Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2026, Blatt 7

Thomas Markwig

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 01.06.2026, 12:00

Aufgabe 20: Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.

(b) $(a_n)_{n\geq 2}$ mit $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)$.

(c) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{2}{2n!+n^2+5}$

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = \dfrac{7+3\cdot a_n}{3+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 21: Es seien $s, S \in \mathbb{R}_{>0}$ zwei positive reelle Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < s < a_n < S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Ist die Aussage auch noch richtig mit $s = 0$?

Hinweis: betrachte zunächst den Fall, dass die Folge konstant ist.

Aufgabe 22: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Präsenzaufgabe 6: Bestimme für folgende Reihen, ob sie konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{3+n^4}\right)^6$.

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3\cdot n!}$.