Analysis 1

§1 Etwas Logik

① Begriff : Aussage

② Operationen für Aussagen

- Negation: $A \rightsquigarrow \neg A$ nicht A
- Konjunktion: $A, B \rightsquigarrow A \wedge B$ A und B
- Disjunktion: $A, B \rightsquigarrow A \vee B$ A oder B
- Äquivalenz: $A, B \rightsquigarrow A \Leftrightarrow B$ genau dann A, wenn B
- Folgerung / Implikation: $A, B \rightsquigarrow A \Rightarrow B$ wenn A, dann B

Wahrheitstafel

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	- - - - -
w	w	w	w	
w	f	f	w	
f	w	f	w	
f	f	f	f	

(3) Quantoren

$\forall$ $\hat{=}$ für alle

$\exists$ $\hat{=}$ es gibt

$\exists_1$ $\hat{=}$ es gibt genau ein

$\nexists$ $\hat{=}$ es gibt kein

(4) Negation

- Alle Autos haben 4 Türen.

$\forall x \in \{\text{Autos}\} : \boxed{x \text{ hat 4 Türen}}$

- Nicht (alle Autos haben 4 Türen).

$\exists x \in \{\text{Autos}\} : \neg(x \text{ hat 4 Türen})$

$\exists x \in \{\text{Autos}\} : \boxed{x \text{ hat nicht 4 Türen}}$

Bsp: Wahrheitswerte der Implikation

A	B	A $\Rightarrow$ B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

§ 2 Mengen

Was ist der Unterschied zwischen einer Familie und einer Menge?

$M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{1, 2\}$, $M_3 = \{1\}$

$I = \{1, 2, 3\}$

- $(M_i)_{i \in I} = (M_1, M_2, M_3)$ = Familie der M_i
- $\{M_i \mid i \in I\} = \{M_1, M_2, M_3\} = \{M_1, M_2\} = \{\{1\}, \{1,2\}\}$

  $\{1\} \in$, $1 \notin$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots)$
- Was ist eine Familie?

  $M : I \longrightarrow \{M_i \mid i \in I\}$

  mit $M(i) = M_i$

  $(M_i)_{i \in I}$

Bsp:

- $M = \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\} \}$

$$\begin{matrix} \cup & \cup & \cup \\ \emptyset & \{\emptyset\} & \{\{\emptyset\}\} \end{matrix}$$

- $M = \{1, 2\}$

$$N = P(M) \cup \{ \{N\} \mid \underline{N \in P(M)} \}$$

$$= \{ \underbrace{\underline{\emptyset}, \underline{\{1\}}, \underline{\{2\}}, \underline{\{1,2\}}}, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\} \}$$

Was bedeutet $M = \dot{\bigcup}_{i \in I} M_i$?

- $M = \bigcup_{i \in I} M_i$
- $\forall\, i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt: $M_i \cap M_j = \emptyset$

<u>Bsp:</u> ⓐ $I = \mathbb{N}$, $M_i = \{ i \}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$$

$$i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \{i\} \cap \{j\} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \dot{\bigcup}_{i \in I} M_i = \mathbb{N}$$

ⓑ $I = \mathbb{N}$, $M_i = \{ i, i+1 \}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{0, 1\} \cup \{1, 2\} \cup \{2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \ldots = \mathbb{N}$$

ist nicht disjunkt: Weil $M_0 \cap M_1 = \{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \neq \emptyset$

Frage: Unterschied zwischen $\longrightarrow$ und $\longmapsto$ bei Abbildungen?

$\longrightarrow$ trennt den Definitionsbereich vom Zielbereich z.B. $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\longmapsto$ trennt in der Abbildungsvorschrift das Element im Def.bereich von seinem Bild

z.B. $x \overset{}{\underset{f}{\longmapsto}} \underbrace{3x^5 - 1}_{= f(x)}$

Aufgabe (1): Sei A eine Aussage

(c) Beh: $(\neg A \Rightarrow f) \Leftrightarrow A$

A	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow f$
w	f	w
f	w	f

Aufgabe 2

(a) (1) Negieren: A: Studierende, die in der Mensa essen, haben eine Mensakarte.

$\neg A$: Es gibt einen Studierenden, der in der Mensa isst, aber kein Mensakarte hat.

A: $\forall\ x \in \{$Studierende, die in der Mensa essen$\}$: x hat Mensakarte

$\neg A$: $\exists\ x \in \{$ - - - - - - - - $\}$: x hat kein Mensakarte

(5) B: Es gibt keine kleinste ganze Zahl.

$\neg$B: Es gibt eine kleinste ganze Zahl.

(b) B: $\forall z \in \mathbb{Z}$: z ist nicht kleinste ganze Zahl

B: $\forall z \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z} : x < z$

$\neg$B: $\exists z \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x \geq z$

Beweise B:

Sei $z \in \mathbb{Z}$ beliebig gegeben.

Setze: $x := z - 1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad x = z - 1 < z$

$\}$

Aufgabe 3:

(a) $\forall m \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} : m = n \cdot n$

Für alle natürlichen Zahlen m gibt es eine natürliche Zahl n, so dass $m = n \cdot n$.

Jede natürliche Zahl m ist Quadrat einer natürlichen Zahl n.

(b) Zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es eine weitere rationale Zahl!

$\forall a, b \in \mathbb{Q} : a \neq b \quad \exists c \in \mathbb{Q} : \quad a < c < b$

oder

$b < c < a$

Bsp.:

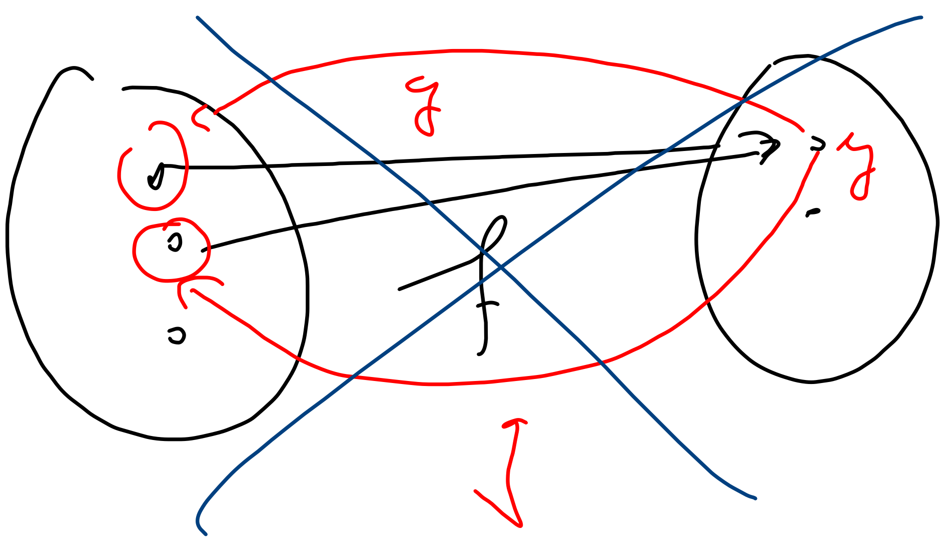
$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto x^2 = y$$

Kann ich die Wirkung von f umkehren?

für $y \in \operatorname{Im}(f)$

Kann man das x finden mit $f(x) = y$

Dann: $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(y) = x$



Vorsicht:

f^{-1} hat zwei Bedeutungen!

(1) Urbild: $f: M \longrightarrow N$ irgendeine Abbildung

& $B \subseteq N$ Teilmenge

$\Longrightarrow \quad f^{-1}(B) := \{ x \in M \mid f(x) \in B \}$

$=$ Urbild von B unter f

(2) Umkehrabbildung: $f: M \longrightarrow N$ bijektive Abbildung

$\Longrightarrow \quad \exists \; f^{-1}: N \longrightarrow M$ Abbildung mit

$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in N$

$\wedge \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in M$

Sei $f: M \to N$ bijektiv, $A \subseteq M$

Dann: • $f^{-1}: N \to M$ umkehrbar, eindeutig

• $(f^{-1})^{-1}(A)$ = Urbild von A unter f^{-1} $= \{ y \in N \mid f^{-1}(y) \in A \} = f(A)$

$y = f(f^{-1}(y)) \in f(A)$

• f^{-1} ist bijektiv

$\Rightarrow$ f^{-1} hat eine Umkehrabb. $(f^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow$ $f = (f^{-1})^{-1}: M \to N$

$\Rightarrow$ $(f^{-1})^{-1}(A) = \{ (f^{-1})^{-1}(x) \mid x \in A \}$

$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

$= f(A)$

Beachte g^{-1} = Umkehrabb. von g

hat die Eigenschaft:

$$g \circ g^{-1} = id \quad , \quad g^{-1} \circ g = id$$

Und g ist durch diese Eigenschaft festgelegt!

Also:
- $f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} = id_M \quad , \quad (f^{-1})^{-1} \circ f = id_N$
- $f^{-1} \circ f = id_M \quad , \quad f \circ f^{-1} = id_N$

$\Rightarrow$ $(f^{-1})^{-1}$ und f sind Umkehrabb. von f^{-1}

$\Rightarrow$ (Eindeutigkeit) $\quad f = (f^{-1})^{-1}$

$0 \neq x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad (x^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$

$= x$

Bsp. für vollständige Induktion

$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2 \cdot n^2 + n$$

Bsp: $n = 1$: $\quad 3 = 2 \cdot 1^2 + 1$

$n = 2$: $\quad 3 + 7 = 2 \cdot 2^2 + 2$

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} (4 \cdot k - 1) = 2n^2 + n$$

$$\boxed{A(n): \quad 3 + 7 + \cdots + (4n - 1) = 2 \cdot n^2 + 2} \quad \forall n \geq 1$$

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$: $\quad 3 = 2 \cdot 1^2 + 1 \quad \checkmark$

$n \mapsto n+1$: $\quad \underbrace{3 + 7 + \cdots + (4n - 1)}_{(I)} + (4(n+1) - 1) \overset{\text{Ind}}{=}$

$$(2 \cdot n^2 + n) + (4n + 4 - 1) =$$

$$2n^2 + 5n + 3 =$$

$$2 \cdot (n^2 + 2n + 1) + (n + 1) = 2 \cdot (n+1)^2 + (n+1) \quad \boxed{\Sigma}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 2n^2+2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(4k-1) = (4(n+1)-1) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(4k-1)}_{=\,2n^2+2}$$

$$\left.\begin{array}{ccc}
\{A\subseteq M \mid y\in A\} & \longrightarrow & \mathcal{P}(N) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
A & \xmapsto{\;f\;} & A\setminus\{y\} \\
B\cup\{y\} & \xleftarrow[\;g\;]{} & B
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f\circ g = id \\ g\circ f = id \end{array}$$

- Kartesisches Produkt
- Binomischer Lehrsatz Indexverschiebung
- Äquivalenzklassen & Repräsentanten
- Rep. 25.4 → auf Äqu. verlegt !!!
- Vollständige Induktion (letzte Schritt)

Bsp. Vollständige Induktion

Beh.: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

d.h. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$

$n \mapsto n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + (n+1) \underset{\text{Ind}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n+1) \cdot 2}{2}$

$= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}$ $\square$

Bh:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\cdot\binom{n}{k} = \boxed{2^{n-1}\cdot(n+2)} \quad \forall n\geq 0$$

Bew:

n = 0:

$$\sum_{k=0}^{0} (k+1)\cdot\binom{n}{k} = (0+1)\cdot\binom{n}{0} = 1 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 2^{0-1}\cdot(0+2)$$

n ↦ n+1:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\cdot\binom{n+1}{k} = (n+2)\cdot\binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\underbrace{\binom{n+1}{k}}_{=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}}$$

$$= (n+2)\cdot\binom{n+1}{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k}}_{= I.V.} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k-1}$$

$$= \cancel{(n+2)} + 2^{n-1}\cdot(n+2) + 2^{n-1}\cdot(n+2) + 2^{n} - \cancel{(n+2)}$$

$$= 2\cdot\left(2^{n-1}\cdot(n+2)\right) + 2^{n}$$

$$= 2^{n}\cdot(n+2) + 2^{n}\cdot 1 = 2^{n}\cdot((n+2)+1) = 2^{n}\cdot(n+3)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\cdot\binom{n}{k-1} = \sum_{k=-1}^{n-1} (k+2)\cdot\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{(k+2)}^{((k+1)+1)}\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\cdot\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot 1^{k}\cdot 1^{n-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k}}_{\text{Ind.}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{k}\cdot 1^{n-k}}_{\shortparallel} - \underbrace{\binom{n}{n}\cdot 1^{n}\cdot 1^{0}}_{=1} - \underbrace{(n+1)\cdot\binom{n}{n}}_{=n+1}$$

$$= 2^{n-1}\cdot(n+2) + (1+1)^{n} - (n+2)$$

$$= 2^{n-1}\cdot(n+2) + 2^{n} - (n+2)$$

Bsp. für eine ÄR:

$$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$\ni$ x, y $\qquad x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y$ ist gerade

Zeige: $\sim$ ist eine ÄR

(R1) $x \in M \Rightarrow x - x = 0$ ist gerade $\Rightarrow x \sim x$

(R2) $x, y \in M$ mit $x \sim y \Rightarrow x - y$ ist gerade
$\Rightarrow -(x-y) = y - x$ ist gerade $\Rightarrow y \sim x$

(R3) $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$
$\Rightarrow x - y$ und $y - z$ sind gerade

$\Rightarrow (x-y)+(y-z) = x - z$ ist gerade $\Rightarrow x \sim z$ ☐

Damit: $\overline{2} = \{x \in M \mid x \sim 2\} = \{x \in M \mid x - 2 \text{ ist gerade}\}$
$= \{x \in M \mid x \text{ ist gerade}\} = \{0, 2, 4, 6\} = \overline{0} = \overline{4} = \overline{6}$

$\overline{1} = \{x \in M \mid x \sim 1\} = \{x \in M \mid x - 1 \text{ ist gerade}\} = \{x \in M \mid x \text{ ist ungerade}\}$
$= \{1, 3, 5\} = \overline{3} = \overline{5}$

Dabei: $M/\sim \; = \{\overline{x} \mid x \in M\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\} = \underline{\underline{\{\overline{0}, \overline{1}\}}} = \{\{0,2,4,6\}, \{1,3,5\}\}$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k}$$

$$=$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot x^{k-1+1} \cdot y^{n-(k-1)}$$

Kartesisches Produkt

$$M \times N = \{ (m,n) \mid m \in M,\ n \in N \}$$

Bsp: $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{\square, *\}$

$$\Rightarrow \quad M \times N = \{ (0,\square), (1,\square), (2,\square), (0,*), (1,*), (2,*) \}$$

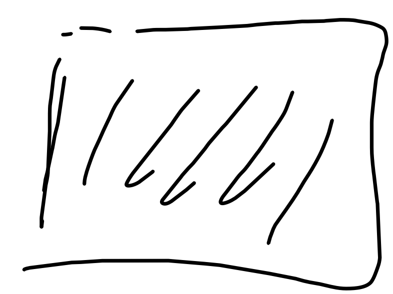
Bsp: $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \quad M \times N = \{ (m,n) \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \}$$

$$(1,1),\ (3,-1),\ (0,5)$$

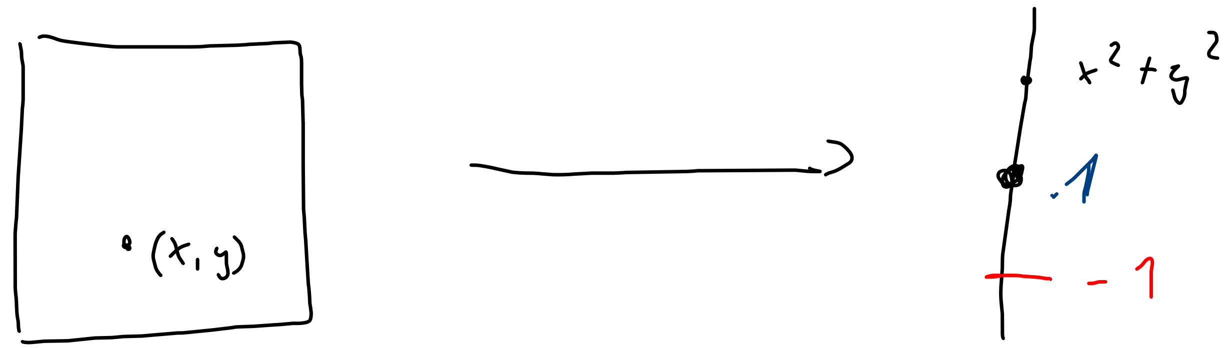
Bsp: $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad M \times N = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2 =$$



<u>Bsp:</u> $f : \overset{= \mathbb{R}^2}{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$

ist f injektiv, surjektiv?



Gesucht (x,y) mit $1 = f(x,y) = x^2 + y^2$!

<u>z.B.:</u> $(1,0) = (x,y)$; $(0,1) = (x', y')$

$\Longrightarrow f(1,0) = 1 = f(0,1)$

aber $(1,0) \neq (0,1)$

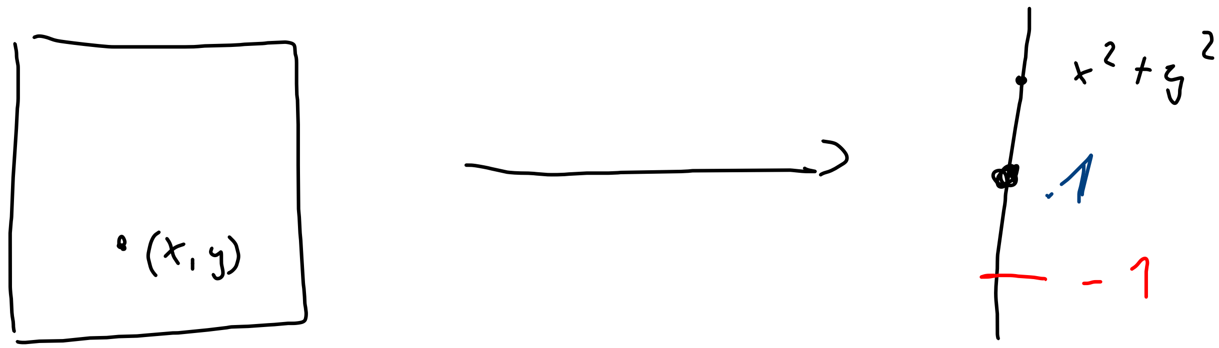
$\Longrightarrow f$ nicht injektiv

<u>Beachte:</u> $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 \Longrightarrow \nexists (x,y) : f(x,y) = -1$

$\Longrightarrow f$ nicht surjektiv

Bsp: $f: \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}_{=\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R};\ (x,y) \longmapsto x^2+y^2$

ist f injektiv, surjektiv?



Gesucht (x,y) mit $1 = f(x,y) = x^2+y^2$!

z.B.: $(1,0) = (x,y)$; $(0,1) = (x',y')$

$\Longrightarrow f(1,0) = 1 = f(0,1)$

aber $(1,0) \neq (0,1)$

$\Longrightarrow$ f nicht injektiv

Beachte: $f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0 \Longrightarrow \nexists\, (x,y): f(x,y) = -1$

$\Longrightarrow$ f nicht surjektiv

Fragen:

- [x] Ordnungen, die keine Totalordnungen sind
- [x] Supremum / Infimum (Charakterisierung)
- Indexverschiebung
- [x] Beweis von Satz 9.4 (a)
- Angeordnete Körper
- Wohldefiniertheit
- [x] Bsp. 9.7 (c)
- [x] Beweis eines Satzes ohne Schulwissen!

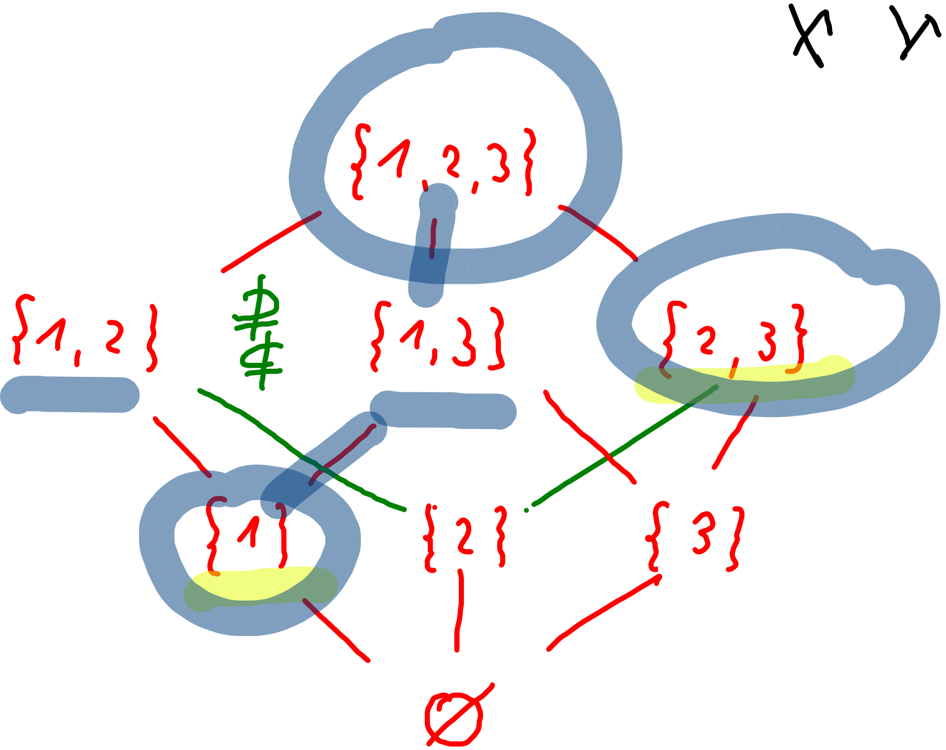
Ordnungsrelationen

- $M = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$

$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\cup$

$X \quad Y$



Totalordnung

Definition: $X \leq Y \;:\iff\; X \subseteq Y$

(O1) $X \in M \Rightarrow X \subseteq X \Rightarrow X \leq Y$

(O2) $X \leq Y$ und $Y \leq X$

$\Rightarrow X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$

(O3) $X \leq Y$ und $Y \leq Z$

$\Rightarrow X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z \Rightarrow X \leq Z$

Alternative: $X \leq Y \;:\iff\; Y \subseteq X$

$\longrightarrow$ liefert Ordnungsrelation

- $M = \{ (0, x) \mid x \in \mathbb{R}_{>0} \}$

$$\underset{A,\,B}{\cup}$$

$A \leq B \;:\Leftrightarrow\; A \subseteq B$ ist Ordnungsrelation

$\underset{\forall}{A, B} \in M \Rightarrow \underset{\forall}{a, b} > 0 : A = (0, a], \; B = (0, b]$

$\Rightarrow \quad a < b \quad \Rightarrow \quad \overset{A}{\overset{\shortparallel}{(0, a]}} \subseteq \overset{B}{\overset{\shortparallel}{(0, b]}} \quad \Rightarrow \quad A \leq B$

oder

$a > b \quad \Rightarrow \quad (0, a] \supseteq (0, b] \quad \Rightarrow \quad B \leq A$

<u>Also:</u> $\leq$ ist Totalordnung!

Supremum & Infimum

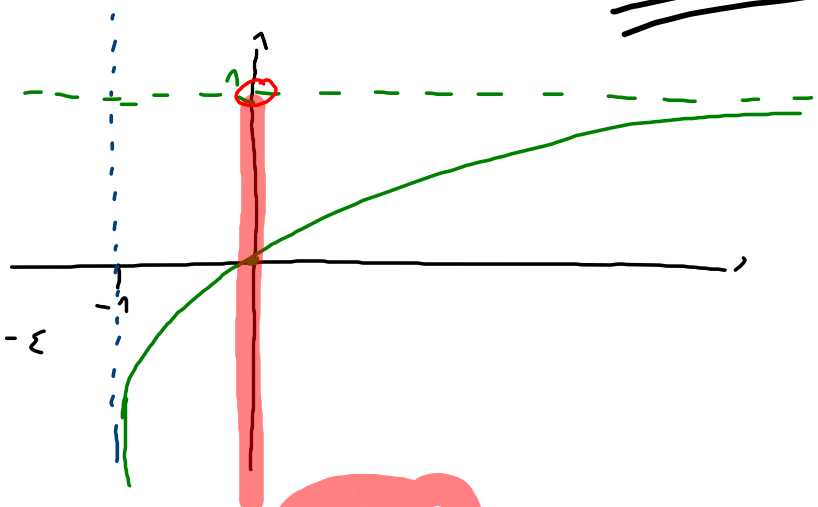
• $A = \left\{ \frac{x}{x+1} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\ x > -1 \right\}$

Hat A ein Sup. od. Inf.?

Betrachte: $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow A = \mathrm{Im}(f) = \{ f(x) \mid x \in (-1, \infty) \}$
$= \left\{ \frac{x}{x+1} \;\middle|\; x > -1 \right\} = (-\infty, 1)$

Beh.: • $\sup(A) = 1$
• A ist nach unten unbeschränkt



z.z.: $\sup(A) = 1$,
d.h. ① $\forall a \in A: \ a \leq 1$
② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A: \ a > 1 - \varepsilon$

zu ①: Sei $a \in A$ $\Rightarrow$ $\exists x > -1$: $a = \frac{x}{x+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{>0} < 1$

zu ②: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$ & $\exists n: 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$\Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 > -1 \Rightarrow \underbrace{1 - \frac{1}{x+1}}_{= a} > 1 - \varepsilon$ (mit $n \overset{!!}{=} x$)

$\Rightarrow a \in A$

Ziel: $\cancel{1} - \varepsilon < \cancel{1} - \frac{1}{x+1}$

$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < x$

Zeige: A ist nicht nach unten beschränkt.

Sei $s < 0$ beliebig gegeben.

z.z.: s ist keine untere Schranke für A

d.h. $\exists \underset{\substack{\| \\ 1-\frac{1}{x+1}}}{a} \in A: \; a < s$

Wähle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x < \frac{1}{1-s} - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{1 - \frac{1}{x+1}}_{\in A} < s$$

Wie finde ich x?

$$1 - \frac{1}{x+1} < s$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x+1} < s - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > 1 - s$$

$$\Leftrightarrow x + 1 < \frac{1}{1-s}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{1-s} - 1$$

$$\cdot\ B = \left\{ \frac{m+n}{m\cdot n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

$$\sup(B) = 2 \quad , \quad \inf(B) = 0$$

z.z.: (a) $\forall\, x \in B: \quad x \geq 0$

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in B: \boxed{0 + \varepsilon > x}$

$$0 < \frac{m+n}{m\cdot n} = \frac{m}{m\cdot n} + \frac{n}{m\cdot n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq 1}\,(>0) + \underbrace{\frac{1}{m}}_{\leq 1}\,(\to 0) \leq 2$$

Zu (a): (a) Sei $x \in B$

$$\Rightarrow \exists\, m, n: \; x = \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{m}}_{>0} > 0$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$.

Finde: m, n s.d. $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}_{=:x} < \varepsilon$

9.4 $\Rightarrow \exists\, N: \quad \frac{1}{N} < \varepsilon$

Setze: $n := m,\; m := 2N \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{N} < \varepsilon$ ☐

Beweis ohne Verwendung von Schulwissen

9.4 (a): $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{Z}: \quad n \leq x < n+1$

Beweis mit Schulwissen:

x = Dezimalzahl, d.h. $\exists n \in \mathbb{Z}: x = n, \ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow n$ tut's!

Beweis ohne Schulwissen

1. Fall: $0 \leq x < 1 \quad \Rightarrow \quad n = 0$ ✓

2. Fall: $1 \leq x \quad \overset{9.3}{\Longrightarrow} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad x < n \cdot 1 = n$

Setze: $M := \{ n \in \mathbb{N} \mid x < n \} \neq \emptyset$

$\overset{4.8}{\Longrightarrow} \exists m_0 \in M$ minimal. Setze: $n := m_0 - 1$

$\Longrightarrow n \leq x < m_0 = n+1$

3. Fall: $x < 0 \quad \Longrightarrow \quad -x > 0 \quad$ wende 2. Fall / 1. Fall an

3. Fall: $x < 0 \Rightarrow -x > 0$

$\underset{\text{1./2. Fall}}{\Rightarrow} \quad \exists\, m \in \mathbb{Z}: \quad m \leq -x < m+1$

$\Rightarrow \quad \underbrace{-(m+1)}_{\overset{!}{=}\, n} < \boxed{x \leq -m}_{=}$

Setze $\quad n := \begin{cases} -(m+1), & x < -m \\ -m, & x = -m \end{cases}$

$\Rightarrow \quad n \leq x < n+1$

13