

## Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 19.05.2025, 12:00

Aufgabe 24 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 21:** Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

$$A = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 22:**

(a) Zeige, für zwei natürliche Zahlen  $1 \leq k \leq n$  gilt

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $\arg z$ ,  $|z|$ ,  $\bar{z}$  und  $z^{-1}$ :

$$z = i - 1, \quad z = \frac{4i}{1+i}, \quad z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}.$$

**Aufgabe 23: [Minkowski-Summe]**

Sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $A, B \subseteq K$  Teilmengen, so dass  $\sup(A)$  und  $\sup(B)$  existieren. Wir setzen  $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . Beweise, dass auch  $\sup(A + B)$  existiert und  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$  gilt.

**Aufgabe 24:** Welche der folgenden Folgen  $(a_n)_{n \geq 1}$  sind monoton, beschränkt, konvergent oder bestimmt divergent?

(a)  $a_n = 5$

(g)  $a_n = -n$

(b)  $a_n = \frac{1}{(-1)^n}$

(h)  $a_n = n^2 - n$

(c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(i)  $a_n = 2^n$

(d)  $a_n = \frac{3}{n}$

(j)  $a_n = (-2)^n$

(e)  $a_n = \frac{n}{n+1}$

(k)  $a_1 = 1$  und  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$  für  $n \geq 1$ .

(f)  $a_n = \frac{n+1}{n}$

(l)  $a_1 = 1$  und  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n$  für  $n \geq 1$ .