Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2022, Blatt 8

Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 13. Juni 2022, 10:00

Aufgabe 30 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 29: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a| < \varepsilon$.
Zeige, es gibt eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Aufgabe 30:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es sich um eine konvergente Folge handelt.

(b) Bleibt die Behauptung aus Aufgabenteil (a) korrekt, wenn wir die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ voraussetzen? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 31: Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimme ggf. ihren Grenzwert:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n \cdot \cos(n \cdot \pi)$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

Hinweis: in Teil b. schreibe $\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ als $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ für $A, B, C \in \mathbb{R}$ geeignet.

Aufgabe 32: Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

(b) Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ist konvergent.

(c) Die Grenzwerte von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stimmen überein.

Wie nennen den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *Eulersche Zahl* e.