

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 30.06.2025, 10:00

Aufgabe 44 sollte bearbeitet werden, wird aber nicht korrigiert.

Aufgabe 41:

- (a) Zeige, eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

- (b) Zeige, die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto n \cdot x \cdot (1 - x)^n$ konvergiert auf $[0, 1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

Aufgabe 42: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$. Zeige, dann ist $f = \exp_a$.

Aufgabe 43:

- (a) Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gelten soll.

- (b) Folgere unter der Voraussetzung, dass $\arctan(x) + \arctan(y)$ im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ liegt, das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

- (c) Zeige die Gleichung

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 44:

- (a) Finde eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, aber unbeschränkt ist, d.h., so dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in [0, 1]$ existiert mit $|f_n(x)| > c$.

- (b) Zeige, dass die Funktion

$$\cosh : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

streng monoton und stetig ist mit $\text{Im}(\cosh) = [1, \infty)$, und dass die Umkehrabbildung gegeben wird durch

$$\text{arccosh} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$