Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2022, Blatt 9

Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 20. Juni 2022, 10:00

Aufgabe 36 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 33:

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen.
Zeige, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Zeige, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\sin(3x) = 3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin^3(x).$$

Aufgabe 34:

(a) Bestimme den Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot t^n$ sowie das Konvergenzverhalten an den Randpunkten.

(b) Bestimme den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^n \cdot t^n$.

Aufgabe 35:

(a) Berechne den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes für $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n)^2$

(b) Zeige, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

HINWEIS: Schaut euch den Beweis von Lemma 12.29 an.

(c) Zeige, die Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in $\mathbb{K}$ haben denselben Konvergenzradius.

Aufgabe 36:

(a) Bestimme für die folgenden Mengen jeweils die Menge ihrer Häfungspunkte:

(1) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. (2) $B = \mathbb{N}$. (3) $C = \left\{n + \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}, m \geq 1\right\}$.

(b) Gib ein Beispiel für eine Menge, die genau drei Häufungspunkte hat.