Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2025, Blatt 4

Paul Weiß

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 5. Mai 2025, 12:00

Aufgabe Nummer 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 13: Beweise mittels vollständiger Induktion die Aussage

$$n! > 2^n$$

für alle natürlichen Zahlen ab einer geeigneten Zahl n_0. Ab welcher?

Aufgabe 14: Sei M eine Menge und $A := \{f \mid f : \{0,1\} \to M \text{ Abbildung}\}$.
Zeige, dass A gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$ ist.

Aufgabe 15: Es sei $M = P(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen.Wir definieren folgende Relation auf M:

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, f : A \longrightarrow B \text{ bijektiv}$$

für $A, B \in M$.

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind äquivalent zueinander:

$$\begin{array}{lll} A = \{1, 2, 30, 41\}, & B = \{6, \ldots, 10\}, & C = \{n \mid n > 5\}, \\ D = \{n \mid n < 4\}, & E = \mathbb{N}, & F = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}. \end{array}$$

(c) Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen gibt es? Versuche, eine mathematisch möglichst zufriedenstellende Antwort auf die Frage zu geben.

Aufgabe 16: Zeige, daß die Menge $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$ mit der zweistelligen Operation

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in G$ eine abelsche Gruppe ist.