

## Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 27. April 2026, 12:00

**Aufgabe 8:** Seien  $M, N$  Mengen,  $A_1, A_2 \subseteq M$  und  $B_1, B_2 \subseteq N$  Teilmengen und  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

(a)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .

(b)  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ .

Finde in (b) zudem ein Beispiel, wo die Inklusion eine echte Inklusion ist.

**Aufgabe 9:** Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a)  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^3 - 4$ .

(b)  $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\} : n \mapsto (-1)^n$ .

**Aufgabe 10:**

(a) Seien  $M, N$  zwei nicht-leere Mengen und  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Formuliere die folgende Aussage zunächst in Quantorenschreibweise und beweise sie anschließend:

$f$  ist genau dann surjektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen  $X$  und für alle Abbildungen  $g : N \rightarrow X$  und  $h : N \rightarrow X$  mit  $g \circ f = h \circ f$  folgt, dass  $g = h$  ist.

(b) Es seien  $M$  eine Menge und  $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$  die Potenzmenge von  $M$ . Zeige, es gibt keine surjektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ .

Hinweis zu Teil (b): betrachte die Menge der  $x \in M$  für die  $x \notin f(x)$  gilt.

**Präsenzaufgabe 2:**

(a) Untersuche die folgenden Abbildung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(b) Beweise mittels vollständiger Induktion die Aussage

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

für alle natürlichen Zahlen ab einer geeigneten Zahl  $n_0$ . Ab welcher?