

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 02.06.2025, 12:00

Aufgabe 32 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 29: Zeige die folgenden Aussagen:

- (a) Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ ist konvergent.
- (b) Die Folge $(t_n)_{n \geq 1}$ mit $t_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ist konvergent.
- (c) Die Grenzwerte von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n \geq 1}$ stimmen überein.

Wie nennen den Grenzwert von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n \geq 1}$ die *Eulersche Zahl e*.

Hinweis zu Teil (b), man kann die Bernoulli-Ungleichung an geeigneter Stelle verwenden, um zu zeigen, dass $\frac{t_n}{t_{n-1}} \geq 1$ gilt.

Aufgabe 30: Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimme in Teil c. den Grenzwert:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$.
- (b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2-4n+1}$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$.

Hinweis: in Teil c. schreibe $\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$ als $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ für $A, B, C \in \mathbb{R}$ geeignet.

Aufgabe 31: Betrachte die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

und

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$$

Zeige, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent, aber das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist divergent.

Hinweis: zeige zunächst, dass das geometrische Mittel immer nach oben durch das arithmetische Mittel beschränkt ist.

Aufgabe 32: Bestimme für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius r und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls $(-r, r)$:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot t^n$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot t^n$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \cdot t^n$