Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2022, Blatt 13
Paul Hege

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 18. Juli 2022, 10:00

Aufgabe 52 braucht als Präsenzaufgabe nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 49:

(a) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \log_a(x).$$

Untersuche, auf welchen Teilintervallen des Definitionsbereichs die Funktion streng monton wächst bzw. fällt, und untersuche das Grenzverhalten für $x \to 0$.

(b) Gegeben seien reelle Zahlen $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sowie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$

Bestimme den minimalen Wert von f und die Stelle $x \in \mathbb{R}$, an der dieser Wert angenommen wird.

Aufgabe 50: Sei $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung. Zeige, dass f dann stetig in 0 fortsetzbar ist.

Hinweis: man nehme an, dass f nicht stetig fortsetzbar ist und wende den Mittelwertsatz und das Cauchy-Kriterium für Folgen in geeigneter Weise an.

Aufgabe 51: Zeige, die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\geq 1}$ mit

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f, die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\geq 1}$ konvergiert aber nicht punktweise. Ist die Grenzfunktion differenzierbar?

Aufgabe 52:

(a) Berechne die folgenden Grenzwerte.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\cos(x)-x}{4x^2+x^3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$, $x > 1$.

(b) Berechne das vierte Taylorpolynom $T^4_{f,0}$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$ für

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{4x^4+x}.$$

Hinweis: Mit etwas Überlegung braucht man hier keine Ableitung zu berechnen!