Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2022, Blatt 5

Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 16.05.2022, 10:00

Aufgabe 18 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 17: Sei $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und seien $(p,q),(p',q') \in M$. Wir definieren

$$(p,q) \sim (p',q') \quad :\Longleftrightarrow \quad p + q' = p' + q.$$

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

(b) Zeige, dass durch

$$\overline{(p,q)} + \overline{(p',q')} := \overline{(p+p', q+q')}$$

auf $M/\sim$ eine wohldefinierte Operation $+$ definiert wird.
Zeige weiter, dass $(M/\sim, +)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 18: Beweise, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b')$$

und

$$(a,b) \cdot (a',b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Körper ist.

Aufgabe 19: Sei K ein Körper und $x, y \in K$.
Zeige, genau dann gilt $x^2 = y^2$, wenn $x \in \{-y, y\}$.

Aufgabe 20: Überprüfe für die folgenden Relationen zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ jeweils, ob sie reflexiv, antisymmetrisch oder transitiv sind. Welche der Relationen ist eine Ordnungsrelation? Ist diese dann ggf. auch eine Totalordnung?

(a) $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\middle|\; x \text{ teilt } y\right\}$.

(b) $R := \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid T(x) \subseteq T(y)\}$, wobei $T(n)$ die Menge der Primteiler von n ist.