Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2025, Blatt 14
Paul Weiß

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 21. Juli 2025, 12:00

Aufgabe 56-58 brauchen als Präsenzaufgaben nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Für Aufgabe 55 darf der Hauptsatz der Differential- und Integralrechung bereits als bekannt vorausgesetzt werden.

Aufgabe 53: Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + \sin(x) \cdot \cos(x)$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot \exp(\sin(x)).$$

Kann man mittels der Regel von de l'Hôpital den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ bestimmen? Wenn ja, berechne ihn; wenn nein, begründe, weshalb es nicht geht.

Aufgabe 54: Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare (nicht notwendig stetige) Funktion. Zeige, die Funktion

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^y f(x)\, dx$$

ist Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $y, z \in [a, b]$ gilt

$$|F(y) - F(z)| \leq L \cdot |y - z|.$$

Aufgabe 55:

(a) Wir betrachten die Funktion:

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, aber keine Stammfunktion besitzt.

(b) Zeige mit Hilfe Riemannscher Zwischensummen, für jedes $a \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^a = \frac{1}{a+1}.$$

Aufgabe 56: Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(a) $\int_{1\frac{1}{4}}^{0} \sqrt{8x+2}\ dx$.

(b) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\ dx$.

(c) $\int \sin(x) \cdot e^x\ dx$.

(d) $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin(2x)\ dx$.

(e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sqrt{\sin(x)}\right) \cdot \cos(x)\ dx$.

(f) $\int \frac{x}{\cos^2(x)}\ dx$.

Aufgabe 57: Berechne mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$x \mapsto \frac{x^7+1}{x^5+x^3}.$$

Aufgabe 58:

(a) Zeige mit Hilfe des Integralkriteriums (Satz 21.5), dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$ konvergent ist und berechne damit zugleich eine obere und eine untere Schranke für den Wert der Reihe.

(b) Untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x \cdot e^{-tx}\ dx$ konvergiert und bestimme für diese den Wert des Integrals.