Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2026, Blatt 8

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 08.06.2026, 12:00

Aufgabe 21: Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

(b) Die Folge $(t_n)_{n\geq 1}$ mit $t_n := (1+\frac{1}{n})^n$ ist konvergent.

(c) Die Grenzwerte von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\geq 1}$ stimmen überein.

Wie nennen den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\geq 1}$ die *Eulersche Zahl* e.

Hinweis zu Teil (b), man kann die Bernoulli-Ungleichung an geeigneter Stelle verwenden, um zu zeigen, dass $\frac{t_n}{t_{n-1}} \geq 1$ gilt.

Aufgabe 22: Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimme in Teil c. den Grenzwert:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$.

(b) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2-4n+1}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

Hinweis: in Teil c. schreibe $\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ als $\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$ für $A, B, C \in \mathbb{R}$ geeignet.

Aufgabe 23: Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

und

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}.$$

Zeige, die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent, aber das Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ ist divergent.

Hinweis: zeige zunächst, dass das geometrische Mittel immer nach oben durch das arithmetische Mittel beschränkt ist.

Präsenzaufgabe 7: Bestimme für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius r und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls $(-r, r)$:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot t^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\cdot t^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\cdot t^n$