


## C) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Korollar 20.9

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $a < b$ .

Dann:  $\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$ .



Beweis:

HÖJR  $\Rightarrow F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \eta \mapsto \int_a^{\eta} f(x) dx$  ist Stammfkt von  $f$

$\Rightarrow F$  ist diffbar auf  $(a, b)$  mit  $F' = f$

$\Rightarrow F$  ist stetig auf  $[a, b]$  und d.-fbar auf  $(a, b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$   
MDR

$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{Mf.}}{=} F(b) - \underbrace{F(a)}_0 = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a)$  13

## D) Partielle Integration

Satz 20.11:

Seien  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig d.-fbar.

Dann:  $\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx.$

Beweis:

PR  $\Rightarrow (u \cdot v)' = u \cdot v' + \underline{u' \cdot v}$

$\Rightarrow \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \int_a^b (u \cdot v)'(x) dx - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$   
 $\stackrel{\text{MDR}}{=} u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx.$  13

Bem. 20.12:

Partielle Integration  $\hat{=}$  Umkehrung der Produktregel.

Bsp. 20.13

$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} dx \stackrel{20.11}{=} u(x) \cdot v(x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(x) \cdot v(x) dx$   
 $= \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin(x)) \cdot \sin(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$   
 $= \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 - \cos^2(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$   
 $\Rightarrow 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 dx \stackrel{=x}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{2}) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2})$

## E) Der Satz von Taylor

Korollar 20.14 (Restglied in Integralform)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$   $n+1$ -fach stetig diff. bar,  $x, a \in I$ .

Dann: 
$$f(x) - T_{f,a}^n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n dy.$$

Beweis: Durch Induktion nach  $n$ :

$n=0$ :  $f(x) - T_{f,a}^0(x) = f(x) - f(a) \stackrel{HJZ}{=} \int_a^x f'(y) dy = \int_a^x \frac{f^{(1)}(y)}{0!} \cdot (x-y)^0 dy$  ✓

$n-1 \rightarrow n$ : Ind.

$\Rightarrow f(x) - T_{f,a}^{n-1}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} \cdot \underbrace{(x-y)^{n-1}}_{=: v'(y)} dy \stackrel{20.11}{=} u(y) \cdot v(y) \Big|_a^x - \int_a^x u'(y) \cdot v(y) dy$

$= \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} \cdot \frac{-(x-y)^n}{n} \Big|_a^x - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n-1)!} \cdot \frac{-(x-y)^n}{n} dy$

$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n dy$

$\Rightarrow f(x) - T_{f,a}^n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n dy$

13

## F) Die Substitutionsregel

Satz 20.15 (Substitutionsregel)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diff. bar,  $\varphi([a,b]) \subseteq I$ .

Dann: 
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

### Beweis:

$\varphi$  stetig auf  $[a, b] \Rightarrow \varphi$  nimmt Max & Min auf  $[a, b]$  an

$$\Rightarrow \exists c, d \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : \varphi(c) \leq \varphi(x) \leq \varphi(d)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(\varphi) = [\varphi(c), \varphi(d)] \subseteq \mathbb{I}$$

$\Rightarrow$   $f$  besitzt auf  $\text{Im}(\varphi)$  ein Stammfkt.  $F$   
HÖR

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (F \circ \varphi)'(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) dx \stackrel{\text{HÖR}}{=} (F \circ \varphi)(x) \Big|_a^b$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \stackrel{\text{HÖR}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) dz$$

□

### Bem. 20.16:

(a) Substitutionsregel  $\hat{=}$  Umkehrung der Kettenregel

(b) Eselsbrücke:

Substitution "z durch  $\varphi(x)$ " oder " $\varphi(x)$  durch z"!

$$\bullet \quad z = \varphi(x) \rightsquigarrow \frac{dz}{dx} = \varphi'(x) \rightsquigarrow dz = \varphi'(x) \cdot dx$$

$$\rightsquigarrow \int f(z) dz = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

### Bsp. 20.17

$$\int_a^b x \cdot \exp(x^2) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) dz = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\exp(z)}{2} dz$$

$z = \varphi(x) = x^2$   
 $dz = 2 \cdot x dx$   
 $f(z) = \frac{\exp(z)}{2}$

$$= \frac{\exp(z)}{2} \Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{\exp(b^2) - \exp(a^2)}{2}$$

Bsp. 20.18:

Ziel: bestimme Stammfkt. von  $\tan$ !

$$\int^y \tan(x) dx = \int^y \underbrace{-\frac{1}{\cos(x)}}_{f(\cos(x))} \cdot \underbrace{(-\sin(x)) dx}_{\varphi'(x) dx} = \int^z f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

$$z = \cos(x) \\ dz = \varphi'(x) dx = -\sin(x) dx \\ f(z) = -\frac{1}{z}$$

$$= \int^{\varphi(y)} f(z) dz = \int^{\cos(y)} -\frac{1}{z} dz = -\ln(z) \Big|_{\cos(y)}$$

$$= -\ln(\cos(y)) \quad \text{für } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Bsp. 20.19

Ziel: Bestimme Stammfkt. von  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; z \mapsto \sqrt{1-z^2}$

$$F(y) = \int^y \sqrt{1-z^2} dz = \int^y f(z) dz = \int^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

$$z = \varphi(x) = \sin(x) \\ dz = \varphi'(x) dx = \cos(x) dx \\ \varphi^{-1}(y) = \arcsin(y)$$

$$= \int^{\arcsin(y)} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(x)}}_{=\cos^2(x)} \cdot \cos(x) dx = \int^{\arcsin(y)} \underbrace{\sqrt{\cos^2(x)}}_{=\cos(x)} \cdot \cos(x) dx$$

$$= \int^{\arcsin(y)} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \cos(x) \cdot \sin(x)) \Big|_{\arcsin(y)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x + \sqrt{1-\sin^2(x)} \cdot \sin(x)) \Big|_{\arcsin(y)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\arcsin(y) - \sqrt{1-y^2} \cdot y)$$

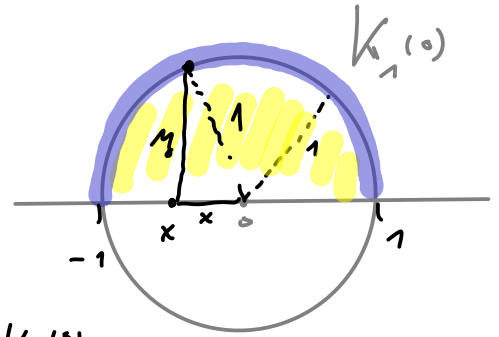
Bsp. 20.20:

Berechne den Flächeninhalt des Kreises  $K_1(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

Betrachte:  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx \stackrel{!}{=} \begin{array}{l} \text{Flächeninhalt, den} \\ \text{der Graph von } f \\ \text{mit der } x\text{-Achse} \\ \text{einschließt} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{Flächeninhalt von } K_2(0)$$



$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt des Kreises } K_1(0) = 2 \cdot \int_{-1}^1 f(x) dx \stackrel{\text{HDZB}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \arcsin(y) + y \cdot \sqrt{1-y^2} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Allgemeiner:  $K_r(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \right\} = \text{Kreis von Radius } r > 0$

$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt von } K_r(0) = 2 \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{\text{SR}}{=} \pi \cdot r^2$$

## G) Partialbruchzerlegung

Bem. 20.21

$0 \neq f, g \in \mathbb{R}[t]$  Polynome  $\Rightarrow r := \frac{f}{g}$  rationale Funktion

$$\Rightarrow r = h + \frac{p}{q} \text{ mit } h, p, q \in \mathbb{R}[t] \text{ und } \deg(p) < \deg(q)$$

Polynomdivision

$$\Rightarrow \int r(x) dx = \underbrace{\int h(x) dx}_{\text{leicht}} + \underbrace{\int \frac{p(x)}{q(x)} dx}_{\text{schwer}}$$

Ausgabe:  $\frac{p}{q} = \text{Summe von Termen der Form } \frac{A}{(t-a)^k} \text{ und } \frac{B \cdot t + C}{(t^2 + b \cdot t + c)^k}$

wobei  $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $4 \cdot b - a^2 > 0$

$k \in \{1, \dots, u\}$ , wenn  $u = \text{maximal mit } (t-a)^u \text{ bzw. } (t^2 + b \cdot t + c)^u \text{ teilt } q$



Bsp. 20.22:

(a) Ziel:

$$\int_1^2 \frac{3x^5 + 3x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^3 + x^2} dx = ?$$

Ansatz:

$$(1) \quad f = 3t^5 + 3t^4 + 6t^2 + t - 2, \quad g = 7 = t^3 + t^2 = t^2 \cdot (t+1)$$

Polynomdivision

$$(3t^5 + 3t^4 + 6t^2 + t - 2) : (t^3 + t^2) = 3t^2 \quad \text{Rest } r$$

$$\begin{array}{r} 3t^5 + 3t^4 \\ \hline 6t^2 + t - 2 =: r \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \underbrace{3t^2}_h + \frac{\underbrace{6t^2 + t - 2}_p}{\underbrace{t^3 + t^2}_q} = \frac{p}{q}$$

$$(2) \quad g = t^3 + t^2 = t^2 \cdot (t+1)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1}$$

$$\frac{6t^2 + t - 2}{t^2 \cdot (t+1)}$$

„Heupolynom“

$$\frac{A \cdot t \cdot (t+1) + B \cdot (t+1) + C \cdot t^2}{t^2 \cdot (t+1)}$$

„

$$\frac{(A+C) \cdot t^2 + (A+B) \cdot t + B}{t^2 \cdot (t+1)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 6 \\ A + B = 1 \\ B = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 3 \\ B = -2 \\ C = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{3}{t} + \frac{-2}{t^2} + \frac{3}{t+1}$$

Damit:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 h(x) dx + \int_1^2 \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

$$= \int_1^2 3x^2 dx + \int_1^2 \frac{3}{x} dx + \int_1^2 \frac{-2}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{3}{x+1} dx$$

$$= x^3 \Big|_1^2 + 3 \cdot \ln(x) \Big|_1^2 + \frac{2}{x} \Big|_1^2 + 3 \cdot \ln(x+1) \Big|_1^2$$

$$= (8 - 1) + (3 \cdot \ln(2) - \underbrace{3 \cdot \ln(1)}_{=0}) + (1 - 2) + (3 \cdot \ln(3) - \cancel{3 \cdot \ln(2)})$$

$$= 6 + 3 \cdot \ln(3)$$

⑥ Ziel:  $\int_0^1 \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 \cdot (1+x^2)^2} dx = ?$

Ansatz:

$$\frac{2t^3 + t^2 + 1}{t^2 \cdot (1+t^2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} + \frac{Et+F}{(1+t^2)^2}$$

$$\stackrel{HN}{=} \frac{(A+C) \cdot t^5 + (B+D) \cdot t^4 + (2A+C+E) \cdot t^3 + (2D+D+F) \cdot t^2 + A \cdot t + D}{t^2 \cdot (1+t^2)^2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} A+C = 0 \\ B+D = 0 \\ 2A+C+E = 2 \\ 2B+D+F = 1 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \text{LGS} \end{array} \begin{array}{l} A = 0 \\ D = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \\ E = 2 \\ F = 0 \end{array}$$

$f(t) = \frac{1}{z^2}$   
 $z = \varphi(x) = 1+x^2$   
 $2x dx = \varphi'(x) dx = dz$

Damit:

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 \cdot (1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \Big|_0^1 - \arctan(x) \Big|_0^1 + \int \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{1} \Big|_{1+y^2} = -\frac{1}{1+y^2}$$

$$= -\frac{1}{1} - \arctan(1) - \frac{1}{1+y^2}$$

# H) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration

## Satz 20.23

Seien  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  glm. auf  $[a, b]$ .

Dann ist  $f$  stetig auf  $[a, b]$  und für  $y \in [a, b]$  gilt

$$\int_a^y f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^y f_n(x) dx,$$

d.h. der Grenzwert der Stammfkt. ist eine Stammfkt. der Grenzfkt.

## Beweis:

•  $f_n$  stetig &  $f_n \rightarrow f$  glm.  $\stackrel{15.6}{\Rightarrow} f$  stetig auf  $[a, b]$

$\Rightarrow f_n$  &  $f$  integrierbar auf  $[a, y] \quad \forall y \in [a, b]$ .

• Zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^y f_n(x) dx = \int_a^y f(x) dx$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

Z.z.:  $\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \int_a^y f_n(x) dx - \int_a^y f(x) dx \right| < \varepsilon$

Vor.  $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  glm.  $\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon$  &  $\forall x \in [a, b]$ :  
 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}$  (\*)

Sei nun  $n \geq n_\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_a^y f_n(x) dx - \int_a^y f(x) dx \right| &= \left| \int_a^y f_n(x) - f(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^y \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}} dx \leq \int_a^y \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} dx = \frac{\varepsilon \cdot (y-a)}{2 \cdot (b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

(3)

Bem. 20.24:

Ⓐ Verteilbarkeit von Integrierten und Grenzwert  
≙ Verteilbarkeit zur Grenzprozesse!

Denn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^y f_n(x) dx \stackrel{D}{=} \int_a^y f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{ZS}(f_n, \xi_m, \alpha^m) \quad \parallel \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{ZS}(f, \xi_m, \alpha^m)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{ZS}(f_n, \xi_m, \alpha^m)$$

Ⓑ Wenn wir 20.23 für die  $f_n$  nur integrierbar statt stetig fordern, dann ist  $f$  nur noch integrierbar, aber die Formel für die Integrale bleibt richtig!

Ⓒ Erwartung an 18.??:

Vor:  $f_n \rightarrow f$  p.k.w.,  $f_n' \rightarrow g$  g.l.w.,  $f_n$  stetig diff'bar.

Dann:  $f$  diff'bar mit  $f' = g$

Beweis (neu):

•  $f_n$  ist Stammfkt. von  $f_n'$

$$\stackrel{HWR}{\Rightarrow} f_n(y) - f_n(a) = \int_a^y f_n'(x) dx$$

$$f(y) - f(a) \stackrel{\downarrow n \rightarrow \infty}{=} \int_a^y g(x) dx \stackrel{\text{20.23}}{=} \int_a^y g(x) dx \stackrel{\text{HWR}}{=} \text{Stammfkt. von } g$$

$\Rightarrow f$  diff'bar ist  $g$  mit  $f'(y) = g(y)$

# I) Integration von Potenzreihen

Kor. 20.25

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$  eine Potenzreihe über  $\mathbb{R}$  mit  $\text{KR } r > 0$ .

Dann ist  $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  auf jedem Teilintervall

$[a, b] \subseteq (-r, r)$  integrierbar und die Funktion

$F: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot y^{n+1}$  ist ein Stammfkt. von  $f$ ,

d.h. durch gliedweises Integrieren entsteht eine Stammfkt.

Bew:

• 15.4.  $\Rightarrow f_n: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$  konv. glw. gegen  $f$   
auf  $[a, b]$  und  $f_n$  ist stetig

$\Rightarrow f$  stetig auf  $[a, b] \rightarrow f$  integrierbar auf  $[a, b]$

$$\int_0^y f(x) dx \stackrel{20.25}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \int_0^y x^k dx$$

ist stammfkt.  
von  $f$  (in  $y$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{y^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot y^{k+1} = F(y)$$

□

Bsp. 20.26:

$$\textcircled{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad \xrightarrow[\text{Integration}]{\text{gliedweise}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fkt.} \\ \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} \right\}$$

Stammfkt. von exp

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

!!  
 $\exp(x) - 1$

$\textcircled{b} \quad f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(1+x)$  ist stetig diffbar

$$\Rightarrow f': (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

Beachte:  $f'$  ist auf  $(-1, 1)$  durch die folgende Potenzreihe

$$\text{gegeben, } \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$$

$$kR = 1$$

gl. l. m.  
Integr.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Definiert eine Stammfkt. von  $f'$  auf  $(-1, 1)$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in (-1, 1) : f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = c$$

Setze  $x=0$  ein:

$$\Rightarrow c = f(0) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1} = 0 - 0 = 0$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, 2) : \ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}$$

(Was für  $x \in [1, 2]$  schon bekannt und gilt auch für  $x=2$ )

## § 21 Uneigentliche Integrale

### A) Uneigentliche Integrale

#### Def. 21.1

Ⓐ Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  mit  $a < b$  und sei  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar auf  $[a, \eta]$  für alle  $\eta \in (a, b)$ .

Falls  $\int_a^b f(x) dx := \lim_{\eta \rightarrow b} \int_a^{\eta} f(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  existiert,

heißt der GW ein **uneigentliches Integral**; es heißt **konvergent**, falls  $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$ .

Ⓑ Seien  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar auf  $[\eta, b]$  für alle  $\eta \in (a, b)$ .

Falls  $\int_a^b f(x) dx := \lim_{\eta \rightarrow a} \int_{\eta}^b f(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  existiert,

heißt der GW ein **uneigentliches Integral**; es heißt **konvergent**, falls  $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$ .

Ⓒ Seien  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  mit  $a < b$  und für  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  gebe es ein  $c \in (a, b)$ , so dass  $\int_a^c f(x) dx$  und  $\int_c^b f(x) dx$  **konvergent** sind, dann heißt

$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  ein **konvergentes uneigentliches Integral**.

Beh. Additivität des Integrals  $\Rightarrow$  unabhängig von  $c$  !!!

#### Bsp. 21.2

Ⓐ  $\int_0^{\infty} \exp(-x) dx = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} \exp(-x) dx = \lim_{\eta \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} -e^{-\eta} + e^0$   
ist konvergent !!! 1

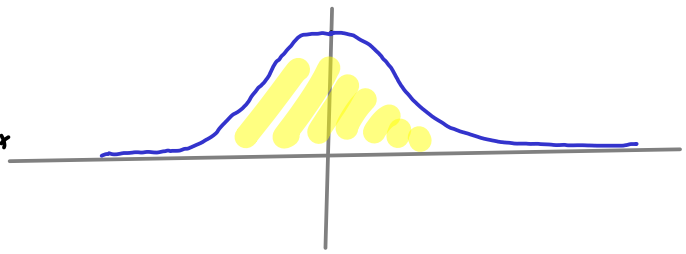
(b)  $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^a} dx$   $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y x^{-a} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right|_1^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \begin{cases} \infty & , a < 1 \\ -\frac{1}{1-a} & , a > 1 \\ \frac{1}{a-1} & \end{cases} \end{aligned}$$

(c)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{y \rightarrow 1} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{y \rightarrow 1} -2 \cdot \sqrt{1-x} \Big|_0^y$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} -2 \cdot \sqrt{1-y} + 2 \cdot \sqrt{1} = 2 \quad (\text{ist konvergent})$$

(d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$



$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan(x) \Big|_y^0 + \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} -\arctan(y) + \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan(y)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$





$$\underline{\text{z.z.}}: \lim_{y \rightarrow b} F(y) = I$$

Sei  $\varepsilon > 0$ .

1. Fall:  $b \in \mathbb{R}$ .

$$\underline{\text{z.z.}}: \exists \delta_\varepsilon > 0; \forall y \in [a, b) \text{ mit } |y - b| < \delta_\varepsilon : |F(y) - I| < \varepsilon$$

$$\text{Setze: } \delta_\varepsilon := b - a_{n_\varepsilon} > 0.$$

$$\text{Sei } y \in [a, b) \text{ mit } |y - b| < \delta_\varepsilon = b - a_{n_\varepsilon}$$

$$\Rightarrow a_{n_\varepsilon} < y$$

$$\Rightarrow |F(y) - I| = I - F(y) \leq I - F(a_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow b} F(y) = I$$

2. Fall:  $b = \infty$

$$\underline{\text{z.z.}}: \exists S_\varepsilon : \forall y \in [a, \infty) \text{ mit } y > S_\varepsilon : |F(y) - I| < \varepsilon$$

$$\text{Setze: } S_\varepsilon := a_{n_\varepsilon}. \text{ Sei nun } y \in [a, \infty) \text{ mit } y > S_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |F(y) - I| = I - F(y) \leq I - F(a_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow b} F(y) = I$$

□

## Satz 215:

Sei  $a \in \mathbb{N}$  und  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sei monoton fallend  
und auf  $[a, c]$  integrierbar  $\forall c \in [a, \infty)$ .

Dann sind gleichwertig:

(a)  $\int_a^\infty f(x) dx$  ist konvergent.

(b)  $\sum_{n=a}^\infty f(n)$  ist konvergent.

Zudem gilt dann:  $\sum_{n=a+1}^\infty f(n) \leq \int_a^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=a}^\infty f(n)$

## Beweis:

Beachte: für  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m > a$  setze:  $Z_m := (a, a+1, a+2, \dots, m)$   
ist Zerlegung von  $[a, m]$

$f$  monoton fallend

$$\Rightarrow \sum_{n=a+1}^m f(n) = US(f, Z_m) \leq \int_a^m f(x) dx \leq OS(f, Z_m) = \sum_{n=a}^{m-1} f(n)$$

(a)  $\Rightarrow$  (b):  $S_m := \sum_{n=a}^m f(n) = f(a) + \sum_{n=a+1}^m f(n) \leq f(a) + \int_a^m f(x) dx$   
 $\uparrow$   
 $f(a) + \int_a^\infty f(x) dx$

$\Rightarrow (S_m)_{m \geq a}$  ist monoton wachsend & beschränkt

$\Rightarrow (S_m)_{m \geq a}$  konvergent

(b)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $y \in (a, \infty) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}; y \leq m$

$$\Rightarrow \int_a^y f(x) dx \leq \int_a^m f(x) dx \leq \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \leq \sum_{n=a}^\infty f(n) \xrightarrow{2.7.4.} \int_a^\infty f(x) dx \text{ konvergent}$$

Zu dem:

$$\sum_{n=a+1}^m f(n) \leq \int_a^m f(x) dx \leq \int_a^{\infty} f(x) dx$$

$\downarrow m \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} f(n) \leq \int_a^{\infty} f(x) dx$$
  

$$\int_a^m f(x) dx \leq \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \leq \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$$

$\downarrow m \rightarrow \infty$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$$

□

Bsp. 21.6:

Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 1$ .

$\Rightarrow$   $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{a-1}$  ist konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  ist konvergent

Bem. 21.7

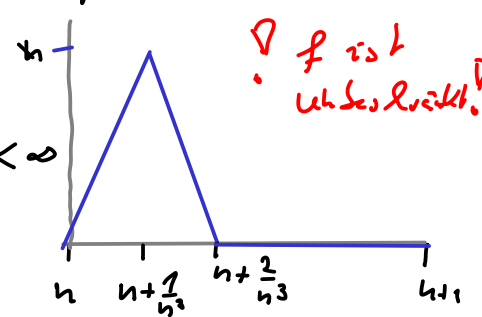
$f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  konvergent  $\not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

z.B.:  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgendem Graphen auf  $[n, n+1]$

$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

ist konvergent, aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$



# KAPITEL III: Mehrdimensionale Analysis

## § 22 Topologische Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen

### A) Metrische Räume

Def. 22.1

Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Metrik** auf  $M$

:( $\Rightarrow$ ) ①  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  "Definitheit"

②  $\forall x, y \in M: d(x, y) = d(y, x)$  "Symmetrie"

③  $\forall x, y, z \in M: d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  " $\Delta$ -Ungleichung"

Wir nennen  $(M, d)$  dann einen **metrischen Raum**

Bsp. 22.2: (diskrete Metrik)

Sei  $M$  eine beliebige Menge.

$$\Rightarrow d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Bem. 22.3:

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -VR. Dann heißt  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine

**Norm** auf  $V$ , wenn:

①  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  "Positive Definitheit"

②  $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}: \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  "Homogenität"

③  $\forall x, y \in V: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  " $\Delta$ -Ugl."

Lemma 22.4:

Sei  $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$  ein **normierter Raum**, und  $M \subseteq V$ .

Dann ist  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}: (x, y) \mapsto \|x - y\|$

eine **Metrik** auf  $M$ .

Beweis: ①  $0 = d(x, y) = \|x - y\| \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

②  $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x)$

③  $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ .  $\square$

## Konvention:

- Betrachte jede Teilmenge eines normierten Raumes mit dieser induzierten Metrik als metrischen Raum.
- Betrachte jede Teilmenge eines metrischen Raumes als metrischen Raum bez. der Einschränkung der Metrik auf die Teilmenge.

## Bsp. 22.5:

(a) Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b) Summennorm auf  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto |x_1| + \dots + |x_n|$$

(c) Maximalnorm auf  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|\cdot\|_{\infty} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

(d)  $n=1$ :  $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_{\infty} \equiv |\cdot|$  auf  $\mathbb{R}$

(e) Betrachte  $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$\|\cdot\|_{L^2} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}$$

die  $L^2$ -Norm.

(f) Betrachte  $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$\|\cdot\|_{\infty} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \mapsto \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

die Maximalnorm auf  $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ .

B) Metrische Räume sind hausdorffsch.

Def. 22.6

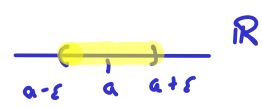
Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $a \in M$  und  $\varepsilon > 0$ .

Wir nennen  $\mathcal{U}_\varepsilon(a) := \{x \in M \mid d(x, a) < \varepsilon\}$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .

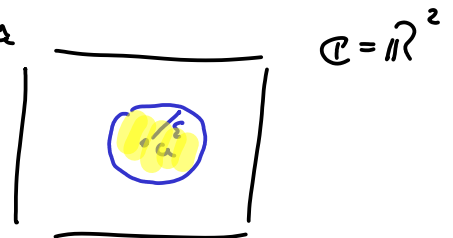
Bsp. 22.7: Sei  $V$  ein normierter Raum,  $a \in V$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Dann:  $\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$ .

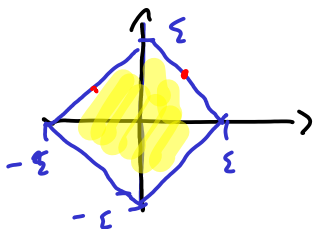
z.B.:  $V = \mathbb{R}$ ,  $\|\cdot\| = |\cdot| \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$   
 wie in 13.2 

z.B.:  $V = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2 \cong |\cdot|$  über  $\mathbb{C}$

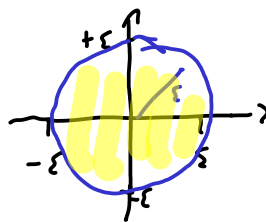
$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - a| < \varepsilon\}$  wie in 13.2  
 = Kreis um  $a$  mit Radius  $\varepsilon$



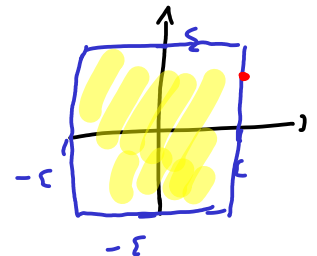
z.B.:  $V = \mathbb{R}^2$



$\mathcal{U}_\varepsilon(0)$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$



$\mathcal{U}_\varepsilon(0)$  bzgl.  $\|\cdot\|_2$



$\mathcal{U}_\varepsilon(0)$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$





⑥ Sei  $M$  ein beliebiges metrischer Raum.

$\Rightarrow M$  und  $\emptyset$  sind offen und abgeschlossen in  $M$

⑦ Sei  $M$  ein metr. Raum,  $U \subseteq W \subseteq M$  und  $a \in U$ .

Wenn  $a$  innerer Pkt von  $U$ , dann ist  $a$  innerer Pkt von  $W$ .

Dann:  $\exists U_\varepsilon(a) \subseteq U \subseteq W$ .

⑧  $\mathbb{Q}$  ist weder offen noch abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ .

Dann: jede reelle Zahl und jede Umgebung dieser Zahl enthält sowohl rationale, als auch irrationale Zahlen.

### Lemma 22.11:

Sei  $M$  ein metr. Raum,  $a \in M$  und  $\varepsilon > 0$ .

Dann:  $U_\varepsilon(a)$  ist offen in  $M$ .

Beweis:

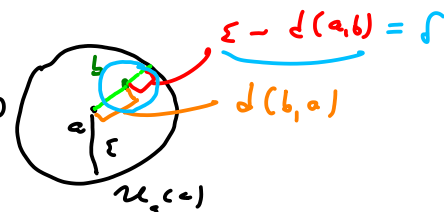
Sei  $b \in U_\varepsilon(a)$ . Setze:  $\delta := \varepsilon - d(a,b) > 0$

Zeige:  $U_\delta(b) \subseteq U_\varepsilon(a)$ , d.h.  $b$  innerer Pkt. von  $U_\varepsilon(a)$

$$\text{Sei } x \in U_\delta(b) \Rightarrow d(x,a) \leq \underbrace{d(x,b)}_{< \delta} + d(b,c) < \delta + d(b,c) \quad \parallel$$

$$x \in U_\varepsilon(a) \quad \square$$

$$(\varepsilon - d(a,b)) + d(b,c) = \varepsilon \quad \square$$



### Prop. 22.12:

Sei  $M$  ein metrischer Raum.

① Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen in  $M$ .

② Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen in  $M$ .

③ Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen in  $M$ .

④ Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen in  $M$ .

Beweis (a) Seien  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$  offen in  $\mathbb{R}$ , und  $a \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ .

$$\Rightarrow a \in \mathcal{O}_i \Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0 : \mathcal{U}_{\varepsilon_i}(a) \subseteq \mathcal{O}_i$$

Setze:  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_{\varepsilon}(a) \subseteq \mathcal{U}_{\varepsilon_i}(a) \subseteq \mathcal{O}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_{\varepsilon}(a) \subseteq \mathcal{O}_1 \cap \dots \cap \mathcal{O}_n \Rightarrow a \text{ ist int. Pkt. von } \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$

(b) Seien  $\mathcal{O}_i$  offen in  $\mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , und  $a \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ .

$$\Rightarrow \exists j \in I : a \in \mathcal{O}_j \underset{\mathcal{O}_j \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_{\varepsilon}(a) \subseteq \mathcal{O}_j \underset{\supseteq}{\Rightarrow} \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

$$\Rightarrow a \text{ ist int. Pkt. von } \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$

(c) Seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A_i \text{ ist offen in } \mathbb{R} \text{ f\u00fcr } i = 1, \dots, n$$

$$\stackrel{\text{(a)}}{\Rightarrow} \bigcup_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus A_i) \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \setminus \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \text{ ist abgeschl. in } \mathbb{R}$$

(d) Seien  $A_i \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen f\u00fcr  $i \in I$ .

$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A_i \text{ ist offen in } \mathbb{R} \quad \forall i \in I$$

$$\stackrel{\text{(b)}}{\Rightarrow} \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i) \text{ ist offen in } \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \setminus \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ist abgeschlossen in } \mathbb{R} \quad \square$$

Bsp. 20.13:

$U_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  ist offen in  $\mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

$\Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} U_n = \bigcap_{n \geq 1} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$  ist **nicht offen** in  $\mathbb{R}$

denn 0 ist kein inn. Pkt. von  $\{0\}$ .

Korollar 22.13

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $U \subseteq M$ .

(a)  $\bar{U} := \bigcap_{\substack{A \subseteq M \\ A \text{ abgeschlossen in } M \\ U \subseteq A}} A =$  die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $M$ , die  $U$  enthält  
 $\hat{=}$  Abschluss von  $U$  in  $M$

(b)  $\overset{\circ}{U} := \bigcup_{\substack{\sigma \subseteq U \\ \sigma \text{ offen in } M}} \sigma =$  die größte offene Teilmenge von  $M$ , die in  $U$  enthalten ist  
 $\hat{=}$  das Innere von  $U$

Beweis:

(a)  $\bar{U}$  ist nach Prop. 22.10 abgeschlossen in  $M$

und nach Def. ist  $\bar{U}$  in jedem abf.  $\forall M$  von  $M$  enthalten, die auch  $U$  enthält

(b) analog.

□

# D) Häufungspunkte und Randpunkte

Def. 22.15: Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $U \subseteq M$ ,  $a \in M$ .

(a)  $a$  heißt **Häufungspunkt** von  $U$

$$: (\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in U \setminus \{a\} : 0 < d(x, a) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

Notation:  $HP(U) := \{x \in M \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } U\}$

(b)  $a$  heißt **Randpunkt** von  $U$

$$: (\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(a) \cap (M \setminus U) \neq \emptyset$$

Notation:  $\partial U := \{x \in M \mid x \text{ ist Randpunkt von } U\} = \text{Rand von } U$

Beispiel 22.16:

(a)  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $d =$  diskrete Metrik, d.h.  $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

$$U = U_1(0) = \{x \in M \mid d(x, 0) < 1\} = \{0\} \quad \text{offen in } M$$

Was ist der Rand von  $U = U_1(0)$ ?

$$\text{Sei } x \in \partial U_1(0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap U \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (M \setminus U)$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{\uparrow} \varepsilon=1 \quad \underbrace{U_1(x) \cap \{0\} \neq \emptyset \neq U_1(x) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})}_{\substack{\text{"} \\ \{x\}}}$$

$$\downarrow \\ x=0$$

$$\downarrow \\ x \neq 0$$

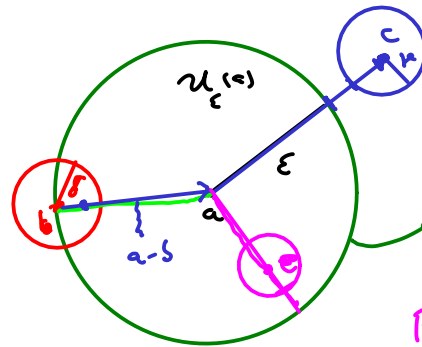
Also:  $\partial U = \emptyset$

Beachte:  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) = 1\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \neq \emptyset = \partial U_1(0)$

① Sei  $V$  ein normierter Raum,  $a \in V$  und  $\varepsilon > 0$ .

$$\Rightarrow \delta \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid \underbrace{d(x, a)}_{\|x - a\|} = \varepsilon\}$$

z.B.:  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$



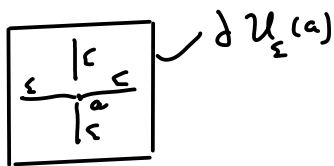
$$\beta := \frac{d(c, a) - \varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow \mathcal{U}_\beta(c) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \emptyset$$

$$\beta := \frac{\varepsilon - d(c, a)}{2} > 0 \Rightarrow \mathcal{U}_\beta(c) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a)) \neq \emptyset$$

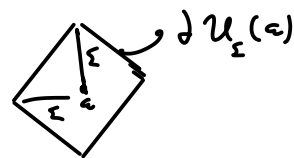
$$\cdot b \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a) \Rightarrow \mathcal{U}_\delta(b) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a)) \neq \emptyset$$

$$\cdot \underline{b + (a-b) \cdot \frac{\delta}{2 \cdot \varepsilon}} \in \mathcal{U}_\delta(b) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(a) \neq \emptyset$$

z.B.:  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

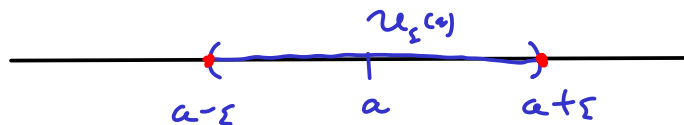


z.B.:  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$



z.B.:  $V = \mathbb{R}$ ,  $\|\cdot\| = |\cdot|$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{a + \varepsilon, a - \varepsilon\}$$



### Prop. 22.17

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $U \subseteq M$ .

①  $\overset{\circ}{U}$  = Menge der inneren Punkte

②  $\bar{U} = U \cup \delta U$

③  $\bar{U} = U \cup \text{HP}(U)$

Bsp. 22. 18:

(a) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$



$$\Rightarrow \partial(a, b) = \underline{\{a, b\}}, \quad \overline{(a, b)} = \underline{[a, b]}$$

(b) Sei  $V$  ein normierter Raum,  $a \in V$  und  $\varepsilon > 0$ .

$$\Rightarrow \overline{U_\varepsilon(a)} = U_\varepsilon(a) \cup \partial U_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid \underbrace{d(x, a)}_{\|x-a\|} \leq \varepsilon\}$$

$$\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a)$$

$$\Rightarrow V \setminus \overline{U_\varepsilon(a)} = \{x \in V \mid d(x, a) > \varepsilon\}$$

$$V \setminus U_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid d(x, a) \geq \varepsilon\}$$

(c)  $M = \mathbb{R}$ ,  $d(\cdot, \cdot) = |\cdot - \cdot|$ :

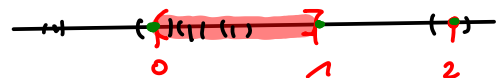
$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$$

(d)  $M = \mathbb{R}$ ,  $d(\cdot, \cdot) = |\cdot - \cdot|$ :

$$U = (0, 1] \cup \{2\}$$



$$\Rightarrow \partial U = \{0, 1, 2\}$$

$$HP(U) = [0, 1]$$

$$\overline{U} = U \cup \partial U = [0, 1] \cup \{2\} = U \cup HP$$

Beweis von 22.17:

(a) Es gilt:  $\overset{\circ}{U} = \bigcup_{\substack{O \subseteq U \\ O \text{ offen}}} O =$  größte offene Teilmenge von  $U$

Satz:  $O := \{x \in M \mid x \text{ ist innerer Pkt von } U\} \subseteq U$

Zielf:  $O$  ist offen

Sei  $a \in O \Rightarrow a$  ist innerer Pkt von  $U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \subseteq U$

Da  $U_\varepsilon(a)$  offen ist, gilt:  $b \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow b$  ist innerer Pkt von  $U_\varepsilon(a) \Rightarrow b$  ist innerer Pkt von  $U \Rightarrow b \in O$   
 $\Rightarrow U_\varepsilon(a) \subseteq O \Rightarrow O$  ist offen in  $M$

Also:  $O \subseteq \overset{\circ}{U}$ , weil  $\overset{\circ}{U} =$  größte offene Teilmenge von  $U$

Zielf:  $\overset{\circ}{U} \subseteq O$ , d.h. alle Punkte in  $\overset{\circ}{U}$  sind innere Punkte von  $U$

$\overset{\circ}{U}$  ist als Vereinigung offener Mengen offen  
 $\Rightarrow (b \in \overset{\circ}{U} \Rightarrow b \text{ ist innerer Pkt von } \overset{\circ}{U})$   
 $\Rightarrow b \text{ ist " " " " } U \Rightarrow b \in O)$

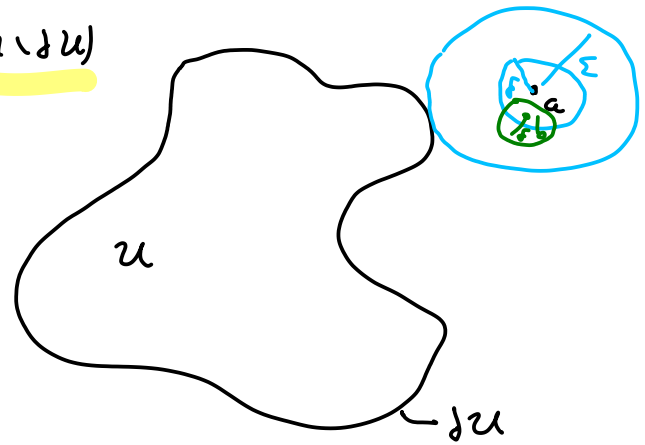
(b) Satz:  $A := U \cup \partial U \Rightarrow U \subseteq A$

Zielf:  $A$  ist abgeschlossen in  $M$ , d.h.  $M \setminus A$  ist offen

$$M \setminus (U \cup \partial U) = (M \setminus U) \cap (M \setminus \partial U)$$

Sei  $a \in M \setminus A = (M \setminus U) \cap (M \setminus \partial U)$   
 $\Rightarrow a \notin \partial U$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \cap U = \emptyset$   
 • d.  $U_\varepsilon(a) \cap (M \setminus U) = \emptyset$



Beweis:  $a \in (M \setminus U) \cap U_\varepsilon(a)$   
 $\Rightarrow U_\varepsilon(a) \cap U = \emptyset$   
 $\Rightarrow U_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus U$

Satz:  $\delta := \frac{\varepsilon}{2} > 0$  und  $b \in U_\delta(a)$   
 $\Rightarrow U_\delta(b) \subseteq U_{2\delta}(a) = U_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus U \Rightarrow U_\delta(b) \cap U = \emptyset$

$$\Rightarrow b \notin \partial U \Rightarrow b \notin \partial U \cup U = A \Rightarrow b \in \mathbb{R} \setminus A$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \text{ offen in } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R}$$

Also:  $\bar{U} = \bigcap_{\substack{U \subseteq \tilde{A} \\ \tilde{A} \text{ abgesch.} \\ \text{in } \mathbb{R}}} \tilde{A} \subseteq A$

Sei nun also  $B$  eine abgeschlossene Menge in  $\mathbb{R}$  mit  $U \subseteq B$ .

Zeige:  $A \subseteq B$ , d.h.  $\partial U \subseteq B$ , d.h.  $\partial U \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \emptyset$   
 $U \cup \partial U$

Sei  $a \in \mathbb{R} \setminus B$ .

Da  $B$  abgeschlossen ist, gilt:  $\mathbb{R} \setminus B$  ist offen

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus B$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap U \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap B = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap U = \emptyset \Rightarrow a \notin \partial U$$

$$\Rightarrow \partial U \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$$

Also:  $A \subseteq \bigcap_{\substack{U \subseteq B \\ B \text{ abgesch.} \\ \text{in } \mathbb{R}}} B = \bar{U}$ .

Damit:  $A = \bar{U}$   
 $U \cup \partial U$

© Für  $a \in \mathbb{R} \setminus U$  gilt:  
 $a \in \text{HP}(U) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow a \in \partial U$

Also:  $\text{HP}(U) \setminus U = \partial U \setminus U$

$\Rightarrow \bar{U} = U \cup (\partial U \setminus U) = U \cup (\text{HP}(U) \setminus U) = U \cup \text{HP}(U)$

⑥



# D) Kompakte Mengen in metrischen Räumen

Def. 22.19:

Sei  $M$  ein metrischer Raum und  $U \subseteq M$ .

(a)  $U$  heißt **beschränkt**  $(\Leftrightarrow) \exists r > 0$  und  $a \in M : \forall x \in U : d(x, a) < r$

$(\Leftrightarrow) \exists r > 0$  und  $a \in M : U \subseteq U_r(a)$

(b) Eine Familie  $(U_i)_{i \in I}$  offener Mengen heißt eine **offene Überdeckung** von  $U$ , wenn  $U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ .

(c)  $U$  heißt **kompakt**  $(\Leftrightarrow)$  jede offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $U$  besitzt eine **endliche Teilüberdeckung**  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  mit  $i_1, \dots, i_n \in I$ .

Beispiel 22.20:

(a) Intervalle mit endlichen Intervallmengen sind beschränkt.

(b) Jede  $\varepsilon$ -Umgebung in einem metr. Raum ist beschränkt.

(c) Endliche Teilmengen eines metr. Raumes sind kompakt.

(d) Das offene Intervall  $(0, 1)$  ist nicht kompakt,

denn:  $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, 1)$  hat keine endliche Teilüberdeckung.

Satz 22.21

In einem metr. Raum sind **kompakte** Mengen immer **beschränkt** und **abgeschlossen**.

Beweis: Sei  $A \subseteq M$  kompakt.

Zunächst:  $A$  ist beschränkt.

Es gilt:  $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_1(x)$

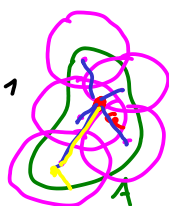
Wähle  $a \in A$  fest. Setze:  $r = \max\{d(x, a) \mid x \in A\} + 1$

Sei  $x \in A \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in U_1(x_i)$

$\Rightarrow d(x, a) \leq d(x, x_i) + d(x_i, a) \leq 1 + d(x_i, a) \leq r$

$A$  kompakt

$\Downarrow$   
 $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_1(x_i)$



Zielp:  $A$  ist abgeschlossen, d.h.  $\mathbb{R} \setminus A$  ist offen.

Sei  $a \in \mathbb{R} \setminus A$ . z.z.:  $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$

Prop. 22.8 ( $\mathbb{R}$  ist hausdorffsch)

$$\Rightarrow \forall x \in A : \exists \varepsilon_x > 0 : \mathcal{U}_{\varepsilon_x}(x) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_x}(a) = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_{\varepsilon_x}(x)$$

$\Rightarrow$   $A$  kompakt  $\exists x_1, \dots, x_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$

Setze:  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\} > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap A &\subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \underbrace{(\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i))}_{=\emptyset} = \emptyset \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$$

Damit:  $\mathbb{R} \setminus A$  offen, d.h.  $A$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ .  $\square$

# F) Folgen in metrischen Räumen

Def. 22.22 Sei  $M$  ein metrischer Raum.

- (a) Eine **Folge** in  $M$  ist eine Abb.  $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow M$ . Notation:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \alpha(n)$ .
- (b)  $a \in M$  heißt **Grenzwert** von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon: d(a_n, a) < \varepsilon$ .  
Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$ .
- (c)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **konvergent**  $\Leftrightarrow \exists a \in M: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$   
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **divergent**  $\Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nicht konvergent
- (d)  $M = \text{normierter Raum}$ :  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **Nullfolge**  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (e)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **Cauchy-Folge**  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n > m \geq N_\varepsilon: d(a_n, a_m) < \varepsilon$
- (f)  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots \Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  heißt **Teilfolge** von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- (g)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **beschränkt**  $\Leftrightarrow \exists r > 0, a \in M: \forall n \in \mathbb{N}: d(a_n, a) < r$

## Proposition 22.23:

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  &  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $M$ .

- (a)  $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow d(a_n, a) \rightarrow 0$
- (b) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
- (c)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent  $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge
- (d) Cauchy-Folgen (und konvergente Folgen) sind beschränkt.
- (e)  $a_n \rightarrow a \Rightarrow$  jede Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a$
- (f)  $M$  normierter Raum  $\wedge a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b$   
 $\Rightarrow a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b \wedge \lambda \cdot a_n \rightarrow \lambda \cdot a$
- (g)  $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \Rightarrow d(a_n, b_n) \rightarrow d(a, b)$

Beweis: Wörtlich wie in 1-dim. Analysis mit  $d(x, y)$  bzw.  $\|x - y\|$  statt  $|x - y|$ .

z.B. (c):  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folge in  $\mathbb{R}^M \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^M: a_n \rightarrow a$   
 Sei nun  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{2}}: \forall n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$   
 Setze:  $N_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ . Sei nun  $n > m \geq N_\varepsilon$   
 $\Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist CF.  
 $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \varepsilon$

Bsp. 22.24:  $a_n = \begin{pmatrix} \frac{\cos(n)}{2^n} \\ \frac{\sin(n)}{2^n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad d(\cdot, \cdot) = \|\cdot - \cdot\|_2$

Zu zeigen:  $a_n \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d(a_n, a) = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\cos(n)}{2^n} \\ \frac{\sin(n)}{2^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\cos(n)}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{\sin(n)}{2^n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2(n) + \sin^2(n)}{2^{2n}}} = \sqrt{\frac{1}{2^{2n}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Lemma 22.25 (Folgenkriterium für Häufungspunkte)

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $U \in \mathcal{T}$  und  $a \in M$ .

Dann:  $a \in HP(U) \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U \setminus \{a\} : a_n \rightarrow a$

Beweis: Wörtlich wie im Prop. 13.4. □

Beispiel 22.26:

$\mathbb{R}$  als metr. <sup>Raum</sup> mit  $d(\cdot, \cdot) = |\cdot - \cdot|$ ,  $U = [0, 1] \cup \{2\}$

$\implies HP(U) = [0, 1]$

Satz 22.27:

Sei  $M$  ein metr. Raum und  $U \subseteq M$ .

Dann:  $\bar{U} = \{a \in M \mid \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U : a_n \rightarrow a\}$   
 $=$  Menge der Grenzwerte von Folgen in  $U$ .

Beweis:

" $\supseteq$ " Sei  $a$  GW einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $U$ .

1. Fall:  $a \in U \implies a \in U \subseteq \bar{U} \implies a \in \bar{U}$

2. Fall:  $a \notin U \implies a_n \neq a \forall n \in \mathbb{N} \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U \setminus \{a\}$

mit  $a_n \rightarrow a \xrightarrow{22.25} a \in HP(U) \subseteq \bar{U} \xrightarrow{22.27} a \in \bar{U}$

" $\subseteq$ " Sei  $a \in \overline{U} \stackrel{22.17}{=} U \cup \text{HP}(U)$

1. Fall:  $a \in U \Rightarrow a_n := a \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n = a \xrightarrow{} a$   
 $\Downarrow$   
 $a \in \text{r.S.}$

2. Fall:  $a \in U \Rightarrow a \in \overline{U} \setminus U \stackrel{22.17}{\subseteq} \text{HP}(U) \Rightarrow a$  ist HP von  $U$

$\stackrel{21.25}{\Rightarrow} \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $U \setminus \{a\} \subseteq U$  mit  $a_n \rightarrow a$

$\Rightarrow a \in \text{r.S.}$

□

Bsp. 22.28:

$M = \mathbb{R}$  metr. Raum mit  $d(\cdot, \cdot) = |\cdot - \cdot|$ ,  $U = (0, 1] \cup \{2\}$

$\Rightarrow \overline{U} = [0, 1] \cup \{2\}$

Kor. 22.29: (Folgekriterium für Abgeschlossenheit)

Sei  $M$  ein metrischer Raum und  $U \subseteq M$ .

Dann:  $U$  ist abgeschlossen in  $M$

$(\Leftrightarrow) \nexists$  Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$  mit  $a_n \rightarrow c \in M$  gilt:  $a \in U$

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Sei  $U$  abgeschlossen und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$ ;  $a_n \rightarrow a \in M$ .

$\stackrel{22.17}{\Rightarrow} a \in \overline{U} \stackrel{\text{ÜA}}{=} U$   
 $\uparrow$   
 $U$  abgskl.

" $\Leftarrow$ " 22.27  $\Rightarrow \overline{U} = \{a \in M \mid \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \rightarrow a\} \subseteq U \subseteq \overline{U}$   
vov.

$\Rightarrow U = \overline{U}$ , also abgeschlossen in  $M$ .

□



