Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2025, Blatt 9

Paul Weiß

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 09.06.2025, 10:00

Aufgabe 36 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 33:

(a) Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe über $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}\right)^n \cdot t^n$$

und untersuche die Reihe auf Konvergenz in den Randpunkten.

(b) Zeige, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\sin(3x) = 3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin^3(x).$$

Aufgabe 34:

(a) Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes für $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$

(b) Zeige, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

HINWEIS: Schaut euch den Beweis von Lemma 12.29 an.

(c) Zeige, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in $\mathbb{K}$ haben denselben Konvergenzradius.

Aufgabe 35:

(a) Bestimme für die folgenden Mengen jeweils die Menge ihrer Häfungspunkte:

(1) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. (2) $B = \mathbb{N}$. (3) $C = \left\{n + \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}, m \geq 1\right\}$.

(b) Gib ein Beispiel für eine Menge, die genau drei Häufungspunkte hat.

Aufgabe 36: Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x^3-2x^2}{(x+2)\cdot(x^2+1)}}$.

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{3x^5-9x^4+x^2-2x-3}{x^2-9}$.