

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 22.06.2026, 12:00

Aufgabe 27: Bestimme alle $a \in [0, 1]$, an denen die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig ist, und zeige, daß f jeden Wert zwischen $f(0)$ und $f(1)$ annimmt.

Aufgabe 28:

(a) Bestimme den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$.

(b) Zeige, die Funktion

$$f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1 + 2x + x^2 - x^3}{1 + x}$$

hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $c \in [0, 2]$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 29:

(a) Verwende die ε - δ -Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^3}$ stetig in $[0, 1]$ ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, wenn es ein $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig auf $\mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 9:

(a) Bestimme eine reelle Zahl a , so daß die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 5x - 1, & \text{falls } x < a, \\ x + 7, & \text{falls } x \geq a. \end{cases}$$

(b) Löse die Gleichung $\log_2(x) - \log_2(x + 6) + \log_2(x - 2) = 1$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(c) Überprüfe, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 2}$ mit $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ gleichmäßig auf $[0, \infty)$ konvergiert.