

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 4. Mai 2026, 12:00

Aufgabe 11: Beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^n (k+1) \cdot \binom{n}{k} = 2^{n-1} \cdot (n+2)$.

Hinweis: man braucht Ergebnisse aus § 7 zu Produkten, Summen und Binomialkoeffizienten.

Aufgabe 12: Sei M eine Menge und $A := \{f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow M \text{ Abbildung}\}$.

Zeige, dass A gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$ ist.

Aufgabe 13: Es sei $M = P(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Wir definieren folgende Relation auf M :

$$A \sim B \iff \exists f : A \longrightarrow B \text{ bijektiv}$$

für $A, B \in M$.

(a) Zeige, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{N} sind äquivalent zueinander:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 30, 41\}, & B &= \{6, \dots, 10\}, & C &= \{n \mid n > 5\}, \\ D &= \{n \mid n < 4\}, & E &= \mathbb{N}, & F &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}. \end{aligned}$$

(c) Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen gibt es? Versuche, eine mathematisch möglichst zufriedenstellende Antwort auf die Frage zu geben.

Präsenzaufgabe 3: Zeige, daß die Menge $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ mit der zweistelligen Operation

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in G$ eine abelsche Gruppe ist.