

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 28. April 2025, 12:00

Die Aufgabe 12 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 9: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Finde in (b) zudem ein Beispiel, wo die Inklusion eine echte Inklusion ist.

Aufgabe 10: Seien M, N zwei nicht-leere Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Formuliere die folgende Aussage zunächst in Quantorenschreibweise und beweise sie anschließend:

f ist genau dann injektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen X und für alle Abbildungen $g : X \rightarrow M$ und $h : X \rightarrow M$ mit $f \circ g = f \circ h$ folgt, dass $g = h$ ist.

Aufgabe 11: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Für zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$a \equiv b \iff n \text{ teilt } a - b.$$

(a) Zeige, $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

(b) Zeige, die Äquivalenzklasse von a ist die Menge

$$[a] := a + n\mathbb{Z} := \{a + n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) Zeige, es gibt genau n paarweise verschiedene Äquivalenzklassen $[0], [1], \dots, [n-1]$.

Anmerkung: die Menge $\mathbb{Z}_n$ der Äquivalenzklassen wird derzeit in der Linearen Algebra 1 intensiv verwendet.

Aufgabe 12: Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^3 - 4$.

(b) $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\} : n \mapsto (-1)^n$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.