Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2022, Blatt 6
Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 23.05.2022, 10:00

Aufgabe 24 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 21:

(a) Schreibe die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen:

(1) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 1 \lor (x-10)^2 < 4\}$

(2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < x\}$

(3) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x \geq 1\}$

(4) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 100 \land |x| < 20\}$

(b) Überprüfe für jede der Mengen, ob sie nach oben oder unten beschränkt ist, gib gegebenenfalls Supremum und Infimum an und entscheide, ob es sich jeweils um Maxima bzw. Minima der Menge handelt.

Aufgabe 22: [Minkowski-Summe]

Sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subseteq K$ Teilmengen, so dass $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Beweise, dass auch $\sup(A+B)$ existiert und $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$ gilt.

(b) Formuliere eine entsprechende Aussage für $\inf(A+B)$.

Aufgabe 23: Zeige, dass

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Finde einen ähnlichen Ausdruck für das Minimum.

Aufgabe 24:

(a) Die Menge $M = (-1,1)$ hat bezüglich der Standard-Anordnung $\leq$ der reellen Zahlen ein Supremum und ein Infimum. Finde eine Totalordnung $\leq_2$ auf $\mathbb{R}$, bezüglich der die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ weder ein Supremum noch ein Infimum hat.

(b) Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

(i) $z = 1 + 3i$ (ii) $z = \dfrac{4-i}{8+2i}$ (iii) $z = \dfrac{(1+i)^7}{(1-i)^4}$

(c) Bestimme die Polarkoordinaten von $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$.