Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2022, Blatt 10

Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 27. Juni 2022, 10:00

Aufgabe 40 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 37: Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x^3-2x^2}{(x+2)\cdot(x^2+1)}}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x^5-9x^4+x^2-2x-3}{x^2-9}$.

Aufgabe 38:

(a) Verwende die ε-δ-Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto\sqrt{1-x^3}$ stetig in $[0,1]$ ist.

(b) Sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion und $L\in\mathbb{R}_{>0}$. Zeige, wenn $|f(x)-f(y)|\leq L\cdot|x-y|$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 39:

(a) Sei $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x):=\begin{cases}\frac{2^n}{n!} & \text{für } x=\frac{1}{n} \text{ mit } n\geq 1\\ 0 & \text{für } x\in[0,1]\backslash\{\frac{1}{n}\mid n\geq 1\}\end{cases}.$$

Bestimme (mit Beweis) sämtliche Punkte auf $[0,1]$, in denen f stetig ist.

(b) Zeige, die folgende Funktion hat eine Nullstelle

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\exp\left(x^3-x+\cos(x^2)\right)-2$$

Aufgabe 40: Zeige, ist $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Ist die Ausage auch noch richtig, wenn man auf eine der Voraussetzungen verzichtet?