

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 4. Juli 2022, 10:00

Aufgabe 44 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 41: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(x) = f(x + a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, daß es ein $b \in (0, a)$ gibt mit $f(b + \frac{a}{2}) = f(b)$.

Aufgabe 42: Zeige, die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 43:

(a) Zeige, eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

(b) Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ mit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\frac{x}{n}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 44:

(a) Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gelten soll.

(b) Folgere daraus das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

(c) Zeige für $x, y > 0$ und $a > 1$ die Ungleichung

$$\frac{\log_a(x) + \log_a(y)}{2} \leq \log_a\left(\frac{x + y}{2}\right).$$