

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 15.06.2026, 10:00

Aufgabe 24:

(a) Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe über \mathbb{R} .

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1})^n \cdot t^n$$

und untersuche die Reihe auf Konvergenz in den Randpunkten.

(b) Zeige, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\sin(3x) = 3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin^3(x).$$

Aufgabe 25:

(a) Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes

$$\text{für } \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2$$

(b) Zeige, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

HINWEIS: Schaut euch den Beweis von Lemma 12.29 an.

(c) Zeige, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in \mathbb{K} haben denselben Konvergenzradius.

Aufgabe 26:

(a) Bestimme für die folgenden Mengen jeweils die Menge ihrer Häufungspunkte:

$$(1) A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}, \quad (2) B = \mathbb{N}. \quad (3) C = \left\{ n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \right\}.$$

(b) Gib ein Beispiel für eine Menge, die genau drei Häufungspunkte hat.

Präsenzaufgabe 8: Bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^3 - 2x^2}{(x+2) \cdot (x^2+1)}}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^5 - 9x^4 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}.$$