Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2022, Blatt 7
Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 30. Mai 2022, 10:00

Aufgabe 25 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 25: Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ sind monoton, beschränkt, konvergent oder bestimmt divergent?

(a) $a_n = 5$

(b) $a_n = \frac{1}{(-1)^n}$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(d) $a_n = \frac{3}{n}$

(e) $a_n = n^2 - n$

(g) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(h) $a_n = \frac{n+1}{n}$

(i) $a_n = 2^n$

(j) $a_n = (-2)^n$

(k) $a_n = 3$ für n gerade, $a_n = 5$ für n ungerade

Aufgabe 26: Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.

(b) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{n^3}{1+2+3+\cdots+n}$.

(c) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n \cdot \left(2 - \frac{a_n}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 27: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Beweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) \;\text{ und }\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a)\right)$$

Aufgabe 28: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.