Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2022, Blatt 12

Thomas Markwig — Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 11. Juli 2022, 10:00

Aufgabe 48 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 45: Für $n \in \{0,1,2\}$ sei

$$f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Welche der Funktionen sind stetig in $a = 0$, differenzierbar in $a = 0$, stetig differenzierbar auf $[0,\infty)$?

Aufgabe 46: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in a differenzierbar ist und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $x_n < a < y_n$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$. Zeige, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Hinweis, man verwende die Beschreibung der Differenzierbarkeit aus Bemerkung 17.6 c.

Aufgabe 47: Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Ungleichung

$$\sqrt{1+y} < 1 + \frac{y}{2}$$

für alle $y > 0$.

Aufgabe 48:

(a) Bestimme für die folgenden Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ den Definitionsbereich U und berechne ihre Ableitung:

(1) $f(x) = (x^2+1) \cdot \arctan(x)$.

(2) $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$.

(b) Berechne alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Wer möchte, darf sich mit der folgenden Zusatzaufgabe beschäftigen und darf seine Lösungsvorschläge auch gerne zur Korrektur einreichen. Die Beschäftigung mit der Aufgabe ist nicht verpflichtend und die Lösungen können auf Wunsch im Repetitorium besprochen werden.

Zusatzaufgabe:

(a) Zeige mit Hilfe der Funktion f_2 aus Aufgabe 45 und der Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\cdot\pi}$ und $y_n = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\cdot\pi}$, dass wir in Aufgabe 46 nicht auf die Bedingung $x_n < a < y_n$ verzichten können.

(b) Zeige, dass die Funktion f in Bemerkung 17.20 im Skript stetig, aber in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dazu betrachte man zwei Folgen $(\frac{k_n}{2^n})_n \in \mathbb{N}$ und $(\frac{k_n+1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $k_n \leq 2^n \cdot a < k_n + 1$, $k_n \in \mathbb{Z}$, und wende Aufgabe 46 an.