

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 14. Juli 2025, 12:00

Aufgabe 52 braucht als Präsenzaufgabe nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 49: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ setzen wir $\binom{a}{n} := \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!}$ und $\binom{a}{0} := 1$.

(a) Bestimme den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \cdot t^n$.

(b) Zeige, die durch die Potenzreihe auf $(-r, r)$ definierte Funktion f ist differenzierbar mit

$$(1+x) \cdot f'(x) = a \cdot f(x).$$

Leite daraus ab, daß $f(x) = (1+x)^a$ für $x \in (-r, r)$ gilt.

Aufgabe 50: Finde eine Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, so daß aber die Folge der Ableitungen $f'_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht mal punktweise konvergiert.

Aufgabe 51:

(a) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \log_a(x).$$

Untersuche, auf welchen Teilintervallen des Definitionsbereichs die Funktion streng monoton wächst bzw. fällt, und untersuche das Grenzverhalten für $x \rightarrow 0$.

(b) Berechne den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - x}{4x^2 + x^3}$.

Aufgabe 52:

(a) Berechne das fünfte Taylorpolynom $T_{f,0}^5$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$ für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x^3 + 3x).$$

Hinweis: Mit etwas Überlegung braucht man hier keine Ableitung zu berechnen!

(b) Berechne den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$, $x > 1$.