

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 26.05.2025, 12:00

Aufgabe 28 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 25: Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$.

(b) $(a_n)_{n \geq 2}$ mit $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

(c) $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = \frac{2}{2n! + n^2 + 5}$

(d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{7 + 3 \cdot a_n}{3 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 26: Es seien $s, S \in \mathbb{R}_{>0}$ zwei positive reelle Zahlen und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < s < a_n < S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Ist die Aussage auch noch richtig mit $s = 0$?

Hinweis: betrachte zunächst den Fall, dass die Folge konstant ist.

Aufgabe 27: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \dots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

(b) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Aufgabe 28: Bestimme für folgende Reihen, ob sie konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{3+n^4} \right)^6$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3 \cdot n!}$.