ANALYSIS

KAPITEL I: Grundlegende Begriffsbildungen

§ 1 Etwas Logik

Definitionsversuch 1.1

Eine Aussage ist eine Äußerung, der eindeutig ein Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zugeordnet ist.

Beispiel 1.2:

A: Dieser Satz enthält fünf Worte. Aussage: w

B: Der Bundespräsident ist stets mindestens 40. Aussage: w

C: Der Bundespräsident muß kein Deutscher sein. Aussage: f

D: Löse Aufgabe 2. kein Aussage

Definition 1.4 (Logische Operatoren)

Es seien X und Y zwei Aussagen

ⓐ $\neg X$ "nicht X" (Negation)

ⓑ $X \wedge Y$ "X und Y" (Konjunktion)

ⓒ $X \vee Y$ "X oder Y" (Disjunktion)

ⓓ $X \Rightarrow Y$ "wenn X, dann Y" (Implikation)

ⓔ $X \Leftrightarrow Y$ "genau dann X, wenn Y" (Äquivalenz)

Man notiert die Wahrheitswerte am Besten in einer Wahrheitstafel!

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Leftrightarrow Y$	$X \Rightarrow Y$	$(\neg X) \vee Y$
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f		f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f	w	w
f	f		f	f	w	w	w

Bemerkung 1.4:

Wir haben in der Wahrheitstafel von 1.3 gesehen:

$$(X \Rightarrow Y) \Longleftrightarrow ((\neg X) \vee Y)$$

Beachte:

- Wenn X wahr ist und $X \Rightarrow Y$ wahr ist, dann ist Y wahr
- "$X \Rightarrow Y$ wahr" allein sagt nichts über den Wahrheitswert von Y aus!

Bsp:

- $((a = b) \Longrightarrow (a \cdot c = b \cdot c))$ ist wahr!
- $2 = 2 \Longrightarrow 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$ ist wahr
- $2 = 0 \Longrightarrow 2 \cdot 3 = 0 \cdot 3$ ist falsch
- $2 = 0 \Longrightarrow 2 \cdot 0 = 0 \cdot 0$ ist wahr

Satz 1.5:

Seien X und Y Aussagen.

ⓐ $(X \Leftrightarrow Y) \Longleftrightarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X))$

ⓑ $(X \Rightarrow Y) \Longleftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$

Beweis:

ⓑ ist bewiesen!

ⓐ ist bewiesen!

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \Rightarrow Y$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$	$Y \Rightarrow X$	$X \Leftrightarrow Y$	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w	w

$\square$

Bemerkung 1.6:

ⓐ 1.5ⓐ sagt: will man $X \Leftrightarrow Y$ zeigen, dann reicht es, $X \Rightarrow Y$ und $Y \Rightarrow X$ zu zeigen!

ⓑ 1.5ⓑ ist als Kontraposition bekannt: statt aus X auf Y zu schließen, kann man auch $\neg Y$ auf $\neg X$ schließen!

Definitionsversuch 1.7:

Eine Aussageform ist eine Äußerung, die eine oder mehrere Variablen enthält und zu einer Aussage wird, (d.h. w oder f wird), wenn man für die Variablen zulässige Werte einsetzt.

Beispiel 1.8:

$a > b$ ist eine Aussageform, wenn wir für a und b ganze Zahlen als Werte zulassen

z.B.: $a = 42$, $b = 37$, dann: $a > b$ ist wahr!

Notation 1.9:

Wir verwenden in Aussagen und Aussageformen folgende

Quantoren:

$\forall$ ≙ „für alle"

$\exists$ ≙ „es existiert ein"

$\exists_1$ ≙ „es existiert genau ein"

$\nexists$ ≙ „es existiert kein"

Wenn $P(x)$ eine Aussageform ist, dann bilden wir Aussagen wie:

- $\forall x : P(x)$ ≙ „für alle x gilt $P(x)$"
- $\exists x : P(x)$ ≙ „es gibt ein x, so dass $P(x)$ gilt"

Beispiel 1.10:

Zu jeder Zahl gibt es eine Zahl, die um genau 1 größer ist.

$$\Updownarrow$$

$$\forall x : \exists y : y = x+1$$

Bemerkung 1.11 (richtiges Negieren)

Seien X und Y Aussagen und $P(x)$ eine Aussageform.

ⓐ $\neg(\neg X) \iff X$

ⓑ $\neg(X \wedge Y) \iff \neg X \vee \neg Y$

ⓒ $\neg(X \vee Y) \iff \neg X \wedge \neg Y$

ⓓ $\neg(\forall x : P(x)) \iff \exists x : \neg P(x)$

ⓔ $\neg(\exists x : P(x)) \iff \forall x : \neg P(x)$

Beispiel 1.12:

X : alle Studierenden bekommen Bafög und ein Studierendenticket

$\neg X$: es gibt einen Studierenden, der kein Bafög oder kein Studierendenticket bekommt.

Definition 1.13:

Ein Axiom ist eine Aussage, die wir als wahr vorgeben.

Beispiel 1.14:

GG, Art. 54 zur Wahl des Bundespräsidenten:

E: "Wählbar ist jeder Deutsche, der ... das 40ste Lebensjahr vollendet hat."

Vom Gesetzgeber vorgegeben, ist E ein Axiom!

Zu Bsp. 1.2:

$$E \Rightarrow B$$

$$E \Rightarrow \neg C$$

§2 Mengen

Definitionsversuch 2.1 (Georg Cantor)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte nennen wir die Elemente der Menge.

Notation 2.2:

① Menge angeben durch Auflisten aller Elemente

z.B. $\{1, 2, 5, 3, 4, 0\}$

② Menge angeben durch Angabe einer Eigenschaft

z.B. $\{x \mid x$ ist eine natürliche Zahl kleiner als $6\}$

③ Sei M eine Menge.

- $x \in M$ heißt "x ist ein Element von M"
- $x \notin M$ heißt "x ist kein Element von M"

④ $\{\,\}$ oder $\emptyset$ bezeichnen die leere Menge, d.h. die Menge, die kein Element enthält.

Definition 2.3:

Seien M und N zwei Mengen. Wir definieren:

① $M \subseteq N \;:\!\iff (x \in M \Rightarrow x \in N)$ "M ist Teilmenge von N"

② $M = N \;:\!\iff (M \subseteq N \wedge N \subseteq M) \overset{!}{\iff} (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$

③ $M \neq N \;:\!\iff \neg(M = N) \overset{!}{\iff} ((\exists x \in M : x \notin N) \vee (\exists x \in N : x \notin M))$

④ $M \underset{\neq}{\subset} N \;:\!\iff (M \subseteq N \wedge M \neq N)$ "echte Teilmenge"

Bsp. 2.4:

ⓐ $\{1,2,5,3,4,0\} = \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl kleiner als } 6\}$

ⓑ $\{1,3\} \subsetneqq \{1,2,3\}$

ⓒ $\{1,2,1\} = \{1,2\} = \{2,1\}$

ⓓ $1 \notin \{2,3\}$, $2 \in \{2,3\}$

Bemerkung 2.5:

Wir setzen die folgenden wichtigen Beispiele von Mengen in unserer Vorlesung als bekannt voraus:

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ = Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$ = Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen (Dezimalbrüche)

Beachte:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \mathbb{N} & & \subsetneqq & & \mathbb{Z} & & \subsetneqq & & \mathbb{Q} & & \subsetneqq & & \mathbb{R} \\ \not\ni & & -1 & \in & & \not\ni & \frac{1}{2} & \in & \not\ni & & \sqrt{2} & \in & \end{array}$$

Wir werden im Verlauf der Vorlesung etliche bekannte Eigenschaften dieser Mengen nochmals ausführlich thematisieren!

Def. 2.6:

Seien M, N und P sowie M_i Mengen für $i \in I$.

ⓐ $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ Durchschnitt von M und N

ⓑ $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ Vereinigung von M und N

ⓒ $M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ Differenzmenge von M ohne N

ⓓ $M \times N := \{(x,y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$ Kartesisches Produkt von M & N

Dabei ist (x,y) ein geordnetes Paar und es gilt

für $(x,y), (x',y') \in M$: $(x,y) = (x',y') :\Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

ⓔ M und N heißen disjunkt $:\Leftrightarrow$ $M \cap N = \emptyset$

ⓕ $P = M \dot{\cup} N :\Leftrightarrow P = M \cup N \wedge M \cap N = \emptyset$

ⓖ $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid x \in M_i \ \forall i \in I\}$

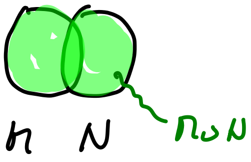
$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$

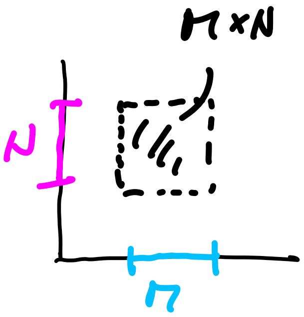
ⓗ $P = \dot{\bigcup}_{i \in I} M_i :\Leftrightarrow P = \bigcup_{i \in I} M_i \wedge \forall i \neq j : M_i \cap M_j = \emptyset$

ⓘ $\bigtimes_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i\}$ = kartesisches Produkt der M_i

dabei $(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} :\Leftrightarrow \forall i \in I : x_i = y_i$

Graphische Veranschaulichung:





Proposition 2.7:

Seien M, N, P Mengen.

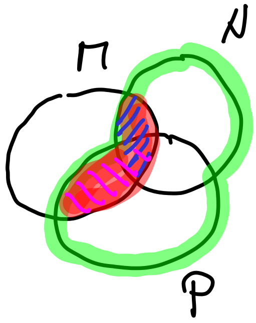
ⓐ Assoziativgesetze

- $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$
- $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$

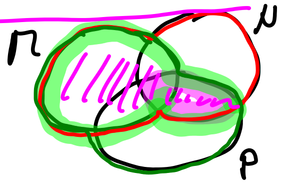
(b) Kommutativgesetz

- $M \cup N = N \cup M$ • $M \cap N = N \cap M$

(c) Distributivgesetze



- $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$
- $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$



(d) Identitätsgesetze

- $M \cup \emptyset = M$ • $M \subseteq N \Rightarrow M \cap N = M$

(e) Komplementgesetze:

$M \subseteq N \Rightarrow$ • $M \cup \overbrace{(N \setminus M)}^{\hat{=}\ \text{Komplement von } M \text{ in } N.} = N$

- $M \cap (N \setminus M) = \emptyset$

(f) de Morgansche Regeln:

- $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$
- $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$

Beweis: (Rest Übungsaufgabe)

(b) $M \underset{\frown}{\cup} N = \{x \mid x \in M \underset{\wedge}{\vee} x \in N\} = \{x \mid x \in N \underset{\wedge}{\vee} x \in M\} = N \underset{\frown}{\cup} M$

(c) $x \in M \cap (N \cup P) \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N \cup P$

$\Leftrightarrow (x \in M) \wedge (x \in N \vee x \in P) \Leftrightarrow (x \in M \wedge x \in N) \vee (x \in M \wedge x \in P)$

$\Leftrightarrow x \in M \cap N \vee x \in M \cap P \Leftrightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap P)$ $\square$

Bemerkung 2.8 (Paradoxon von Russell)

?! Man muss bei der Angabe von Mengen durch Eigenschaften vorsichtig sein. !?

Betrachte die "Menge"

$$M := \{X \mid X \text{ ist eine Menge} \wedge X \notin X\}$$

= Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten!

Angenommen: M wäre eine Menge.

$\Longrightarrow$ $M \notin M$ oder $M \in M$.

1. Fall: $M \notin M$

$\Rightarrow$ M ist eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält

$\Longrightarrow$ $M \in M$ ↯

2. Fall: $M \in M$

$\Rightarrow$ M ist eine Menge, die sich als Element enthält

$\Longrightarrow$ $M \notin M$ ↯

Also: Annahme war falsch, und M ist keine Menge!

∎

§ 3 Abbildungen

A) Abbildungen, Bilder und Urbilder

Definition 3.1

Seien M und N zwei Mengen.

Eine Abbildung oder Funktion f von M nach N ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuweist.

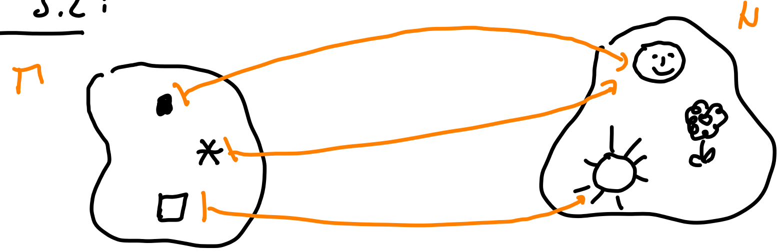
Wir nennen M den Definitionsbereich von f und N den Ziel- oder Wertebereich.

Notation: $f: M \to N,\ x \mapsto f(x)$

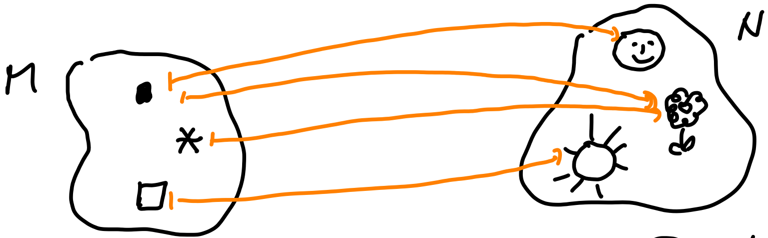
Beachte: Sind $f: M \to N$ und $g: X \to Y$ zwei Abbildungen, dann gilt: $f = g \iff (M = X \wedge N = Y \wedge \forall x \in M: f(x) = g(x))$

Beispiel 3.2:

ⓐ



ist eine Abbildung



ist keine Abbildung

ist keine Abbildung

ⓑ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto x^2$

$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto x^2$ $\Bigg\} \Rightarrow f \neq g$,

weil die Def.bereiche nicht identisch!

ⓒ Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abb., $A \subseteq M$.

Dann: $f_{|A} : A \longrightarrow N : x \longmapsto f(x)$ heißt Einschränkung von f auf A.

ⓓ Sei M eine Menge.

Dann: $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M : x \longmapsto x$ heißt die Identität auf M.

Definition 3.3:

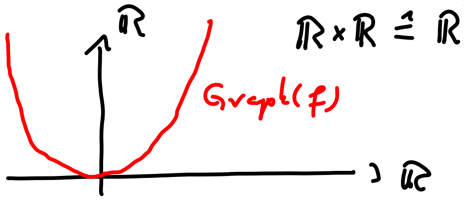
Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$.

ⓐ $\mathrm{Graph}(f) := \{ (x, f(x)) \in M \times N \mid x \in M \}$ ist der Graph von f.

ⓑ $f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \}$ heißt Bild von A unter f.

ⓒ $\mathrm{Im}(f) := f(M) = \{ f(x) \mid x \in M \}$ heißt das Bild von f.

ⓓ $f^{-1}(B) := \{ x \in M \mid f(x) \in B \}$ heißt das Urbild von B unter f.



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^2$

Bsp. 3.4:

ⓐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

$A = \{-1, 0, 1, 2\} \Rightarrow f(A) = \{1, 0, 4\}$

$B = \{0, 1\} \Rightarrow f^{-1}(B) = \{0, 1, -1\}$

$B' = \{-1\} \Rightarrow f^{-1}(B') = \emptyset$

$\mathrm{Im}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$

ⓑ $nf : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto x+1$

$\Longrightarrow$ · $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

· $y \in \mathbb{N} \Longrightarrow \quad nf^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & , y = 0 \\ \{y-1\} & , y > 0 \end{cases}$

Bemerkung 3.5:

ⓐ Für $f: M \to N$ und $g: X \to Y$, zwei Abbildungen, gilt:

$$f = g \iff \operatorname{Graph}(f) = \operatorname{Graph}(g)$$

ⓑ Ist $\Gamma \subseteq M \times N$ so, dass $\forall x \in M \ \exists_1 \ y \in N : (x,y) \in \Gamma$, dann gibt es genau eine Abb. $f: M \to N$ s.d. $\Gamma = \operatorname{Graph}(f)$.

Fazit: Man hätte Abb. von M nach N auch als Teilmengen von $M \times N$ definieren können, die die Bed. ⓑ erfüllen!

B) Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

Def. 3.6:

Sei $f: M \to N$ eine Abbildung.

ⓐ f heißt surjektiv $:\iff \forall y \in N \ \exists x \in M : f(x) = y$

$\iff \operatorname{Im}(f) = N$

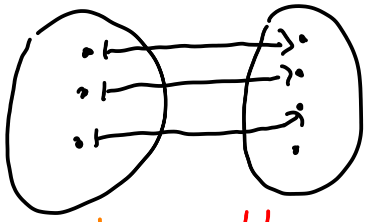
ⓑ f heißt injektiv $:\iff \forall x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ gilt: $x = x'$

ⓒ f heißt bijektiv $:\iff f$ ist injektiv und surjektiv

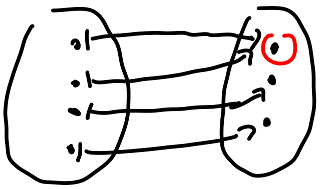
Bemerkung 3.7: Sei $f: M \to N$ eine Abbildung.

* Wenn $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, dann heißt x ein Urbild von y.

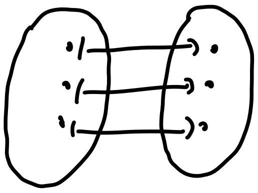
* Damit: f surjektiv $\iff$ jedes $y \in N$ hat mindestens ein Urbild
f injektiv $\iff$ " " " höchstens " "
f bijektiv $\iff$ " " " genau " "



injektiv, nicht surjektiv



nicht injektiv, surjektiv



bijektiv

Bsp. 3.8:

ⓐ $nf : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto x+1$ ist injektiv, nicht surjektiv,

denn:
- $\underset{x+1}{\underset{\|}{nf(x)}} = \underset{y+1}{\underset{\|}{nf(y)}} \Rightarrow x = y$ ✓
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \mathbb{N}$

ⓑ $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto x^2$ ist nicht injektiv

denn: $g(1) = 1 = g(-1)$, aber $1 \neq -1$

ⓒ id_M ist bijektiv für jede Menge M.

denn:
* Sei $y \in M \Rightarrow y = id_M(y) \Rightarrow id_M$ surjektiv
* Seien $x, x' \in M$ mit $\underset{x}{\underset{\|}{id_M(x)}} = \underset{x'}{\underset{\|}{id_M(x')}} \Rightarrow id_M$ injektiv

ⓓ Sei $f : M \to N$ injektiv.

Dann: $M \longrightarrow \mathrm{Im}(f) : x \longmapsto f(x)$ ist bijektiv

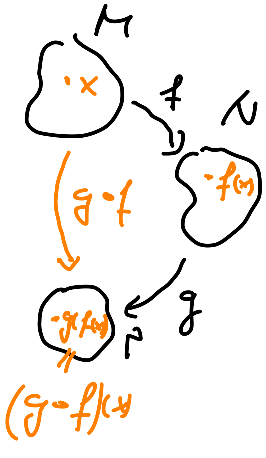
Def. 3.9:

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen

Die Abbildung $g \circ f : M \longrightarrow P : x \mapsto g(f(x))$

heißt Komposition oder Verkettung

von f und g.



Bsp. 3.10:

Sein $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x+1$.

Dann: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$ $\nparallel$

Also: $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition 3.11:

Seien $f: M \to N$, $g: N \to P$, $h: P \to Q$ Abbildungen.

Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Schreibe deswegen auch: $h \circ g \circ f$.

Beweis: Sei $x \in M$.

$$\Rightarrow (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$\square$

Satz 3.12:

Sei $f: M \to N$ eine Abbildung.

Dann: ⓐ f ist bijektiv $\Longleftrightarrow \exists\, g: N \to M$ mit $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$

ⓑ Die Abb. g in ⓐ ist dann eindeutig bestimmt und sie ist bijektiv.

Wir nennen g dann die Inverse von f und bezeichnen sie mit f^{-1}.

Beweis: ⓐ "$\Leftarrow$" Sei $g: N \to M$ mit $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$.

Zeige: f ist surjektiv.

Sei $y \in N$ und $x := g(y) \in M$

$$\Rightarrow f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_N(y) = y$$

Also ist f surjektiv.

Zeige: f ist injektiv.

Seien $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$

$$\Rightarrow x = id_M(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = id_M(x') = x'$$

Also f ist injektiv.

"$\Rightarrow$" Sei f bijektiv. $\Rightarrow \forall y \in N \ \exists_1 x_y \in M : f(x_y) = y$

Definiere: $g : N \longrightarrow M ; y \longmapsto x_y$ = eindeutige Urbild von y unter f

$$\Rightarrow \forall y \in N : (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y = id_N(y)$$

$$\Rightarrow f \circ g = id_N$$

Für $x \in M$ und $y := f(x)$ gilt: $f(x_y) = y = f(x)$

$$\xRightarrow[f \text{ injektiv}]{} x = x_y \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x_y = x = id_M(x)$$

$$\Rightarrow g \circ f = id_M .$$

ⓑ Sei $h : N \to M$ eine zweite Abb. mit $f \circ h = id_N$, $h \circ f = id_M$.

Für $y \in N$ gilt: $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_N(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y))$

$$\xRightarrow[f \text{ injektiv}]{} g(y) = h(y) \Rightarrow g = h. \Rightarrow g \text{ eindeutig!}$$

Zudem: g bijektiv wegen Teil ⓐ. $\square$

Beispiel 3.13:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto 2\cdot x + 1$ ist bijektiv

mit $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \longmapsto \frac{1}{2}\cdot y - 1/2$

Denn:

$$(f\circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}) = 2\cdot(\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}) + 1 = y - 1 + 1 = y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(y)$$

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \tfrac{1}{2}\cdot(2x+1) - \tfrac{1}{2} = x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)$$

$\square$

Proposition 3.14

Seien $f : M \to N$, $g : N \to P$ Abbildungen.

Dann:
- (a) f & g surjektiv $\Rightarrow$ $g\circ f$ surjektiv.
- (b) f & g injektiv $\Rightarrow$ $g\circ f$ injektiv.
- (c) f & g bijektiv $\Rightarrow$ $g\circ f$ bijektiv.

Beweis:

(a) Sei $z \in P$ $\underset{g\text{ surj.}}{\Longrightarrow} \exists\, y \in N : g(y) = z$

$\underset{f\text{ surj.}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in M : f(x) = y$

$\Longrightarrow (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z \Rightarrow g\circ f$ surjektiv

(b) Seien $x, x' \in M$ mit $\underset{\underset{g(f(x))}{\parallel}}{(g\circ f)(x)} = \underset{\underset{g(f(x'))}{\parallel}}{(g\circ f)(x')}$

$\underset{g\text{ injektiv}}{\Longrightarrow} f(x) = f(x') \underset{f\text{ injektiv}}{\Longrightarrow} x = x' \Rightarrow g\circ f$ injektiv.

(c) folgt aus (a) & (b)

$\square$

§ 4 Vollständige Induktion

Bemerkung 4.1: (Prinzip der vollständigen Induktion)

Die folgende Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist uns vertraut:

„Addiert man zur Zahl 0 sukzessive die Zahl 1, so erhält man nach und nach alle natürlichen Zahlen.“

Man nennt sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

Mit Hilfe der Nachfolgerfunktion $\mathrm{nf}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n+1$ können wir die Eigenschaft wie folgt formulieren:

Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, so daß ① $0 \in M$ und ② $\forall n \in M : \overset{n+1}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{nf}(n)}} \in M$ gilt, dann gilt schon: $M = \mathbb{N}$

Daraus leiten wir das im folgenden Satz formulierte Beweisprinzip für Aussagen ab, die von einer natürlichen Zahl abhängen.

Satz 4.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $A(n)$ eine Aussageform mit zulässigen Werten $n \in \mathbb{N}$.

Falls ① $A(0)$ ist wahr und

② $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr,

so ist $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Setze $M := \{ n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr} \}$

Dann: ① $A(0)$ wahr $\Rightarrow$ $0 \in M$

② Sei $n \in M$ $\Rightarrow$ $A(n)$ ist wahr

$\underset{\substack{A(n) \Rightarrow A(n+1) \\ \text{ist wahr}}}{\Rightarrow}$ $A(n+1)$ ist wahr $\Rightarrow$ $\mathrm{nf}(n) = n+1 \in M$

Also nach 4.1: $M = \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$. ▯

Bemerkung 4.3:

Um "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr" zu zeigen, reicht es, den Fall zu betrachten, dass $A(n)$ schon wahr ist, weil die Implikation auf alle Fälle wahr ist, wenn $A(n)$ falsch ist !

Wir nennen:
- "$A(0)$ ist wahr" den Induktionsanfang.
- "$A(n)$ wird als wahr vorausgesetzt" die Induktionsvoraussetzung.
- "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr" den Induktionsschritt.

Beispiel 4.4:

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar

d.h. $n^3 - n$ ist ein Vielfaches von 6

Beweis durch vollständige Induktion

Satz: $A(n)$: $\exists k \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6 \cdot k$

Induktionsanfang: $n = 0$: $A(0)$: $0^3 - 0 = 0 = 6 \cdot 0$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6 \cdot k$

Induktionsschritt: Zeige:

$A(n+1)$: $\exists m \in \mathbb{N} : (n+1)^3 - (n+1) = 6 \cdot m$

Dann beachte: n oder $n+1$ ist gerade

$\Rightarrow$ $n \cdot (n+1)$ ist eine gerade Zahl

$\Rightarrow$ $\exists \ell \in \mathbb{N} : n \cdot (n+1) = 2 \cdot \ell$

Damit:
$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n \cancel{+1} - n \cancel{-1}$$
$$= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = (n^3 - n) + 3 \cdot n \cdot (n+1)$$
$$= 6 \cdot k + 3 \cdot 2 \cdot \ell = 6 \cdot \underbrace{(k + \ell)}_{=: m} = 6 \cdot m$$

Also: $A(n+1)$ wahr $\Rightarrow$ ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr). $\boxed{}$

Bemerkung 4.5:

(a) Alternativer Induktionsanfang:

Statt den Induktionsanfang $n = 0$ zu wählen, kann man bei einer beliebigen ganzen Zahl n_0 beginnen und erhält dann, dass $A(n)$ wahr ist für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$.

(b) Alternative Induktionsvoraussetzung:

Im Induktionsschritt schließen wir von $A(n)$ auf $A(n+1)$, d.h. wir setzen $A(n)$ als wahr voraus und schließen daraus, dass $A(n+1)$ wahr ist.

Stattdessen können wir auch $A(n_0), A(n_0+1), \ldots, A(n)$ als wahr voraussetzen und auf $A(n+1)$ schließen, wobei $A(n_0)$ der Induktionsanfang ist.

§ 5 Mächtigkeit von Mengen

A) Endliche Mengen

Definition 5.1:

ⓐ Eine Menge M heißt endlich, wenn sie nur endlich viele Elemente hat.
Setze dann: $|M| := \#M :=$ Anzahl der Elemente von M,
die sogenannte Mächtigkeit von M.
M heißt unendlich und $|M| = \infty$, wenn M nicht endlich ist.

ⓑ Zwei Mengen M und N heißen gleichmächtig, wenn es bijektive Abbildung $f: M \longrightarrow N$.

ⓒ Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, falls sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, d.h. $\exists\, f: \mathbb{N} \to M$ bijektiv.

ⓓ Eine Menge M heißt überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar unendlich ist.

ⓔ Für $m, n \in \mathbb{Z}$ setze: $\{m, \dots, n\} := \{z \in \mathbb{Z} \mid m \leq z \wedge z \leq n\}$
= Menge der ganzen Zahlen zwischen m und n!

Beachte: $m > n \Rightarrow \{m, \dots, n\} = \emptyset$

Bemerkung 5.3: (Einfache Eigenschaften endlicher Mengen)

ⓐ M endlich mit $|M| = n$

$\Rightarrow$ zähle die Elemente in M ab, z.B. $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\Rightarrow f: \{1, \dots, n\} \longrightarrow M : i \mapsto x_i$ ist bijektiv!

Umgekehrt: $g: \{1, \dots, n\} \longrightarrow M$ bijektiv

$$\Rightarrow M = g(\{1, \dots, n\}) = \{\underbrace{g(1), \dots, g(n)}_{\text{paarweise verschieden}}\} \Rightarrow |M| = n < \infty$$

Fazit: $|M| = n < \infty \iff \exists\, f: \{1, \dots, n\} \to M$ bijektiv!

ⓑ M endlich und $A \subseteq M \Rightarrow A$ endlich und $|A| \leq |M|$

ⓒ $M = A \mathbin{\dot\cup} B$ und M endlich $\Rightarrow |M| = |A| + |B|$

Satz 5.3:

Seien M und N zwei nicht-leere endliche Mengen.

Dann:

ⓐ $|M| \leq |N| \iff \exists f: M \to N$ injektiv

ⓑ $|M| \geq |N| \iff \exists g: M \to N$ surjektiv

ⓒ $|M| = |N| \iff \exists f: M \to N$ bijektiv

d.h. M und N sind gleichmächtig.

Beweis:

Seien $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ und $N = \{y_1, \dots, y_n\}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $y_k \neq y_l$ für $k \neq l$. Insb.: $|M| = m$ und $|N| = n$.

ⓐ "$\Rightarrow$" Sei $m \leq n$. Definiere: $f: M \to N$ durch $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, m$

Dann: Sei $x_i \neq x_j \Rightarrow i \neq j \Rightarrow f(x_i) = y_i \neq y_j = f(x_j)$

$\Rightarrow f$ ist injektiv.

"$\Leftarrow$" Sei $f: M \to N$ injektiv.

$$\Rightarrow f(M) = \{\underbrace{f(x_1), \dots, f(x_m)}_{\text{paarweise verschieden, weil } f \text{ injektiv}}\} \subseteq N$$

$\Rightarrow N$ enthält mindestens m p.w. verschiedene Elemente

d.h. $|f(M)| = m$ und $m = |f(M)| \leq |N| = n$

ⓑ "$\Rightarrow$" Sei $m \geq n$. Definiere: $g: M \to N : x_i \mapsto \begin{cases} y_i & , i \leq n \\ y_1 & , i > n \end{cases}$

$\Rightarrow g(M) = \{y_1, \dots, y_n\} = N \Rightarrow g$ ist surjektiv

"⇐" Sei $g: M \to N$ surjektiv.

$$\Rightarrow \underbrace{\{g(x_1),\dots,g(x_m)\}}_{\# \leq m} = g(M) = N = \{\underbrace{y_1,\dots,y_n}_{\text{p.w. verschieden!}}\}$$

$$\Rightarrow \quad m \geq |g(M)| = |N| = n$$

ⓒ "⇐" Sei $f: M \to N$ bijektiv

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} f \text{ ist injektiv} & \Rightarrow & m \leq n \\ \quad\text{und} & & \\ f \text{ ist surjektiv} & \Rightarrow & m \geq n \end{array}\right\} \Rightarrow m = n$$

"⇒" Sei $m = n$.

Def.: $f: M \longrightarrow N : x_i \longmapsto y_i$ für $i = 1,\dots,m$

$\Rightarrow$ f injektiv, wie in Teil ⓐ

und $f(M) = \{y_1,\dots,y_m\} \overset{}{\underset{m=n}{=}} \{y_1,\dots,y_n\} = N$

$\Rightarrow$ f surjektiv und damit bijektiv $\square$

Korollar 5.4:

Seien M und N zwei endliche Mengen mit $|M| = |N|$.
Dann sind die folgenden Aussagen für eine Abbildung $f: M \to N$ gleichwertig.

ⓐ f ist injektiv.

ⓑ f ist surjektiv.

ⓒ f ist bijektiv.

$$\begin{tikzcd} & ⓐ \arrow[dr] & \\ ⓒ \arrow[ur] & & ⓑ \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Ringschluss

Beweis: ⓐ ⇒ ⓑ: Ang.: f ist nicht surjektiv.

$$\Rightarrow \exists\, y \in N \setminus \operatorname{Im}(f) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{Im}(f) \subseteq N \setminus \{y\}}$$

$\Rightarrow \quad g : M \to \mathrm{Im}(f) : x \mapsto f(x)$ ist bijektiv, nach Bsp. 3.8

$$\Rightarrow \quad |M| \underset{5.3}{=} |\mathrm{Im}(g)| = |\mathrm{Im}(f)| \leq |N \setminus \{y\}| = |N| - 1 = |M| - 1 \quad ↯$$

Also: f ist surjektiv.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $f : M \to N$ surjektiv.

Zeige: f ist injektiv. (dann bijektiv)

Angenommen: f ist nicht injektiv

$\Rightarrow \exists\, x, x' \in M$ s.d. $x \neq x'$, aber $f(x) = f(x') =: y$

$\Rightarrow \quad h : M \setminus f^{-1}(\{y\}) \longrightarrow N \setminus \{y\} : x \mapsto f(x)$

ist surjektiv, da f surjektiv

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} |M \setminus f^{-1}(\{y\})| & \underset{5.3}{\geq} & |N \setminus \{y\}| & = & |N| - 1 \\ \rotatebox{90}{$\geq$} & & & & \rotatebox{90}{$=$} \\ |M \setminus \{x, x'\}| = |M| - 2 & & & & |M| - 1 \end{array} \quad ↯$$

Also: f ist injektiv.

(c) $\Rightarrow$ (a): $f : M \to N$ bijektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv.

Damit ist die Aussage durch Ringschluss bewiesen!

B) Das Cantorsche Diagonalverfahren

Frage: Gibt es mehr rationale als natürliche Zahlen?

Gibt es mehr reelle als rationale Zahlen?

Besser: Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig? Ja (5.5)

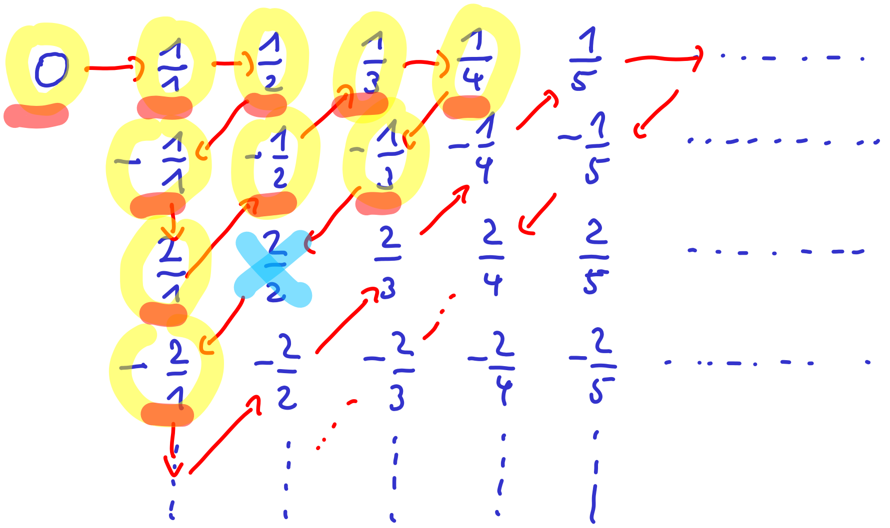
" $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ " ? Nein (5.6)

Proposition 5.5: (Cantorsches Diagonalverfahren)

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.

Beweis.

Schreibe alle rationalen Zahlen in folgendem Schema auf:



Durchlaufe das Schema den Pfeilen folgend und sammle im Vorbeigehen die Zahlen auf, aber jede Zahl nur beim ersten Auftreten!

Auf dem Weg konstruieren wir eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$! □

Proposition 5.6:

Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Klar: $\mathbb{R}$ ist nicht endlich.

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar unendlich

$\Rightarrow \exists\ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, die bijektiv ist

Schreibe die Dezimalzahldarstellung von $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf:

$$\begin{array}{lllllllll}
\varphi(0) & = & \boxed{\quad \ast \quad} & a_{00}, & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & \cdots \\
\varphi(1) & = & \boxed{\quad \ast \quad} & a_{10}, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
\varphi(2) & = & \boxed{\quad \ast \quad} & a_{20}, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
\varphi(3) & = & \boxed{\quad \ast \quad} & a_{30}, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
\vdots & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Setze: $a := a_{00}, a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \cdots\cdots \in \mathbb{R}$

Definiere: $b := b_0, b_1\ b_2\ b_3 \cdots$ durch $b_i := \begin{cases} 2, & a_{ii} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\in \mathbb{R}$

Dabei: gilt $\forall i \in \mathbb{N}$: $a_{ii} \neq b_i$

Weil φ surjektiv ist, gibt es $i \in \mathbb{N}$, so daß:

$$\varphi(i) = b$$

i-te Nachkommastelle ist a_{ii}

i-te Nachkommastelle ist b_i

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\varphi(i) \neq b \qquad \lightning$$

Also: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar!!!

$\square$

Bemerkung 5.7 (Kontinuumshypothese)

Es gibt keine Menge M mit $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq \mathbb{R}$, so daß M weder gleichmächtig zu $\mathbb{Q}$ noch zu $\mathbb{R}$ ist.

Bericht: diese Aussage kann auf der Grundlage des Axiomensystems von Zermelo-Fränkel weder bewiesen noch widerlegt werden. Sie unabhängig davon!

C) Potenzmengen

Definition 5.8

Sei M eine Menge.

Dann heißt $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ = Menge aller Teilmengen von M

die **Potenzmenge** von M.

Bsp. 5.9:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

Proposition 5.10:

Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$.

Dann: $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Beweis durch vollständige Induktion nach n:

IA: $n=0$: $\quad n=0 \Rightarrow M=\emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(M)=\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0$ ✓

IS: $n \mapsto n+1$:

Sei $|M| = n+1$. Wähle $y \in M$ fest.

Setze: $N := M \setminus \{y\} \Rightarrow |N| = |M|-1 = n$

Damit: $\mathcal{P}(M) = \{A\subseteq M \mid y\notin A\} \,\dot\cup\, \{A\subseteq M \mid y\in A\}$

Dabei:

- $X := \{A\subseteq M \mid y\notin A\} = \{A\subseteq M \mid A\subseteq N\} = \mathcal{P}(N)$
- $Y := \{A\subseteq M \mid y\in A\} = \{B\cup\{y\} \mid B\subseteq N\} = \{\underset{\substack{\uparrow\\ B\,\in\,\mathcal{P}(N)}}{B}\cup\{y\} \mid \underset{\substack{\uparrow\\ \text{bijektiv}}}{B\in\mathcal{P}(N)}\}$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = |X \,\dot\cup\, Y| = |X| + |Y| = |\mathcal{P}(N)| + |\mathcal{P}(N)|$$

$$= 2\cdot|\mathcal{P}(N)| \underset{\text{Ind.}}{=} 2\cdot 2^n = 2^{n+1} \quad ✓$$

Beweis fertig mit Induktion!

$\square$

§ 6 Äquivalenzrelationen

A) Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

Definition 6.1: Seien M und N zwei Mengen.

Eine Relation zwischen M und N ist eine Teilmenge R von $M \times N$.

Bemerkung 6.2: Sei R eine Relation zwischen M & N, $x \in M$, $y \in N$.

Sage: x steht in Relation zu y $:\Longleftrightarrow$ $(x,y) \in R$

Schreibe auch xRy statt $(x,y) \in R$.

Bsp. 6.3:

ⓐ Sei $f: M \longrightarrow N$ eine Abbildung.

Dann ist $\text{Graph} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$ ist eine Relation zwischen M und N, bei der jedes $x \in M$ zu genau einem $\underset{= f(x)}{y} \in N$ in Relation steht.

ⓑ Sei $M = \{$Hörer unserer Vorlesung$\}$ und $N = \{$in Tübingen studierbaren Fächer$\}$.

Dann ist $R = \{(x,y) \in M \times N \mid x \text{ studiert } y\}$ eine Relation zw. M und N, die nicht der Graph einer Fkt. ist!

Def. 6.5:

Sei M eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf M ist Teilmenge R von $M \times M$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(R1) $\forall x \in M : (x,x) \in R$ "Reflexivität"

(R2) $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ "Symmetrie"

(R3) $(x,y), (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ "Transitivität"

Notation 6.6:

Äquivalenzrelationen werden häufig mit Symbolen wie $\sim$ bezeichnet,

d.h.: $\sim \subseteq M \times M$ s.d. die folgenden Axiome gelten:

(R1) $\forall x \in M : x \sim x$

(R2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(R3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Sage für $x \sim y$: x ist äquivalent zu y

Def. 6.7:

Sei M eine Menge und $\sim$ eine ÄR auf M.

Für $x \in M$ heißt $\overline{x} := \{ y \in M \mid y \sim x \}$ die Äquivalenzklasse von x.

Zudem:

- $M/\sim \; := \{ \overline{x} \mid x \in M \}$ = Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$
- $x \in M \Rightarrow x$ heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $\overline{x}$

Bsp. 6.8: Sei $M = \mathbb{R}^2$ = euklidische Ebene und für $P \in M$ sei $|P|$ = Abstand von P zum Ursprung $(0,0)$.

Definition: $P \sim Q :\Leftrightarrow |P| = |Q|$

Zeige: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2$

(R1) Sei $P \in M$. $\Rightarrow |P| = |P| \Rightarrow P \sim P$

(R2) Seien $P, Q \in M$ mit $P \sim Q$

$\Rightarrow |P| = |Q| \Rightarrow |Q| = |P| \Rightarrow Q \sim P$

(R3) Seien $P, Q, R \in M$ mit $P \sim Q$ und $Q \sim R$

$\Rightarrow |P| = |Q| \wedge |Q| = |R| \Rightarrow |P| = |R|$

$\Rightarrow P \sim R$

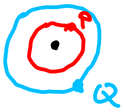
Also: $\sim$ ist eine ÄR.

Sei $P \in M \Rightarrow \overline{P} := \{Q \mid Q \sim P\} = \{Q \mid |Q| = |P|\}$

= Kreis um den Ursprung mit Radius $|P|$

Beachte: . $P = (0,0) \Rightarrow \overline{P} = \{(0,0)\} = \{P\}$

. $P, Q \in M \Rightarrow \overline{P} \cap \overline{Q} = \emptyset$ oder $\overline{P} = \overline{Q}$



. $M = \dot{\bigcup}_{r \geq 0} K_r$ wobei K_r = Kreis um den Ursprung vom Radius r

d.h. M ist die disjunkte Zerlegung der paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen!

B) Äquivalenzrelationen und disjunkte Zerlegungen

Proposition 6.9:

Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine disjunkte Zerlegung von M und für $x, y \in M$

gelte: $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, i \in I : x, y \in M_i$.

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und

für $x \in M_i$ gilt $\bar{x} = M_i$.

Beweis:

(R1) Sei $x \in M = \bigcup\limits_{i \in I} M_i \Rightarrow \exists\, i \in I : x \in M_i \Rightarrow \underset{\displaystyle x \sim x}{\underset{\Downarrow}{x, x \in M_i}}$

(R2) Seien $x, y \in M$ mit $x \sim y \Rightarrow \exists\, i \in I : x, y \in M_i$

$\Rightarrow y, x \in M_i \Rightarrow y \sim x$

(R3) Seien $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$

$\Rightarrow \exists\, i \in I : x, y \in M_i$ und $\exists\, j \in I : y, z \in M_j$

$\Rightarrow y \in M_i \cap M_j \xRightarrow[M = \dot{\bigcup}_{\ell \in I} M_\ell]{} M_i = M_j$, d.h. $i = j$

$\Rightarrow x, z \in M_i \Longrightarrow x \sim z$

Also, $\sim$ ist eine ÄR.

Zudem: $x \in M \Rightarrow \exists\, i \in I : x \in M_i$ und $x \notin M_j \; \forall j \neq i$ $\Rightarrow \bar{x} = \{y \mid y \sim x\}$

$= \{y \mid y \in M_i\} = M_i$

$\square$

Prop. 6.10:

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge M.

Dann bilden die p.w. verschiedenen Äquivalenzklassen von $\sim$ eine disjunkte Zerlegung von M

d.h. $\quad M = \dot{\bigcup\limits_{\bar{x} \in M/\sim}} \bar{x}$

Insbesondere gilt für $x, y \in M$: $\bar{x} = \bar{y}$ oder $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

Beweis:

Sei $x \in M \overset{\boxed{R1}}{\Rightarrow} x \in \bar{x} \subseteq \bigcup\limits_{\bar{y} \in M/\sim} \bar{y} \Rightarrow M = \bigcup\limits_{\bar{y} \in M/\sim} \bar{y}$.

Es bleibt zu zeigen: $\bar{x}, \bar{y} \in M/\sim \;\Rightarrow\; \bar{x} = \bar{y}$ oder $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

Seien $\bar{x}, \bar{y} \in M/\sim$ mit $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$. Zu zeigen: $\bar{x} = \bar{y}$

$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, z \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow z \sim x$ und $\boxed{z \sim y}$

$\underset{\boxed{R2}}{\Rightarrow} x \sim z \underset{\boxed{R3}}{\Rightarrow} \boxed{x \sim y.}$

Sei $u \in \bar{x} \Rightarrow u \sim x \underset{\boxed{R3}}{\Rightarrow} u \sim y \Rightarrow u \in \bar{y}$

$\Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$.

Analog: $\bar{y} \subseteq \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ □

Korollar 6.11:

Sei M eine endliche Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $M_1, \dots, M_s$ seien die paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen.

Dann: $\quad |M| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_s|$

Beweis: $6.10 \Rightarrow M = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{s}} M_i \underset{5.2}{\Rightarrow} |M| = |M_1| + \dots + |M_s|$ □

Beispiel 6.12:

Betrachte $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

Definiere: $(p,q) \sim (p',q') :\Leftrightarrow p \cdot q' = p' \cdot q$

Zeige: $\sim$ ist eine ÄR auf M.

Seien dazu $x = (p,q)$, $x' = (p',q')$, $x'' = (p'',q'')$.

Ⓡ1 $p \cdot q = p \cdot q \Rightarrow x = (p,q) \sim (p,q) = x$

Ⓡ2 Sei $x \sim x' \Rightarrow p \cdot q' = p' \cdot q \Rightarrow p'q = p \cdot q'$

$\Rightarrow x' = (p',q') \sim (p,q) = x$

Ⓡ3 Seien $x \sim x'$ und $x' \sim x'' \Rightarrow p \cdot q' = p' \cdot q\ ,\ p' \cdot q'' = p'' \cdot q'$

$$\Downarrow \cdot q'' \qquad \Downarrow \cdot q$$

$$p \cdot q'' = p'' \cdot q \ \underset{q' \neq 0}{\Longleftarrow}\ p \cdot q' \cdot q'' = p' \cdot q \cdot q'' = p' \cdot q'' \cdot q = p'' \cdot q' \cdot q$$

$$\Downarrow$$

$x = (p,q) \sim (p'',q'') = x'' \Rightarrow$ Transitivität

Also: $\sim$ ist eine ÄR auf $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Setze:

- $(p,q) \in M \Rightarrow \frac{p}{q} := \overline{(p,q)}$
- $\mathbb{Q} := M/\sim$

D.h.: Eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist eine Äklasse von Tupeln (r,s) aus $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und es gilt:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \boxed{p \cdot s = r \cdot q} \left(\Leftrightarrow \frac{p \cdot s}{q \cdot s} = \frac{r \cdot q}{q \cdot s} \right)$$

Rechenoperationen:

- $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{p\cdot s + q\cdot r}{q\cdot s}$
- $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{p\cdot r}{q\cdot s}$

Vorsicht:
Man nutzt in der Definition Repräsentanten der Äkl,
und die sind nicht eindeutig!

Frage: Wieso ist das unabhängig von der Wahl der Repräsent.?

$$\begin{tikzcd}
\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'},\ \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \arrow[r, Rightarrow, "?"] \arrow[d, Rightarrow] & \frac{p\cdot r}{q\cdot s} \overset{?}{=} \frac{p'\cdot r'}{q'\cdot s'} \\
p\cdot q' = p'\cdot q \wedge r\cdot s' = r'\cdot s \arrow[r, Rightarrow] & p\cdot r\cdot q'\cdot s' = p'\cdot r'\cdot q\cdot s \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Damit: die Multiplikation rationaler Zahlen ist wohldefiniert!

§ 7 Gruppen und Körper

A) Gruppen

Def. 7.1:

ⓐ Eine Gruppe ist ein Paar $(G,*)$ bestehend aus einer nicht-leeren Menge G und einer zweistelligen Operation, d.h. einer Abb. $* : G \times G \longrightarrow G : (g,h) \longmapsto g*h$, so dass folgende Axiome gelten:

(G1) $\forall g,h,k \in G : (g*h)*k = g*(h*k)$ "Assoziativität"

(G2) $\exists e \in G : \forall g \in G : e*g = g$ "Existenz eines Neutralen"

(G3) $\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G : g^{-1}*g = e$ "Existenz von Inversen"

Ein Element wie e wird ein Neutrales von G genannt und ein Element wie g^{-1} ein Inverses zu g genannt.

ⓑ Eine Gruppe $(G,*)$ heißt abelsch oder kommutativ, falls gilt: (G4) $\forall g,h \in G : g*h = h*g$. "Kommutativgesetz"

Bsp. 7.2:

ⓐ $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ sind abelsche Gruppen mit 0 als Neutralem und $-g$ als Inversem zu g.

ⓑ $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ sind abelsche Gruppen mit 1 als Neutralem und $\frac{1}{g}$ als Inversem zu g.

ⓒ Sei M eine nicht-leere Menge.

Betrachte: $G := \mathrm{Sym}(M) := \{ f : M \longrightarrow M \mid f \text{ bijektiv} \}$

Bemerkung: die Verkettung von Abbildungen liefert eine zusätzliche Operation auf G

$$G \times G \longrightarrow G : (f,g) \longmapsto f \circ g$$

Beh: $(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ ist eine Gruppe

Bew: (G1) folgt aus 3.11

(G2) $id_M \circ f = f$, da: $(id_M \circ f)(x) = id_M(f(x)) = f(x) \ \forall x \in M$

$\forall f \in \mathrm{Sym}(M)$

(G3) Sei $f \in \mathrm{Sym}(M)$, d.h. $f : M \to M$ bijektiv,

$\overset{}{\underset{3.11}{\Longrightarrow}} \exists f^{-1} : M \to M : f^{-1} \circ f = id_M = f \circ f^{-1}$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist Inverse zu f im Sinne von (G3).

Bemerkung: $|M| \geq 3 \Rightarrow (\mathrm{Sym}(M), \circ)$ ist nicht abelsch!

Lem. 7.3:

Sei $(G, *)$ eine Gruppe.

ⓐ Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt, und es gilt: $\forall g \in G : e * g = g * e = g$.

ⓑ Sei $g \in G$. Das Inverse g^{-1} zu g ist eindeutig bestimmt, und es gilt: $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

ⓒ $\forall g, h \in G : (g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ und $(g^{-1})^{-1} = g$

ⓓ Wenn die Gruppenoperation als Multiplikation und mit "·" bezeichnet wird, dann schreiben wir meist 1 für das Neutrale und $\frac{1}{g}$ für das Inverse zu g.

Wenn die Gruppenoperation als Addition und mit "+" bezeichnet wird, dann schreiben wir meist 0 für das Neutrale und $-g$ für das Inverse sowie $g - h$ für $g + (-h)$.

Lemma 7.4 (Kürzungsregeln)

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $g, a, b \in G$.

Dann: ⓐ $g * a = g * b \Rightarrow a = b$

ⓑ $a * g = b * g \Rightarrow a = b$

Beweis:

ⓐ $g * a = g * b \underset{(G3)}{\Longrightarrow} g^{-1} * (g * a) = g^{-1} * (g * b)$

$$\begin{array}{ccc}
g^{-1} * (g * a) & = & g^{-1} * (g * b) \\
\| {\scriptstyle (G1)} & & \| {\scriptstyle (G1)} \\
(g^{-1} * g) * a & & (g^{-1} * g) * b \\
\| {\scriptstyle (G3)} & & \| {\scriptstyle (G3)} \\
a \underset{(G2)}{=} e * a & & e * b \underset{(G2)}{=} b
\end{array}$$

ⓑ analog.

$\boxed{\varepsilon}$

B) Körper

Def. 7.5: ⓐ Ein Körper ist ein Tripel $(K,+,\cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei zweistelligen Operationen

$+ : K\times K \to K : (x,y)\mapsto x+y$ und $\cdot : K\times K \to K : (x,y)\mapsto x\cdot y$,

so dass folgende Axiome gelten:

① $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralem 0.

② $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralem 1.

③ $\forall\, x,y,z\in K : \; x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \;\wedge\; (y+z)\cdot x = y\cdot x + y\cdot z$

"Distributivgesetze"

ⓑ Eine Teilmenge L von K, die mit denselben Operationen auch ein Körper ist, nennt man einen Teilkörper von K.

Bsp. 7.6:

ⓐ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist ein Körper und $\mathbb{Q}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$.

ⓑ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper, weil 2 kein multipl. Inverses hat!

ⓒ $\mathbb{F}_2 := \{0,1\}$

Definiere $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{F}_2$ durch die Tabellen:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Mit dieser Festlegung erfüllt $(\mathbb{F}_2,+,\cdot)$ die Axiome eines Körpers!

Bemerkung:
- $\mathbb{F}_2$ ist der kleinste Körper, den es gibt.
- $\mathbb{F}_2$ ist kein Teilkörper von $(\mathbb{R},+,\cdot)$, weil $1+1=0$

ⓓ Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$,

Erinnerung an die Division mit Rest in $\mathbb{N}$:

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists_1\, q, r \in \mathbb{N}: \quad a = q \cdot p + r \quad \text{und} \quad 0 \le r < p$$

Notation: $r(a:p) := r$

Definiere: $+ : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ durch $a + b := r(a+b : p)$

$\cdot : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ durch $a \cdot b := r(a \cdot b : p)$

Beachte:

- $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p\text{-mal}} = r(1 + \dots + 1 : p) = r(p:p) = 0$
- $a \in \mathbb{F}_p \Rightarrow \underset{\text{in } \mathbb{F}_p}{\underset{\uparrow}{-a}} \overset{!}{=} \underset{\text{in } \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{p-a}} \in \mathbb{F}_p$
- $0 \neq a \in \mathbb{F}_p \Rightarrow \underset{\text{in } \mathbb{F}_p}{\underset{\uparrow}{a^{-1}}} = \, ?$ kann mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus' angewendet werden!

Notation 7.7: Sei K ein Körper und seien $x, y, \underset{\neq 0}{z} \in K$.

- $x - y := x + (-y)$
- $\frac{x}{z} := x \cdot z^{-1}$
- $x y := x \cdot y$

Lemma 7.8 (Rechenregeln)

Sei K ein Körper, $x, y, z \in K$ und $u, v \in K \setminus \{0\}$.

Dann: ⓐ $-(-x) = x$ ⓑ $x + y = z \iff x = z - y$

ⓒ $-(x+y) = -x - y$ ⓓ $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

ⓔ $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

(f) $(-x)\cdot(-y) = x\cdot y$ (g) $x\cdot(y-z) = x\cdot y - x\cdot z$

(h) $(u^{-1})^{-1} = u$ (j) $u\cdot x = u\cdot y \Rightarrow x = y$

(i) $x\cdot y = 0 \iff x = 0$ oder $y = 0$

(k) $\frac{x}{u}\cdot\frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}$, $\frac{x}{u}+\frac{y}{v} = \frac{xv + y\cdot u}{uv}$

Beweis: (a), (b), (c) + (h) folgen aus 7.3 + 7.4

(d) $0\cdot x + 0 = 0\cdot x = (0+0)\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x$

$\underset{KR\ 7.4}{\Longrightarrow} 0 = 0\cdot x$. Analog: $x\cdot 0 = 0$

(e) $x\cdot y + (-x)\cdot y = (x + (-x))\cdot y = 0\cdot y \underset{(d)}{=} 0$

$\Rightarrow$ $(-x)\cdot y$ hat die Eigenschaft des add. Inversen von xy

$\underset{\substack{7.3\\ \text{Eindeutigkeit}}}{\Longrightarrow} (-x)\cdot y = -(x\cdot y)$ Analog: $x\cdot(-y) = -(x\cdot y)$

(f) $(-x)\cdot(-y) \underset{(e)}{=} -(x\cdot(-y)) \underset{(e)}{=} -(-(x\cdot y)) \underset{(a)}{=} x\cdot y$

(g) analog

(j) folgt mit demselben Beweis wie KR 7.4

(i) "$\Leftarrow$" $x = 0$ oder $y = 0$ $\underset{(d)}{\Longrightarrow} x\cdot y = 0$

"$\Rightarrow$" $x \neq 0$ und $y \neq 0$ $\underset{x,y\in K\setminus\{0\}}{\Longrightarrow} x\cdot y \in K\setminus\{0\}$

d.h. $x\cdot y \neq 0$.

(h) nachrechnen.

$\square$

c) Summen, Produkte und der Binomische Lehrsatz

Notation 7.9

Sei K ein Körper und seien $x_0,\dots,x_n \in K$ für $n \in \mathbb{N}$.

Schreibe: $\prod_{i=0}^{n} x_i := x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ = Produkt von $x_0,\dots,x_n$

$\sum_{i=0}^{n} x_i := x_0 + x_1 + \dots + x_n$ = Summe von $x_0,\dots,x_n$

Festlegung: leeres Produkt $= 1$, leere Summe $= 0$

Außerdem definieren wir für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$:

- $$x^n := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} x = \underbrace{x \cdots x}_{n\text{-mal}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

- $x^{-n} := (x^{-1})^n = \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n\text{-mal}} = \frac{1}{x^n}$, falls $x \neq 0$

- $$n \cdot x := \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x = \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

- $(-n) \cdot x := n \cdot (-x) = \underbrace{(-x) + \dots + (-x)}_{n\text{-mal}}$

Bem. 7.10 (Rekursionsprinzip)

Idee: definiere etwas für die nat. Zahl n, durch Rückführung auf die Definition für $n-1$

Bsp: $\prod_{i=0}^{0} x_i := 1$ und $\prod_{i=0}^{n} x_i := x_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} x_i$

Bsp. 7.11 (Gauß)

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \dots + n \overset{!}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Beweis durch vollständige Induktion

n = 0: $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$ ✓

n−1 ↦ n: $\sum_{k=0}^{n} k = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)}_{} + n \underset{\text{Ind.}}{=} \frac{(n-1)\cdot((n-1)+1)}{2} + n$

$$= \frac{(n-1)\cdot n}{2} + \frac{2\cdot n}{2} = \frac{(n-1)\cdot n + 2\cdot n}{2}$$

$$= \frac{n\cdot((n-1)+2)}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$\square$

Satz 7.12 (Endliche geometrische Reihe)

Sei K ein Körper, $1 \neq q \in K$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

n = 0: $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ ✓

n ↦ n+1: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^k}_{} \underset{\text{Ind.}}{=} q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$= \frac{q^{n+1}\cdot(1-q)}{1-q} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\cancel{q^{n+1}} - q^{n+2} + 1 - \cancel{q^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$\square$

Def. 7.13:

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere:

$$n! := \begin{cases} \prod_{i=1}^{0} i = 1 & , n=0 \\ \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & , n \geq 1 \end{cases}$$

heißt n-Fakultät

Für $k, n \in \mathbb{N}$ definiere den Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Prop. 7.14

Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Beweis:

1. Fall: $k = 0$.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1)!} = 1 = 0 + 1 = \binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \checkmark$$

2. Fall: $k = n+1$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} = 1 = 1 + 0 = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \checkmark$$

3. Fall: $k < 0$ oder $k > n+1$.

$$\binom{n+1}{k} = 0 = 0 + 0 = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \checkmark$$

4. Fall: $1 \le k \le n$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(k-1))! \cdot (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1-k)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{k}{k} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{n+1-k}{n+1-k}$$

$$= \frac{k \cdot n! + (n+1-k) \cdot n!}{(n+1-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n! \cdot (\cancel{k} + n + 1 - \cancel{k})}{(n+1-k)! \cdot k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\, k!} = \binom{n+1}{k}$$

$\square$

Satz 7.15 (Binomischer Lehrsatz)

Sei K ein Körper, $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

Beweis durch Induktion nach n:

n = 0: $(x+y)^0 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k}$ ✓

n ↦ n+1: $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y$

$$\underset{\text{Ind.}}{=} x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} + y \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot x^{k+1}\cdot y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{k}\cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\cdot \underbrace{x^{k-1+1}}_{\overset{\shortparallel}{x^{k}}}\cdot \underbrace{y^{n-(k-1)}}_{\overset{\shortparallel}{y^{n+1-k}}} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{k}\cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

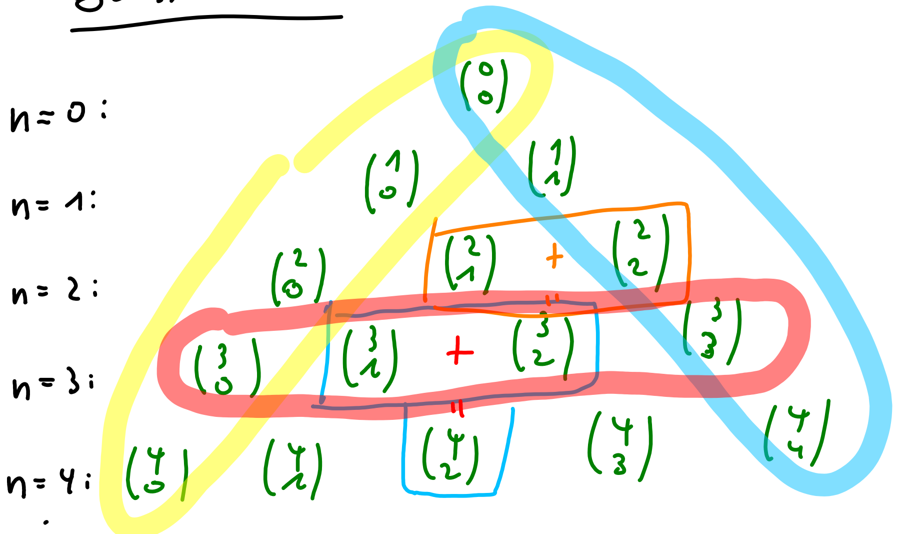
$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{\overset{7.14}{=}\binom{n+1}{k}}\right)\cdot x^{k}\cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot x^{k}\cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

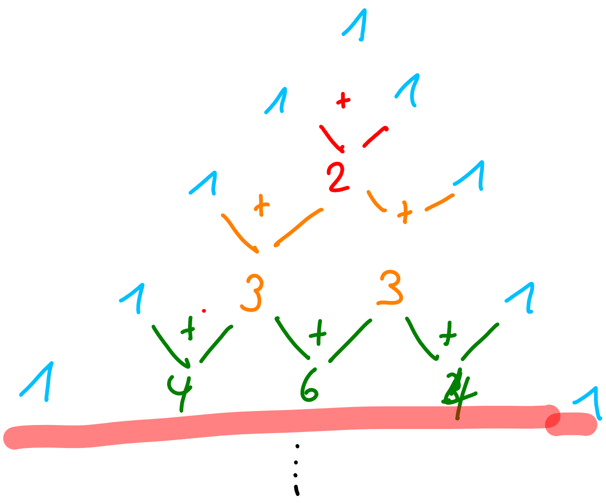
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot x^{k}\cdot y^{n+1-k} \qquad \checkmark$$

$\square$

Bem. 7.16 (Pascalsches Dreieck)



$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \overset{\shortparallel}{} \binom{n+1}{k}$$



Die n-te Zeile im Pascalschen Dreieck enthält genau die Binomialkoeffizienten im Binom. Lehrsatz für n!

<u>z.B.</u>: $(x+y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot y^4 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot y + \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot y^0$

$= y^4 + 4x \cdot y^3 + 6 \cdot x^2 y^2 + 4 \cdot x^3 \cdot y + x^4$

$\boxed{\xi}$

§ 8 Ordnungsrelationen

A) Ordnungsrelationen

Def. 8.1: Sei M eine Menge.

Eine Ordnungsrelation oder Halbordnung oder partielle Ordnung auf M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, so dass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(O1) $(x,x) \in R$ "Reflexivität"

(O2) $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$ "Antisymmetrie"

(O3) $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ "Transitivität"

Wir nennen dann (M, R) auch eine teilgeordnete Menge.

Bsp. 8.2: Sei $M = \mathbb{N}$.

(a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$

(b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } y\}$ " " " auf $\mathbb{N}$

Notation 8.3: Ordnungsrelationen werden meist mit Symbolen wie "$\leq$" statt "R" bezeichnet, und wir haben:

$$x \leq y \iff (x,y) \in \leq$$

Damit:

(O1) $\forall x \in M: \quad x \leq x$

(O2) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$

(O3) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Schreibe: wenn $x \neq y$ und $x \leq y$, schreibe: $x < y$

Bsp. 8.4: Sei N eine Menge und $M := \mathcal{P}(N)$.

Für $A, B \in M$ setze:

$$A \leq B \quad :\Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$

Dann ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf M

denn: (O1) $\forall A \subseteq N : \quad A \subseteq A$

(O2) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

(O3) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Beachte: i.a. stehen nicht alle Elemente von $\mathcal{P}(N) = M$ bzgl. $\leq$ in Relation zueinander

z.B.: $M = \mathbb{N}$, $A = \{2\}$, $B = \{3\}$ $\Rightarrow A \nsubseteq B, B \nsubseteq A$

Def. 8.5: Sei M eine Menge.

ⓐ Eine Ordnungsrelation $\leq$ auf M heißt Totalordnung oder lineare Ordnung, wenn je zwei Elemente aus M bzgl. $\leq$ vergleichbar sind, d.h. $\forall x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

ⓑ Sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf M, $A \subseteq M$ und $x \in A$.

Dann:
- x heißt minimal in A $:\Leftrightarrow \forall y \in A$ mit $y \leq x$ gilt $y = x$
- x heißt maximal in A $:\Leftrightarrow \forall y \in A$ mit $x \leq y$ gilt $y = x$

ⓒ Eine Wohlordnung ist eine Totalordnung, so dass jede nicht-leere Teilmenge ein minimales Element enthält.

Bem. 8.6:
Wenn eine Menge ein Minimum oder Maximum bezüglich einer Totalordnung besitzt, dann ist dieses eindeutig!

Bsp. 8.7:

ⓐ $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total geordnet, aber $\leq$ ist keine Wohlordnung!

übliche $\leq$-Relation

ⓑ $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist total geordnet, aber nicht wohlgeordnet

ⓒ Ordne $\mathbb{Z}$ wie folgt:

$$0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < - \cdots\cdots.$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ totalgeordnet und wohlgeordnet!

Bem. 8.8 (Archimedisches Prinzip)

Jede nicht-leere Teilmenge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl!

D.h. $(\mathbb{N}, \leq)$ ist wohlgeordnet!

B) Die Charakteristik eines Körpers

Def. 8.9: Es sei K ein Körper.

Wenn $n \cdot 1_K = 0_K$ für ein $0 \neq n \in \mathbb{N}$ gilt, dann nennen wir

$$\mathrm{char}(K) := \min\{m > 0 \mid m \cdot 1_K = 0_K\} \in \mathbb{N}.$$

die Charakteristik des Körpers K.

Andernfalls setzen wir $\mathrm{char}(K) := 0$.

Prop. 8.10

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 0$.

Dann ist $\mathrm{char}(K)$ eine Primzahl.

Beweis:

Angenommen: $n := \mathrm{char}(k)$ keine Primzahl

$\Rightarrow \exists\ 0 < a, b < n : \quad n = a \cdot b$

Setze: $x := a \cdot 1_K \ , \quad y := b \cdot 1_K$.

$$\Rightarrow x \cdot y = (a \cdot 1_K) \cdot (b \cdot 1_K) = (a \cdot b) \cdot 1_K = n \cdot 1_K = 0_K$$

$$\Rightarrow 0 = x = a \cdot 1_K \qquad \text{oder} \qquad 0 = y = b \cdot 1_K$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$n > a \geq \mathrm{char}(K) = n \qquad\qquad n > b \geq \mathrm{char}(K) = n$$

$$↯ \qquad\qquad\qquad\qquad ↯$$

Also: n ist eine Primzahl. $\square$

Bsp. 8.11:

ⓐ $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = \mathrm{char}(\mathbb{R}) = 0$

ⓑ $\mathrm{char}(\mathbb{F}_p) = p$

C) Das Supremumsaxiom

Def. 8.12: Sei $(M, \leq)$ total geordnet und $\emptyset \neq A \subseteq M$.

ⓐ $s \in M$ heißt eine obere Schranke von A $:\Leftrightarrow \forall x \in A : \ x \leq s$.
" " " untere Schranke " " $:\Leftrightarrow \forall x \in A : \ x \geq s$.

ⓑ A heißt nach oben beschränkt $:\Leftrightarrow$ A hat eine obere Schranke.
" " " unten " $:\Leftrightarrow$ " " " untere " .

ⓒ $s \in M$ heißt Supremum von A $:\Leftrightarrow s = \min\{s \in M \mid s \text{ obere Schranke von } A\}$
" " Infimum " " $:\Leftrightarrow s = \max\{s \in M \mid s \text{ untere Schranke von } A\}$

Notation: $\sup(A) =$ Supremum von A, $\inf(A) =$ Infimum von A

ⓓ A heißt beschränkt $:\Leftrightarrow$ A ist nach oben und unten beschränkt.

Bsp. 8.13:

ⓐ Sei A Teilmenge einer totalgeordneten Menge M.
Wenn A ein Maximum besitzt, dann gilt: $\max(A) = \sup(A)$.
" " " Minimum " , " " : $\min(A) = \inf(A)$

ⓑ $M = \mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnungsrelation und $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$
$\Rightarrow$ $1 = \max(A) = \sup(A)$, $\nexists \min(A)$, $0 = \inf(A)$.

ⓒ $M = \mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnungsrelation und $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} x > 0 \\ x^2 \leq 2 \end{smallmatrix}\right\}$
$\Rightarrow$ A ist nach oben beschränkt, hat in $\mathbb{Q}$ aber kein Supremum

Bem. 8.14 (Supremumsaxiom)

Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum!

Analog: jede nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum!

D) Angeordnete Körper

Def. 8.15:

Sei K ein Körper und $\leq$ eine Totalordnung auf K.
Dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper,
falls ① $\forall x, y, z \in K$ mit $x < y$ gilt $x + z < y + z$
② $\forall x, y, z \in K$ mit $x < y \land 0 < z$ gilt $x \cdot z < y \cdot z$

d.h. $\leq$ ist mit $+$ und $\cdot$ verträglich.

Ein $x \in K$ heißt positiv, falls $0 < x$, und negativ, falls $x < 0$.

Bsp. 8.16:

ⓐ $\mathbb{Q}$ mit $\leq$ ist ein angeordneter Körper, in dem das Sup.axiom nicht gilt.
$\mathbb{R}$ " " " " " , " " " " gilt.

ⓑ Es gibt keine OR auf $\mathbb{F}_2$, so daß $\mathbb{F}_2$ ein angeord. Körper wird!
Denn: Ang: $\mathbb{F}_2$ ist mit $\leq$ ein angeord. Körper.

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 < 1 & \Longrightarrow \quad 1 = 0+1 < 1+1 = 0 \text{ ↯} \\ \text{oder} & \\ 1 < 0 & \Longrightarrow \quad 0 = 1+1 < 0+1 = 1 \text{ ↯} \end{cases}$$

Lemma 8.17:

Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper und $x, y, u, v \in K$.

ⓐ $0 < x \iff -x < 0$

ⓑ $x \neq 0 \Longrightarrow 0 < x^2$

ⓒ $0 < 1$

ⓓ $0 < x < y \Longrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

ⓔ $x < y$ und $u < v \Longrightarrow x + u < y + v$

ⓕ $0 < x$ und $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow 0 < x^n$

ⓖ $0 \leq x, y$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.
Dann: $x < y \iff x^n < y^n$

Beweis:

ⓐ "$\Longrightarrow$" $0 < x \Longrightarrow -x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0$

"$\Longleftarrow$" $-x < 0 \Longrightarrow 0 = (-x) + x < 0 + x = x$

ⓑ 1. Fall: $0 < x \Longrightarrow 0 = 0 \cdot x < x \cdot x = x^2$

2. Fall: $x < 0 \overset{}{\underset{ⓐ}{\Longrightarrow}} 0 < -x \Longrightarrow 0 = 0 \cdot (-x) < \underset{\overset{\shortparallel}{x \cdot x = x^2}}{(-x) \cdot (-x)}$

ⓒ $0 \underset{\text{ⓑ}}{\overset{}{<}} 1^2 = 1$

ⓓ Seien $0 < x < y$.

Dann: $0 < y$.

Ang: $\frac{1}{y} < 0 \implies 1 = \frac{1}{y} \cdot y < 0 \cdot y = 0$ ↯ ⓒ

Also: $0 < \frac{1}{y}$. Analog: $0 < \frac{1}{x}$

$$\implies \underbrace{0 = 0 \cdot \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}}$$

$$\underset{x<y}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{y} = x \cdot \frac{1}{xy} < y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$$

ⓔ Seien $x < y$ und $u < v$

$\implies x + u < y + u$ und $u + y < v + y$

$\implies x + u < v + y = y + v$

ⓕ + ⓖ : Übungsaufgabe.

$\boxed{k}$

Prop. 8.18:

Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper, $A \subseteq K$ und $s \in K$.

Dann: ⓐ $s = \sup(A) \iff$ ① $\forall x \in A : x \leq s$

② $\forall 0 < \varepsilon \in K : \exists x \in A : s - \varepsilon < x$

ⓑ $s = \inf(A) \iff$ ① $\forall x \in A : x \geq s$

② $\forall 0 < \varepsilon \in K : \exists x \in A : s + \varepsilon > x$

Beweis: ⓐ "$\implies$" Sei $s = \sup(A) \implies s$ ist obere Schranke von $A \implies$ ①

Sei $0 < \varepsilon \in K \implies s - \varepsilon < s \implies s - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A

$\implies \exists x \in A : s - \varepsilon < x$

"⇐" ① $\Rightarrow$ s ist eine obere Schranke

Noch z.z.: es gibt keine kleinere obere Schranke von A

Sei $t \in K$ mit $t < s$. Setze: $K \ni \varepsilon := s - t > 0$

$\overset{}{\underset{②}{\Rightarrow}} \exists\, x \in A: \quad x > s - \varepsilon = s - (s-t) = t$

$\Rightarrow$ t ist keine obere Schranke von A

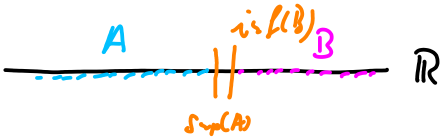
Also: $s = \min\{\text{obere Schranken von } A\} = \sup(A)$

ⓑ analog zu ⓐ. ∎

Lemma 8.19:

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Dann: $\sup(A) \leq \inf(B)$



Beweis: Vor. $\Rightarrow$ A nach oben beschränkt & B nach unten beschr.

$\underset{8.21}{\Rightarrow}$ $\sup(A)$ und $\inf(B)$ existieren

Ang: $\sup(A) > \inf(B)$

$\Rightarrow \varepsilon := \dfrac{\sup(A) - \inf(B)}{2} > 0$

$\Rightarrow$ $\sup(A) - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A und

$\inf(B) + \varepsilon$ " " untere " von B

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \exists\, a \in A: \quad a > \sup(A) - \varepsilon = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2} \\ &\ \exists\, b \in B: \quad b < \inf(A) + \varepsilon = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2} \end{aligned}\right)$$

$\Rightarrow \quad a > b$ ↯

Also: $\sup(A) \leq \inf(B)$ ∎

§ 9 Eigenschaften der reellen Zahlen

A) Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen

Theorem 9.1

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der üblichen Ordnungsrelation ist der einzige angeordnete Körper, in dem jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Bemerkung 9.2:

Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt, dann sagt Theorem 9.1:

$\exists\, f : \mathbb{R} \longrightarrow K$ bijektiv, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

- $f(x+y) = f(x) + f(y) \;\wedge\; f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
- $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$

Idee: alle weiteren Eigenschaften von $\mathbb{R}$ werden wir aus diesen Axiomen ableiten, ohne Bezug zu Dezimalzahlen!

Satz 9.3 ($\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet.)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass:

$$y < n \cdot x.$$

Beweis:

Setze:
$$A := \overset{\neq \emptyset}{\{ n \cdot x \mid n \in \mathbb{N} \}} \subseteq \mathbb{R}.$$

Zeige: y ist keine Obere Schranke von A.

Ann: A ist beschränkt.

$\Rightarrow$ $s := \sup(A)$ existiert

$\underset{0<x}{\Longrightarrow}$ $s - x < s$ $\Rightarrow$ $s - x$ ist keine obere Schranke von A

$\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}: \quad s - x < n \cdot x$

$\Rightarrow$ $s = (s-x) + x < n \cdot x + x = \underset{\underset{A}{\cap}}{(n+1) \cdot x}$

$\Rightarrow$ s keine obere Schranke von A ↯

Also: A ist nicht nach oben beschränkt

$\Rightarrow$ y ist keine obere Schranke von A

$\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}: \quad y < n \cdot x$ $\square$

Korollar 9.4

ⓐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\, n \in \mathbb{Z}: \quad n \leq x < n+1$

ⓑ $\forall\, 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}: \quad \exists\, n \in \mathbb{N}_{>0}: \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Beweis:

ⓐ 1. Fall: $0 \leq x < 1$. Dann: $n = 0$. ✓

2. Fall: $1 \leq x$. $\underset{9.3}{\Longrightarrow}$ $\exists\, m \in \mathbb{N}: \quad x < m \cdot 1 = m$

Setze: $M := \{ k \in \mathbb{N} \mid x < k \} \neq \emptyset$

$\underset{AP\, 8.8}{\Longrightarrow}$ $m_0 := \min(M)$ existiert $\quad$ $m_0 = \min M$

Setze: $n := m_0 - 1 \Rightarrow n < m_0 \Rightarrow n \notin M$

$\Rightarrow$ $n \leq x < m_0 = n+1$

3. Fall: $x < 0$

$\Rightarrow \quad 0 < -x \quad \underset{1./2. \text{Fall}}{\Rightarrow} \quad \exists\, m \in \mathbb{N}: \quad m \le -x < m+1$

$\Rightarrow \quad -(m+1) < x \le -m$

Fall 3.a: $x = -m$, setze: $n := -m$ ✓

Fall 3.b: $x < -m$, setze: $n := -(m+1)$ ✓

ⓑ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$.

$\underset{8.17}{\Rightarrow} \quad 0 < \frac{1}{\varepsilon} \quad \underset{ⓐ}{\Rightarrow} \quad \exists\, n \in \mathbb{N}: 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$

$\underset{8.17}{\Rightarrow} \quad 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

☐

B) Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Def. 9.5: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ heißt ein abgeschlossenes Intervall.
- $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ " " offenes Intervall.
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$
- $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

heißen halboffene Intervalle.

- $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$
- $(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$
- $(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

heißen uneigentliche Intervalle.

- $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$

Satz 9.6 ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann: $\exists\, q \in \mathbb{Q}: q \in (a,b)$

D.h.: zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale!

Beweis:

- $a < b \Rightarrow 0 < b - a \underset{9.4}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: 0 < \boxed{\frac{1}{n} < b-a}$
- $9.4 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}: \boxed{m \le n \cdot a} \boxed{< m+1}$

$$\Rightarrow a < \underset{\underset{\mathbb{Q}\cap(a,b)}{\cap}}{\frac{m+1}{n}} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \le a + \frac{1}{n} < a + b - a = b$$

□

Satz 9.7 (Bernoullische Ungleichung)

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Beweis durch Induktion nach n:

$n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$ ✓

$n \mapsto n+1$: Ind. $\Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

$$\underset{1+x \geq 0}{\Longrightarrow} (1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+n\cdot x)\cdot(1+x) = 1 + (n+1)\cdot x + \overbrace{n \cdot x^2}^{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)\cdot x$$

□

Satz 9.8:

$\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \exists_1 a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a^n = x$

Wir nennen a die nicht-negative n-te Wurzel aus x

Notation: $a =: \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$.

Beweis:

Verwendet 9.1, insbesondere das Supremum + Bernoullische Ungleichung!

□

Satz 9.10: $\nexists\, q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$

Beweis:

Ang: $\exists\, q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $q^2 = 2$

o.E.: $\frac{a}{b}$ ist in gekürzter Form, d.h. a & b sind teilerfremd!

$\Rightarrow \quad 2 = q^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \boxed{a^2 = 2 \cdot b^2} \Rightarrow a^2$ ist gerade

$\Rightarrow \quad a$ ist gerade $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z} : \boxed{a = 2 \cdot c}$

$\Rightarrow \quad 4 \cdot c^2 = (2 \cdot c)^2 = a^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow b^2 = 2 \cdot c^2$ ist gerade

$\Rightarrow \quad b$ ist gerade $\Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{Z} : \boxed{b = 2 \cdot d}$

↯ a, b teilerfremd

Also: $\nexists\, q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$

$\square$

Nachtrag: Beweis von Satz 9.8

Bh: $\forall\, x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \;\; \exists_1\, a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a^n = x$

Beweis:

Eindeutigkeit von a:

Ang: $\exists\, a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a \neq b$ und $a^n = x = b^n$

O.E.: $0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq \underset{x}{\underset{\parallel}{a^n}} < \underset{x}{\underset{\parallel}{b^n}}$ ↯

Also: es gibt höchstens ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^n = x$.

Existenz von a:

Falls $x = 0$, dann: $a = 0$ tut's!

Sei also $0 < x$.

Def.: $\boxed{A := \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ und } y^n \leq x \} \overset{\ni 0}{\neq} \emptyset}$

Zeige: $1+x$ ist eine obere Schranke für A

Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1+x > 0$.

$$\Rightarrow \quad y^n \geq (1+x)^n \underset{\substack{\text{Bernoulli} \\ (x>0)}}{\geq} 1 + \underbrace{n \cdot x}_{\geq x} > x$$

$\Rightarrow \quad y \notin A \quad \Rightarrow \quad 1+x$ ist obere Schranke von A

Also: $a := \sup(A)$ existiert

Zeige: $a^n = x$

Ang: $a^n < x$

Idee: finde $\varepsilon > 0$, s.d. $a + \varepsilon \in A$ ↯

Daten: $a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c := \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} \cdot \underbrace{a^{n-k}}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq \binom{n}{n} = 1 > 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c} > 0 \quad \underset{x - a^n > 0}{\Rightarrow} \quad \frac{x-a^n}{c} = \underbrace{\frac{1}{c}}_{>0} \cdot \underbrace{(x - a^n)}_{>0} > 0$$

Setze: $\varepsilon := \min\left\{ \frac{x-a^n}{c}, 1 \right\} > 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a^n + c \cdot \varepsilon \leq a^n + c \cdot \frac{x-a^n}{c} = x}$$

Ferner: $0 < \varepsilon \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \forall k \geq 1: \quad 0 < \varepsilon^k \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad (a+\varepsilon)^n \underset{\substack{7.15 \\ \text{B.L.S.}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \varepsilon^k = a^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \underbrace{\varepsilon^k}_{\leq \varepsilon}$$

$$\leq a^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k}}_{= c} \cdot \varepsilon = a^n + c \cdot \varepsilon \leq x$$

$\Rightarrow \quad a + \varepsilon \in A$ ↯ $a = \sup(A)$

Also: $a^n \geq x$

Ang: $a^n > x$

Idee: Finde $\varepsilon > 0$ und $y \in A$, s.d. $y^n > (a-\varepsilon)^n \geq x$ ↯

Dann: $a^n > x > 0$ und $a \geq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{a > 0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a\cdot(a^n - x)}{n\cdot a^n} > 0$$

Setze: $$\varepsilon := \min\left\{\frac{a\cdot(a^n-x)}{n\cdot a^n}, a\right\} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{a} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{a} \geq -1$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\cdot\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right) = 1 - n\cdot\frac{\varepsilon}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a^n\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)^n}_{=\,(a-\varepsilon)^n} \geq a^n\cdot\left(1-n\cdot\frac{\varepsilon}{a}\right) \geq \underbrace{\cancel{a}^n\cdot\left(1-\cancel{n}\cdot\frac{\frac{\cancel{a}\cdot(a^n-x)}{\cancel{n}\cdot \cancel{a}^n}}{\cancel{a}}\right)}_{=\,a^n - (a^n - x)\,=\,x}$$

Beachte: $a-\varepsilon < a = \sup(A)$

$$\Rightarrow \quad \exists\, y\in A : \quad a-\varepsilon < y$$

$$\Rightarrow \quad y^n > (a-\varepsilon)^n \geq x \quad ↯\ y\in A$$

Also: $a^n = x$

$\boxed{\varepsilon}$

§ 10 Der Körper der komplexen Zahlen

A) Die Arithmetik der komplexen Zahlen

Satz 10.2

Die Menge $\mathbb{C} := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ wird durch

$$(x,y) + (u,v) := (x+u,\ y+v)$$

und

$$(x,y) \cdot (u,v) := (x\cdot u - y\cdot v,\ x\cdot v + y\cdot u)$$

ein Körper, der Körper der komplexen Zahlen.

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Bem. 10.3

ⓐ
- $0_{\mathbb{C}} := (0,0) \in \mathbb{C}$ ist das Neutrale der Addition
- $1_{\mathbb{C}} := (1,0) \in \mathbb{C}$ ist das " " Multiplikation
- $(-x,-y)$ ist das additive Inverse von (x,y)
- $\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ ist das multiplikative Inverse von $(x,y) \neq (0,0)$

ⓑ $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto (x, 0)$ erfüllt

- $i(x\cdot y) = (x\cdot y, 0) = (x,0)\cdot(y,0) = i(x)\cdot i(y)$
- $i(x+y) = (x+y, 0) = (x,0) + (y,0) = i(x) + i(y)$
- $i(1) = (1,0) = 1_{\mathbb{C}}$
- i ist injektiv

Also: wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $i(\mathbb{R}) = x$-Achse, d.h. x-Achse ist Teilkörper von $\mathbb{C}$, der isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

ⓒ Setze: $i := (0,1)$

$$\Rightarrow \quad i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = \underset{\iota(-1)\ \hat{=}\ -1}{\underset{\parallel}{(-1,0)}}$$

Identifikation: $(x,0) = \iota(x) \hat{=} x$

$$\Rightarrow \quad (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) \hat{=} x + i\cdot y$$

Damit wird die Multiplikation zu:

$$(x+iy)\cdot(u+iv) = x\cdot u + iy\cdot iv + x\cdot iv + iy\cdot u$$

$$= xu + i^2 yv + i\cdot xv + i\cdot yu = (xu - yv) + i\cdot(xv+yu)$$

Damit: $\mathbb{C} = \{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

Lemma 10.4

Es gibt keine Totalordnung "$\leq$" auf $\mathbb{C}$, so daß $(\mathbb{C},+,\cdot,\leq)$ ein angeordneter Körper ist.

Beweis:

Ang. doch.

$$\Rightarrow \quad 0 \underset{8.17}{<} i^2 = -1 \underset{8.17}{<} 0 \quad ↯ \qquad \square$$

Def. 10.5:

ⓐ $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x+iy \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ heißt Betragsfunktion auf $\mathbb{C}$ und $|z|$ heißt der Absolutbetrag von $z\in\mathbb{C}$.

Bemerkung: $x\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C} \Rightarrow |x| = \left\{\begin{matrix} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{matrix}\right\} = \sqrt[2]{x^2}$

ⓑ $\overline{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : x+iy \longmapsto x-iy$ heißt die komplexe Konjugation und $\overline{z}$ heißt das komplex Konjugierte von $z\in\mathbb{C}$.

ⓒ $\mathrm{Re}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}: x+iy \longmapsto x$ heißt der Realteil und

$\mathrm{Im}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}: x+iy \longmapsto y$ " " Imaginärteil.

Bsp. 10.6:

Sei $z = i - 1 = (-1) + 1 \cdot i = (-1) + i$

$\Rightarrow \mathcal{R}(z) = -1, \quad \mathrm{Im}(z) = 1, \quad \bar{z} = (-1) + (-1) \cdot i$
$= -1 - i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad z \cdot \bar{z} = (-1 + i) \cdot (-1 - i) = (-1)^2 - (-1) = 2 = |z|^2$$

Lemma 10.7 (Rechenregeln in $\mathbb{C}$) Seien $z, w \in \mathbb{C}$.

ⓐ $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ Betrag ist multiplikativ

ⓑ $|z + w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung

$\big| |z| - |w| \big| \leq |z - w|$

ⓒ $|z| = 0 \iff z = 0$ Definitheit des Betrags

ⓓ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ⓔ $z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

ⓕ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ⓖ $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

ⓗ $\bar{\bar{z}} = z$ ⓘ $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

ⓙ $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ⓚ $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ⓛ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

Beweis: ⓑ 2. Ungleichung + ⓒ – ⓛ : Übungsaufgabe

ⓐ Sei $z = x + iy, \quad w = u + iv$

$\Rightarrow |z \cdot w|^2 = |(xu - yv) + i \cdot (xv + yu)|^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$

$= x^2u^2 - \cancel{2xuyv} + y^2v^2 + x^2v^2 + \cancel{2xvyu} + y^2u^2$

$= x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 = (x^2 + y^2) \cdot (u^2 + v^2) = |z|^2 \cdot |w|^2$

$\hfill \overset{\shortparallel}{(|z| \cdot |w|)^2}$

$\overset{9.8}{\Longrightarrow} |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

ⓑ $|z+w|^2 \underset{ⓓ}{=} (z+w)\cdot\overline{(z+w)} \underset{ⓕ}{=} (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w})$

$= z\cdot\bar{z} + z\cdot\bar{w} + w\cdot\bar{z} + w\cdot\bar{w} \underset{ⓓⓖⓗ}{=} |z|^2 + (z\cdot\bar{w} + \overline{z\cdot\bar{w}}) + |w|^2$

$\underset{ⓕ}{=} |z|^2 + 2\cdot\underbrace{Re(z\cdot\bar{w})}_{\underset{j}{\leq}|z\cdot\bar{w}|} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2\cdot|z\cdot\bar{w}| + |w|^2$

$\underset{ⓒ}{=} |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|\bar{w}|\cdot|w|^2 \underset{ⓔ}{=} |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|w| + |w|^2$

$= (|z| + |w|)^2$

$\underset{8.17}{\Longrightarrow} \quad |z+w| \leq |z| + |w|$ $\quad \boxed{}$

Bsp. 10.8:

ⓐ $z = 3+2i \quad , \quad w = 5-i$

$\Rightarrow$
- $z\cdot w = (3\cdot 5 - 2\cdot(-1)) + i\,(3\cdot(-1) + 2\cdot 5) = 17 + 7i$
- $|w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\cdot\bar{w}}{|w|^2} = \dfrac{1}{26}\cdot(3+2i)\cdot(5+i)$

$= \frac{1}{26}\cdot\left((3\cdot 5 - 2\cdot 1) + (3\cdot 1 + 2\cdot 5)\right) = \frac{1}{26}\cdot(13 + 13i)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i$

ⓑ $z = 3+4i \quad , \quad w = 5-12i$

$\Rightarrow$
- $z + w = (3+5) + (4-12)\cdot i = 8 - 8i$
- $|z+w| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{2}\cdot 8 < 2\cdot 8 = 16 < 18$

$= 5 + 13 = \sqrt{3^2+4^2} + \sqrt{5^2+(-12)^2} = |z| + |w|$

- $\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{(3+\cancel{4i}) + (3-\cancel{4i})}{2} = \dfrac{2\cdot 3}{2} = 3 = R(z)$

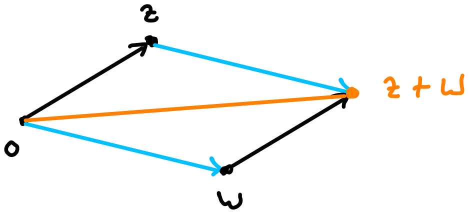
18

B) Geometrische Interpretation der Arithmetik in $\mathbb{C}$

Bemerkung 10.9

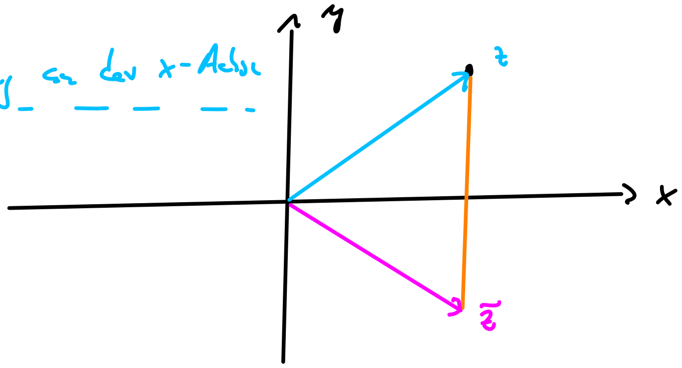
ⓐ Addition in $\mathbb{C}$ $\hat{=}$ Vektoraddition

$$z = x + iy = (x, y)$$
$$w = u + iv = (u, v)$$
$$\Rightarrow z + w = (x+u) + i(y+v)$$
$$= (x+u, y+v)$$



ⓑ Komplexe Konjugation = Spiegelung an der x-Achse

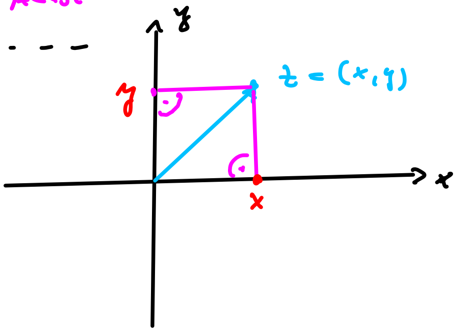
$$z = x + iy = (x, y)$$
$$\Rightarrow \bar{z} = x - iy = (x, -y)$$



ⓒ Realteil = orthogonale Projektion auf die x-Achse

Imaginärteil = " " " " y-Achse

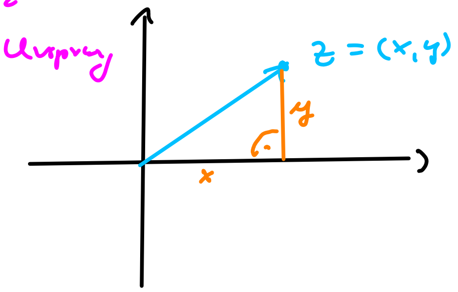
$$z = x + iy = (x, y)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = x$$
$$\mathrm{Im}(z) = y$$



ⓓ Betrag von z = Länge des Vektors z

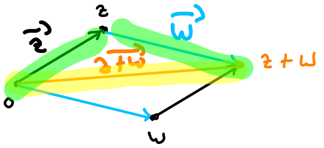
= Abstand von z zum Ursprung

$$z = x + iy = (x, y)$$
$$\Rightarrow (\text{Länge von } z)^2 = x^2 + y^2$$
$$= \text{Länge von } z = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$



ⓔ Dreiecksungleichung

$$\underset{\text{Länge von } \overrightarrow{z+w}}{\overset{}{|z+w|}} \leq \underset{\text{Länge } \vec{z}}{|z|} + \underset{\text{Länge } \vec{w}}{|w|}$$

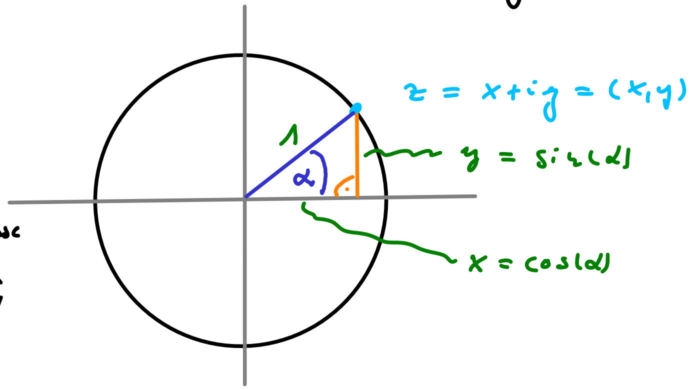


Direkt von 0 nach z+w zu gehen ist kürzer als den Umweg über z zu machen.

ⓕ Menge der Punkte vom Betrag 1

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

= Kreis vom Radius 1 um den Ursprung



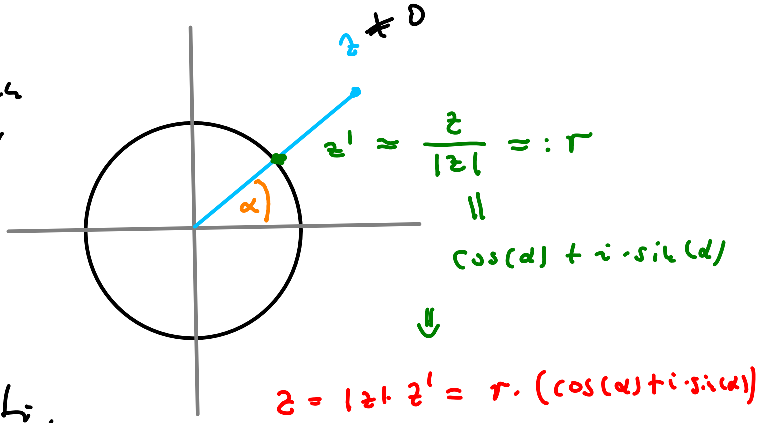
Beachte: der Winkel α, den die Strecke $\overline{0z}$ mit der x-Achse einschließt, legt z eindeutig fest.

Nämlich: $z = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)$

ⓖ Polarkoordinaten

$\arg(z) := \alpha =$ Winkel, den $\overline{0z}$ mit der x-Achse einschließt

= Argument von z



$$z' = \frac{z}{|z|} =: r$$
$$\shortparallel$$
$$\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)$$
$$\Downarrow$$
$$z = |z|\cdot z' = r\cdot(\cos(\alpha)+i\cdot\sin(\alpha))$$

Damit: z ist eindeutig festgelegt durch $|z|$ und $\arg(z)$

Notation: $(|z|, \arg(z)) = (r, \alpha)$ heißen die Polarkoordinaten von z

ⓗ Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Seien $z = |z|\cdot(\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))$, $w = |w|\cdot(\cos(\beta) + i\cdot\sin(\beta)) \in \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow z\cdot w = |z|\cdot|w|\cdot\Big(\big(\cos(\alpha)+i\cdot\sin(\alpha)\big)\cdot\big(\cos(\beta)+i\cdot\sin(\beta)\big)\Big)$$
$$= |z|\cdot|w|\cdot\Big(\underbrace{(\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta))}_{\shortparallel} + i\cdot\underbrace{(\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta))}_{\shortparallel}\Big)$$
$$= |z|\cdot|w|\cdot\Big(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta)\Big)$$

d.h. $z \hat{=} (|z|, \alpha)$, $w \hat{=} (|w|, \beta)$

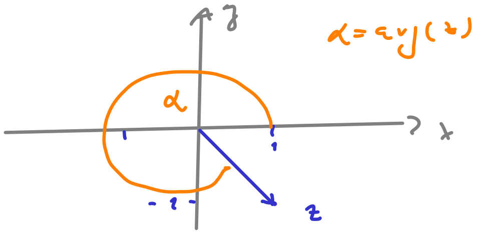
$$\Rightarrow \quad z \cdot w \hat{=} (|z| \cdot |w|, \alpha + \beta)$$

Beim Multiplizieren komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und die Argumente werden addiert!

Damit: die Multiplikation mit $z \hat{=} (r, \alpha)$ ist eine Drehstreckung, die um den Winkel α dreht und um den Faktor r streckt!

Bsp. 10.10:

Sei $z = 1 - i \in \mathbb{C}$



$$\Rightarrow \quad \frac{z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$$

$$= \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{4}\pi$$

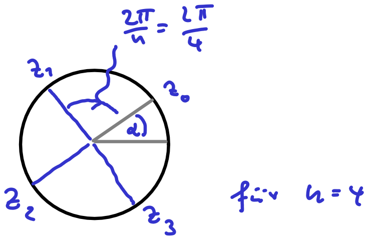
Bem. 10.11 (n-te Wurzeln)

Sei $w = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ setze:

$$a_k := \sqrt[n]{r} \cdot \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right)}_{=: z_k} \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow |z_k| = 1$ und



Damit: $(a_k)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \cdot \left(\cos\left(n \cdot \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right)$

$$= r \cdot (\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) + i \cdot \sin(\alpha + k \cdot 2\pi))$$

$$= r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) = w$$

Also: $a_0, \dots, a_{n-1}$ sind n paarweise verschiedene n-te Wurzeln von w!

$\square$

Kapitel II: Eindimensionale Analysis

Generalvoraussetzung: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

§ 11 Folgen und ihre Grenzwerte

A) Konvergente Folgen

Def. 11.1:

Eine **Folge** in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Bem. 11.2:

ⓐ Eine Folge $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ ist eindeutig festgelegt durch ihre Bilder $a_n := \alpha(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Schreibe deshalb statt α auch $(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. wir schreiben die Folge als die Familie der Bilder.

ⓑ Manchmal möchte man eine Folge nicht beim Index 0 starten lassen, sondern bei einem anderen Wert $k \in \mathbb{N}$: $(a_n)_{n \geqslant k}$ steht dann für die Abb. $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : n \longmapsto a_{n+k}$.

Bsp. 11.3:

ⓐ Sei $c \in \mathbb{K}$. Dann ist $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : n \longmapsto c$ ist die **konstante Folge** zum Wert c, d.h. $a_n = \alpha(n) = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$ d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}}$.

ⓑ Sei $q \in \mathbb{K}$. Dann ist $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : n \longmapsto q^n$ ist die **geometrische Folge** zu q, d.h. $a_n = \alpha(n) = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ⓒ Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ beginnt beim Index 1

Def. 11.4:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a\in\mathbb{K}$.

ⓐ a heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N} : \quad \forall n\geq n_\varepsilon : \quad |a_n-a|<\varepsilon$$

Wir sagen dann auch, die Folge konvergiert gegen a

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \longrightarrow a$

ⓑ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent $:\Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{K} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

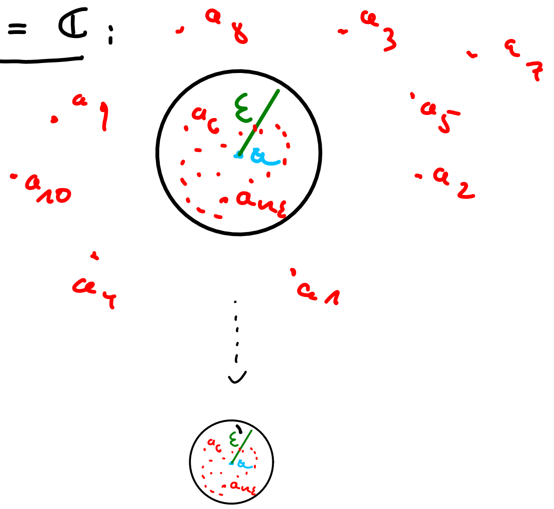
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent $:\Leftrightarrow \nexists a\in\mathbb{K} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

ⓒ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Was bedeutet die Bedingung:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N} : \quad \forall n\geq n_\varepsilon : \quad |a_n-a|<\varepsilon \quad ?$$

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$:



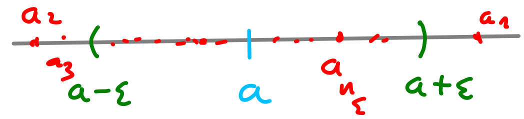
Für jedes ε gilt:

ab einem gewissen Index n_ε liegen alle Folgenglieder im Kreis mit Radius ε um a!

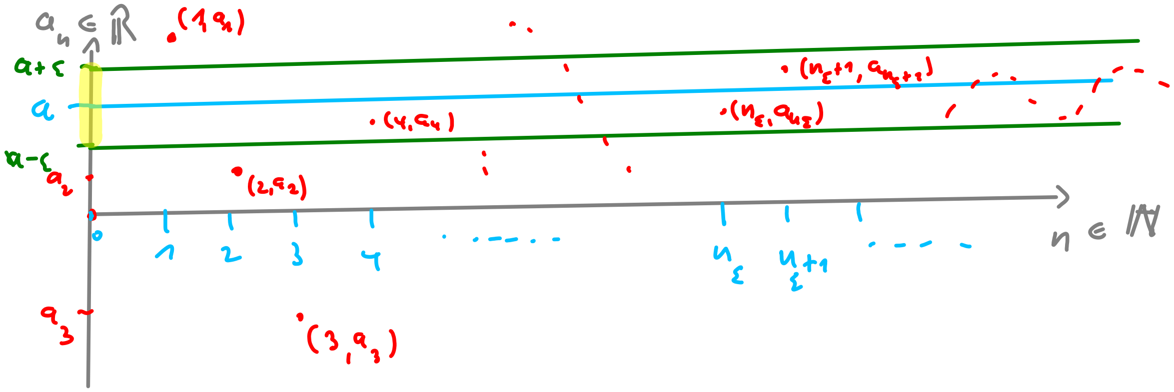
Wenn ε kleiner wird, wird n_ε in der Regel größer sein!

Bei immer kleiner werdenden ε müssen die Folgenglieder immer näher an a heranrücken!!!

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$:



$\mathbb{K} = \mathbb{R}$:



Beispiel 11.5

ⓐ Konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_{n\in\mathbb{N}}$:

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon : \quad \boxed{|a_n - c| < \varepsilon}$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze: $n_\varepsilon := 0$. Sei $n \geq n_\varepsilon$ gegeben.

$$\Rightarrow |a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

$\boxed{\varepsilon}$

ⓑ Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon : \quad \boxed{|a_n - 0| < \varepsilon}$

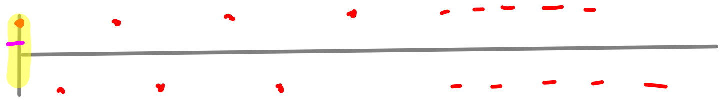
Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Kor. 9.4 $\Longrightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad 0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$

Sei $n \geq n_\varepsilon$. $\Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$

$\boxed{\varepsilon}$

ⓒ Beh: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent



Beweis:

Sei $a \in \mathbb{R}$.

z.z: a ist kein Grenzwert von $\overset{\overset{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{\parallel}}{((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}}$

d.h. $\neg\left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon\right)$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \exists n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \geq \varepsilon$

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gegeben.

Ang: $\forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$.

$$2 = |(-1)^{n_\varepsilon} - (-1)^{n_\varepsilon+1}| = |a_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon+1}| = |a_{n_\varepsilon} - a + a - a_{n_\varepsilon+1}|$$

$$\leq \underbrace{|a_{n_\varepsilon} - a|}_{< \frac{1}{2}} + \underbrace{|a - a_{n_\varepsilon+1}|}_{< 1/2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \;\; ↯$$

Also: $\exists n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \geq \varepsilon$ $\square$

Lemma 11.6:

Sei $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$. Dann: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Beweis:

z.z.: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |q^n - 0| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Setze: $x := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

$\overset{9.4}{\Longrightarrow} \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \overbrace{x \cdot \varepsilon}^{>0}$

Sei $n \geq n_\varepsilon$. Beachte: $(1+x)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} (1 + n \cdot x) > 0$

$$\Rightarrow |q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1 + n \cdot x} < \frac{1}{n \cdot x} \leq \frac{1}{n_\varepsilon \cdot x} < \frac{x \cdot \varepsilon}{x} = \varepsilon$$

$\square$

Bem. 11.7:

$$\begin{array}{lll}
a_n \to a, & \text{d.h.} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : & |a_n - a| < \varepsilon \\
\Updownarrow & & \quad \| \\
a_n - a \to 0. & \text{d.h.} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : & |(a_n - a) - 0| < \varepsilon \\
\Updownarrow & & \quad \| \\
|a_n - a| \to 0, & \text{d.h.} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : & ||a_n - a| - 0| < \varepsilon
\end{array}$$

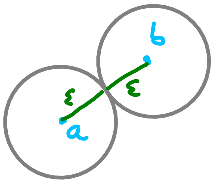
Prop. 11.8:

Der Grenzwert einer konvergenten Folge in $\mathbb{K}$ ist eindeutig.

Beweis:

Ang.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ mit $a \neq b$

Setze: $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$



$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

und

$\exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : |a_n - b| < \varepsilon$

Setze: $n := \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \geq n_\varepsilon, n'_\varepsilon$

$$\Rightarrow |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq \underbrace{|a - a_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - b|}_{<\varepsilon} < \underset{\overset{\|}{|a-b|}}{2 \cdot \varepsilon} \ ↯$$

□

B) Beschränkte Folgen

Def. 11.9: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt $:\Longleftrightarrow$ $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$

Ein solches s heißt eine Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bsp. 11.10:

ⓐ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist konvergent und beschränkt,

denn: $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1 \quad \forall n\geq 1.$

ⓑ $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent und beschränkt,

denn: $|(-1)^n| = 1 \leq 1 \quad \forall n\geq 1$

Satz 11.10:

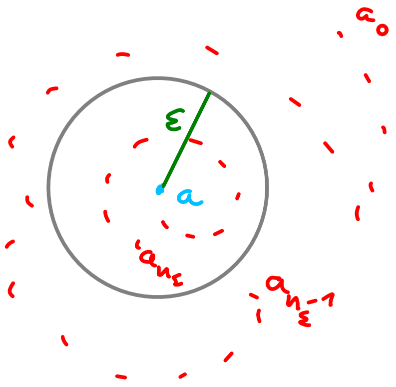
Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist auch beschränkt.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Setze: $\varepsilon := 1.$

$\Rightarrow \exists\, n_\varepsilon : \forall n\geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon = 1$



Setze: $S := \max\{|a|+1, |a_0|, \dots, |a_{n_\varepsilon-1}|\}$

Sei $n\in\mathbb{N}$ gegeben.

1. Fall: $n < n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \leq S$

2. Fall: $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \overbrace{|a_n - a|}^{<\varepsilon=1} + |a| < \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\leq$}\\ S}}{1+|a|}$

Also: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. □

Bsp. 11.12:

ⓐ Die Umkehrung von 11.11 gilt nicht!

d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\underset{\text{11. 10ⓑ}}{\not\Longrightarrow}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

ⓑ Sei $k\geq 1 \Rightarrow (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt,

und also auch nicht konvergent!

ⓒ Sei $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| > 1$.

Dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und nicht konvergent.

Dazu:

Ang: $S > 0$ ist Schranke für $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Setze: $x := |q| - 1 > 0$

$\underset{9.3}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : S < n \cdot x$

$\Rightarrow |q^n| = (1+x)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\cdot x > n \cdot x > S$

↯ S Schranke für $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Also: $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und wegen 11.11 nicht konvergent. $\square$

Lemma 11.13:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Beweis:

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow \exists S > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < S$
- Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Beachte: $a_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{S}} : \forall n \geq N_{\frac{\varepsilon}{S}} : |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{S}$

Setze: $n_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{S}}$.

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$\Rightarrow |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n - 0 \cdot b_n| = \overbrace{|a_n - 0|}^{< \frac{\varepsilon}{S}} \cdot \overbrace{|b_n|}^{< S} < \frac{\varepsilon}{S} \cdot S = \varepsilon$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ $\square$

Bsp. 11.15:

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ und $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

$\Rightarrow \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

c) Grenzwertsätze

Proposition 11.15: (Grenzwertsätze)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$.

Dann: ⓐ $a_n + b_n \longrightarrow a+b$ und $a_n - b_n \longrightarrow a-b$

ⓑ $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$

ⓒ $|a_n| \longrightarrow |a|$

ⓓ Wenn $b \neq 0$, dann: $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : b_n \neq 0$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ ist konvergent mit $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Beweis:

ⓐ Sei $\varepsilon > 0$

- $a_n \to a \Rightarrow \exists n'_{\varepsilon/2} : \forall n \geq n'_{\varepsilon/2} : |a_n - a| < \varepsilon/2$
- $b_n \to b \Rightarrow \exists n''_{\varepsilon/2} : \forall n \geq n''_{\varepsilon/2} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze: $n_\varepsilon := \max\{n'_{\frac{\varepsilon}{2}}, n''_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$. Sei $n \geq n_\varepsilon \geq n'_{\frac{\varepsilon}{2}}, n''_{\frac{\varepsilon}{2}}$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b - b_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow a+b$$

Analog: $a_n - b_n \longrightarrow a-b$

ⓑ
$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ a_n \longrightarrow a \Rightarrow (a_n - a) \to 0 \\ \cdot\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent} \Rightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt} \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n - a) \cdot b_n \to 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ b_n \to b \Rightarrow (b_n - b) \to 0 \\ \cdot\ (a)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent} \Rightarrow (a)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt} \end{array}\right\} \Rightarrow (b_n - b) \cdot a \longrightarrow 0$$

- Damit: $a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n \cdot b_n - a \cdot b_n) + (a \cdot b_n - a \cdot b)$

$$= \underbrace{(a_n - a) \cdot b_n}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{(b_n - b) \cdot a}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \xrightarrow{\textcircled{a}} 0 + 0 = 0$$

- Also: $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

Ⓒ Sei $\varepsilon > 0$.

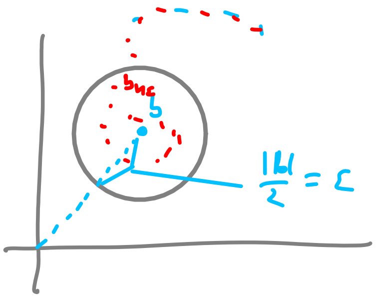
Weil $a_n \to a$, gilt: $\exists\, n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \big|\, |a_n| - |a| \,\big| \underset{10.7}{\leq} |a_n - a| < \varepsilon$$

Also: $|a_n| \longrightarrow |a|$

Ⓓ Sei $b \neq 0$.



Setze $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$

$\Rightarrow \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0 : |b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$

Zeige: $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$

$$|b| = |b_n + (b - b_n)| \leq |b_n| + \overbrace{|b - b_n|}^{< \varepsilon \ \forall n \geq n_0} < |b_n| + \varepsilon = |b_n| + \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|b|}{2} = |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n| \quad \Rightarrow \quad b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$$

<u>Frage:</u> $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}$ wobei $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Beachte: $b_n \to b \Rightarrow \exists\, n'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}} : \forall n \geq n'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}$

Setze: $n_\varepsilon := \max\left\{ n'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}},\ n_0 \right\}$.

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n \cdot b} \right| = \underbrace{\boxed{\frac{1}{|b_n|}}}_{\substack{< \frac{2}{|b|} \\ \text{weil} \\ n \geq n_0}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{< \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2} \\ \text{weil} \\ n \geq n'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}}}} < \overset{\varepsilon}{\overset{\|}{\frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}}}$$

<u>Also:</u> $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}$

• Damit: ⓑ $\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$\square$

Bsp. 11.16:

ⓐ $$\frac{1}{n^2} = \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$$

ⓑ $$a_n = \frac{7n^2+3}{4n^2+n+1} = \frac{(7n^2+3)\cdot\frac{1}{n^2}}{(4n^2+n+1)\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{\overset{\substack{7\\\uparrow}}{7} + \overset{\substack{0\\\nearrow}}{\frac{3}{n^2}}}{\underset{\substack{\swarrow\\4}}{4} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{7+0}{4+0+0} = \frac{7}{4}$$

D) Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Prop. 11.17 (Einschachtelungssatz)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

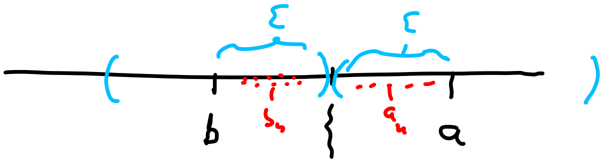
ⓐ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \ a_n \leq b_n \quad \Rightarrow \quad a \leq b$

ⓑ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \ a_n \leq c_n \leq b_n \ \wedge \ a = b \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

Beweis:

ⓐ Ang.: $b < a$.

$\Rightarrow \ \varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$



$b+\varepsilon = a-\varepsilon$

Wegen: $\cdot\ a_n \to a \ \Rightarrow \ \exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : \ |a_n - a| < \varepsilon \ \Rightarrow \ a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$\cdot\ b_n \to b \ \Rightarrow \ \exists n''_\varepsilon : \forall n \geq n''_\varepsilon : \ |b_n - b| < \varepsilon \ \Rightarrow \ b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Wähle $n = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n_0\}$.

$\Rightarrow \ a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$

$\Rightarrow \ a - b < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{a-b}{2} = a - b$ ↯

Also: $b \geq a$.

ⓑ Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |c_n - a| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

- $a_n \to a \Rightarrow \exists n_\varepsilon' : \forall n \geq n_\varepsilon' : |a_n - a| < \varepsilon$
- $b_n \to a \Rightarrow \exists n_\varepsilon'' : \forall n \geq n_\varepsilon'' : |b_n - a| < \varepsilon$

Setze: $n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon', n_\varepsilon'', n_0\}$.

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |c_n - a| < \varepsilon$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ $\square$

Bsp. 11.18:

Sei $k \geq 1 \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, "n\to\infty"'] & \leq & \frac{1}{n^k} \arrow[dd, "n\to\infty"] & \leq & \frac{1}{n} \arrow[d, "n\to\infty"] \\
0 \arrow[drr, Rightarrow, "11.17"'] & & & & 0 \arrow[dll, Rightarrow, "11.17"] \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Def. 11.20

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), falls: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$)

Bsp. 11.20:

- $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und divergent.
- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend und konvergent.

Satz 11.21 (Monotoniekriterium)

Jede monoton wachsende bzw. fallende, beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$, und sei s eine obere Schranke für die Folge.

$\Rightarrow$ $A := \{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ist nach oben durch s beschränkt.

$\Rightarrow$ $a := \sup(A)$ existiert!

Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$\Rightarrow$ $a-\varepsilon$ ist keine obere Schranke von A

$\Rightarrow$ $\exists\, a_{n_\varepsilon} \in A : \quad a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \quad a-\varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq \overset{\overset{A}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{a_n} \leq \sup(A) = a < a+\varepsilon$$

$\Rightarrow$ $|a_n - a| < \varepsilon$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Analog: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\})$ $\square$

Bem. 11.22:

Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

ⓐ Falls A nach oben beschränkt ist, dann:

$\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monot. wachs. Folge in A mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$.

ⓑ Falls A nach unten beschränkt ist, dann:

$\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monot. fallend in A mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(A)$.

Beweis:

ⓐ Wähle $a_0 \in A$ beliebig, $a := \sup(A)$.

Für $n \geq 1$ ist $\varepsilon := \frac{1}{n} > 0$ $\Rightarrow$ $a - \varepsilon = \sup(A) - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A

$$\Rightarrow \exists\, b \in A : \quad a - \varepsilon < b \ (\leq a)$$

Setze: $a_n := \max\{b, a_{n-1}\}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}}{0} \leq \underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}}{|a_n - a|} = a - a_n \leq a - b < \varepsilon = \underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}}{\frac{1}{n}}$$

$\overset{11.17}{\Longleftarrow}$

$\overset{11.17}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

ⓑ analog. □

Bsp. 11.23 (Rekursive Folge – Heron-Verfahren)

Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Setze: $a_0 := 1$

Definiere rekursiv: $a_{n+1} := \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) > 0$ für $n \geq 0$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$

① Zeige: $a_{n+1}^2 \geq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

denn: $$0 \leq \left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 = a_n^2 - \overbrace{2\cdot a_n \cdot \frac{c}{a_n}}^{2\cdot c} + \frac{c^2}{a_n^2}$$

$$\xRightarrow[+4\cdot c]{} 0 < 4c \leq a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2} = a_n^2 + 2\cdot a_n \cdot \frac{c}{a_n} + \frac{c^2}{a_n^2} = \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow c \leq \frac{1}{4}\cdot\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 = a_{n+1}^2$$

② Zeige: $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend

$$① \Rightarrow \forall n \geq 1: \; a_n^2 \geq c \xRightarrow{a_n>0} a_n \geq \frac{c}{a_n}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\cdot(a_n + a_n) = a_n \quad \forall n \geq 1$$

③ Zeige: $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

denn: $0 < a_n \leq a_1 \quad \forall n \geq 1$ und ②

④ Zeige: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$

- ② + ③ $\xRightarrow[11.21]{}$ $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent, d.h. $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert
- Beachte: $$a \longleftarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\underset{\substack{\downarrow\\ a}}{a_n} + \underset{\substack{\downarrow\\ \frac{c}{a}}}{\frac{c}{a_n}}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

$$\xRightarrow[\text{Eindeutigkeit des Grenzwerts}]{} \boxed{a = \frac{1}{2}\cdot\left(a + \frac{c}{a}\right)}$$

$$\xRightarrow[-\frac{1}{2}a]{} \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a} \xRightarrow[\cdot 2a]{} a^2 = c \quad \text{und} \quad \overset{11.17\,ⓐ}{a \geq 0} \text{ weil } a_n > 0 \;\forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{c}.$$

$\square$

E) Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Def. 11.24

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen.

Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

ÜA: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a}$

Bsp. 11.25:

$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ ist eine Teilfolge von $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Satz von Bolzano-Weierstraß 11.26

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:

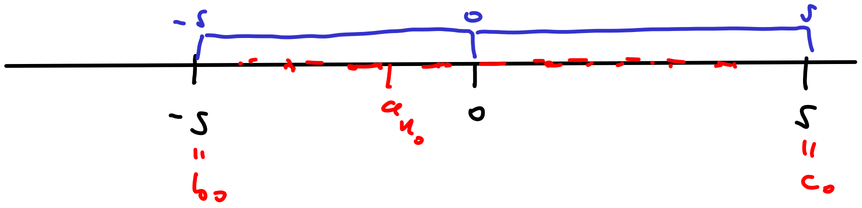
1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists\, s > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : -s \leq a_n \leq s$

Setze: $b_0 := -s$ und $c_0 := s$, d.h. $[b_0, c_0] = [-s, s]$ enthält unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Setze: $n_0 := 0$ und $a_{n_0} \in [b_0, c_0]$, d.h. $b_0 \leq a_{n_0} \leq c_0$.



Teile $[b_0, c_0]$ in zwei gleiche Hälften: $[b_0, \underset{\substack{\parallel \\ \frac{b_0+c_0}{2}}}{\circ}]$ und $[\underset{\substack{\parallel \\ \frac{b_0+c_0}{2}}}{\circ}, c_0]$

$\Rightarrow$ mindestens eines der Teilintervalle enthält unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Wähle ein solches und nenne die Intervallgrenzen b_1 und c_1, d.h. $[b_1, c_1] \subseteq [b_0, c_0]$

Wähle ein $a_{n_1} \in [b_1, c_1]$ mit $n_1 > n_0$, das geht, weil $[b_1, c_1]$ ∞-viele a_n's enthält.

Teile $[b_1, c_1]$ wieder in zwei gleich große Hälften $[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}]$ und $[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1]$ und wähle eines davon, das ∞ viele a_n's enthält, nenne das Intervall $[b_2, c_2]$ und wähle $a_{n_2} \in [b_2, c_2]$ mit $n_2 > n_1$.

Fahre so fort und konstruiere rekursiv:

- $[b_k, c_k]$ mit $c_k - b_k = \frac{1}{2} \cdot (c_{k-1} - b_{k-1})$
- a_{n_k} mit $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k$ und $n_k > n_{k-1}$

D.h. $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zeige: ① $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

② $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ & $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind konvergent mit $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} c_k$.

Zu ②:

klar: · $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend & $b_0 \leq b_k \leq c_0$

· $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ " " fallend & $b_0 \leq c_k \leq c_0$

$\underset{\text{Monotonie Krit.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, b \in \mathbb{R}: \lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$

$\exists\, c \in \mathbb{R}: \lim\limits_{k\to\infty} c_k = c$

Zudem: Länge von $[b_k, c_k] = c_k - b_k$ $\qquad \cancel{\frac{2\cdot S}{2^k}}$

$\qquad ||$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$$\frac{1}{2}\cdot \text{Länge}[b_{k-1}, c_{k-1}] = \frac{1}{2}\cdot(c_{k-1} - b_{k-1}) \underset{\text{Ind.}}{=} \frac{c_0 - b_0}{2^k}$$

$$\Rightarrow c - b \xleftarrow[k\to\infty]{} c_k - b_k = \frac{2\cdot S}{2^k} = (2\cdot S)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow c - b = 0 \quad \Rightarrow \quad c = b$$

Zu ①: Einschachtelungssatz + $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k \quad \forall k \geq 0$

$$\underset{②}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} b_k$$

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$.

$$\underset{10.7}{\Rightarrow} |\text{Re}(a_n)| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. $(\text{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$$\underset{1.\text{ Fall}}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ s.d. } \text{Re}(a_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} x$$

$$10.7 \Rightarrow |\text{Im}(a_{n_k})| \leq |a_{n_k}| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

d.h. $(\text{Im}(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$$\underset{1.\text{Fall}}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (a_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}} \text{ s.d. } \text{Im}(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow[j\to\infty]{} y$$

$$\underset{\substack{\text{ÜA in}\\ 11.24}}{\Rightarrow} \text{Re}(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow[j\to\infty]{} x$$

Damit: $$a_{n_{k_j}} = \underset{\substack{j\to\infty\downarrow\\ x}}{\text{Re}(a_{n_{k_j}})} + i\cdot \underset{\substack{j\to\infty\downarrow\\ y}}{\text{Im}(a_{n_{k_j}})} \xrightarrow[j\to\infty]{\text{ÜA}} x + i\cdot y$$

$\boxed{\square}$

Bsp. 11.27:

$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent,

hat die $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Konvergente Teilfolge!

Satz 11.28:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $[a,b]$.

Dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in [a,b]$.

Beweis:

Ang.: $c := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \notin [a,b]$.

1. Fall: $\boxed{c > b} \Rightarrow \varepsilon := \frac{c-b}{2} > 0$

Vor. $\Rightarrow a_n \longrightarrow c \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - c| < \varepsilon$

$$\Rightarrow 0 < c-b \underset{a_{n_\varepsilon}\in[a,b]}{\leq} c - a_{n_\varepsilon} = |a_{n_\varepsilon} - c| < \varepsilon = \frac{c-b}{2} \ \lightning$$

2. Fall: $c < a$, analog.

$\square$

F) Das Cauchy-Kriterium

Def. 11.29:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall m>n\geq n_\varepsilon : |a_m-a_n|<\varepsilon .$$

Satz 11.30 (Cauchy-Kriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

Dann: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvg. Folge mit $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Sei $\varepsilon>0$ gegeben.

- $a_n\longrightarrow a \implies \exists N_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n\geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

Setze: $n_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Seien $m>n\geq n_\varepsilon$.

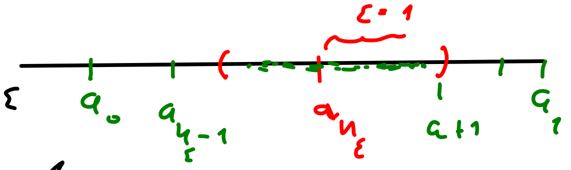
$$\implies |a_m-a_n| = |a_m-a+a-a_n| \leq \underbrace{|a_m-a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{|a-a_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}<\varepsilon$$

"$\Leftarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

① Zeige: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Setze $\varepsilon := 1>0$

$\underset{\text{Var.}}{\implies} \exists n_\varepsilon : \forall m>n\geq n_\varepsilon : |a_m-a_n|<\varepsilon$



$\implies \forall m\geq n_\varepsilon : |a_m-a_{n_\varepsilon}|<\varepsilon=1$

Setze: $S := \max\{|a_{n_\varepsilon}|+1, |a_0|,\dots,|a_{n_\varepsilon-1}|\}$

$\implies$ 1. Fall: $n<n_\varepsilon \implies |a_n|\leq S$

2. Fall: $n\geq n_\varepsilon \implies |a_n| = |a_n-a_{n_\varepsilon}+a_{n_\varepsilon}| \leq \overbrace{|a_n-a_{n_\varepsilon}|}^{<1}+|a_{n_\varepsilon}|$

$< 1+|a_{n_\varepsilon}|\leq S$

Also: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

② BW 11.26 $\Rightarrow$ $\exists$ TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$

③ Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist CF $\Rightarrow$ $\exists N_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall m > n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
- $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konv. gegen a $\Rightarrow$ $\exists k_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall k \geq k_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze: $n_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Sei $n \geq n_\varepsilon$.

Wähle ein $k \geq k_{\varepsilon/2}$, s.d. $n_k \geq n_\varepsilon$

$$\Rightarrow |a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a|$$

$$\leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\square$

Bsp. 11.31:

Sei $1 \neq q \in \mathbb{K}$ mit $|q| = 1$. Dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Zeige: $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge.

d.h. $\neg \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon \right)$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_\varepsilon : \exists m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| \geq \varepsilon$

Setze: $\varepsilon := |q - 1| > 0$. Sei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben.

Setze: $m := n_\varepsilon + 1$ und $n := n_\varepsilon$ $\Rightarrow$ $m > n \geq n_\varepsilon$.

$$\Rightarrow |a_m - a_n| = |q^{n_\varepsilon + 1} - q^{n_\varepsilon}| = \underbrace{|q^{n_\varepsilon}|}_{= |q|^{n_\varepsilon} = 1^{n_\varepsilon} = 1} \cdot \underbrace{|q - 1|}_{= \varepsilon} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist kein CF $\square$

Bem. 11.32:

Betrachte: $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)}_{\in \mathbb{Q}}$ für $n \geq 0$

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $a_n \longrightarrow \underset{\substack{\notin \\ \mathbb{Q}}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keinen GW in $\underline{\underline{\underline{\mathbb{Q}}}}$

Aber: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine CF, weil sie als Folge in $\mathbb{R}$ konvergent ist!

G) Bestimmt divergente Folgen

Def. 11.33: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

ⓐ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞

$:\Leftrightarrow \forall s > 0 \;\; \exists n_s \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_s : \; a_n > s$

Notation: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$, ∞ heißt uneigentlicher GW d. Folge

ⓑ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen $-\infty$

$:\Leftrightarrow \forall s < 0 \;\; \exists n_s \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_s : \; a_n < s$

Notation: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$, $-\infty$ heißt uneigentlicher GW d. Folge

Bsp. 11.34:

ⓐ $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞

ⓑ $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent

Bem. 11.35:

ⓐ Rechenregeln: Sei $a \in \mathbb{R}$.

Definiere:

- $a + \infty := \infty$, $a - \infty := -\infty$
- falls $a > 0$: $a \cdot \infty := \infty$, $a \cdot (-\infty) := -\infty$
- falls $a < 0$: $a \cdot \infty := -\infty$, $a \cdot (-\infty) := \infty$
- $\frac{a}{\infty} := 0$, $\frac{a}{-\infty} := 0$, $\infty + \infty := \infty$, $-\infty + (-\infty) := -\infty$, $\infty \cdot \infty := \infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) := \infty$

ⓑ GW-Sätze in 11.15 verallgemeinern sich in beschränkter Weise auf uneigentliche Grenzwerte mit Hilfe von ⓐ

z.B.:

- $a_n \to a\,,\ b_n \to \infty \implies a_n + b_n \longrightarrow a + \infty = \infty$
- $a_n \to a\,,\ b_n \to \infty \implies \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{\infty} = 0$

ⓒ Neue GW-Sätze:

- $a_n \to a \neq 0 \ \wedge\ b_n \to 0 \ \wedge\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : b_n > 0 \implies \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \infty$
- $a_n \to a \neq 0 \ \wedge\ b_n \to 0 \ \wedge\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : b_n < 0 \implies \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot (-\infty)$
- $a_n \to a \neq 0 \ \wedge\ b_n \to 0 \ \wedge\ \nexists n_0 : (\forall n \geq n_0 : b_n < 0)$ oder $(\forall n \geq n_0 : b_n > 0)$

  $\implies \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent

§ 12 Unendliche Reihen

A) Konvergenz unendlicher Reihen

Def. 12.1

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

ⓐ $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt Partialsumme von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

ⓑ Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt die durch $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definierte Reihe.

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := (s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$

ⓒ Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn sie als Folge konvergent ist.

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n$ bezeichnet auch den Grenzwert der Reihe!

ⓓ Reihen müssen nicht bei 0 starten:

$(a_k)_{k\geq n_0}$ und $s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k := (s_n)_{n\geq n_0}$

Bsp. 12.2:

Bh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$

Bew:

Beachte: $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Teleskopsumme

$$\Rightarrow \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 - 0 = 1$$

Bsp. 12.3 (Harmonische Reihe)

Beh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

Beweis:

Setze $n_k := 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad S_{n_k} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \overbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}^{\# = 2^{k-1}}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{k}{2} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

$\Rightarrow \quad (s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent

Lemma 12.4 (GW-Sätze für Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$.

ⓐ $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

ⓑ $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

ⓒ $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot a_n) = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

ⓓ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Insb.: alle Reihen sind konvergent!

Beweis: 11.15 + 11.17 ⓐ $\square$

B) Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Prop. 12.5 (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent,

wenn: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$

Beweis:

Setze: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{m>n}{\Longrightarrow} s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k \xRightarrow[11.30]{}$ Beh.

$\boxed{S}$

Lemma 12.6:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$, dann: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$

d.h. die Folge der Restglieder ist eine Nullfolge.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$$\xRightarrow[12.5]{} \exists \underset{\overset{!!}{=:}\, n_\varepsilon}{n'_{\varepsilon/2}} : \forall m > n \geq n'_{\varepsilon/2} : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon/2$$

Halte n fest und lasse m variabel

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \underset{11.17(a)}{\leq} \lim_{m\to\infty} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\| $$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - 0 \right| \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$$

$\boxed{L}$

Lemma 12.7: (Nullfolgenkriterium)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Beweis:

$$a_n = \underset{\underset{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}{\downarrow {\scriptstyle n\to\infty}}}{S_n} - \underset{\underset{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}{\downarrow}}{S_{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$$

$\square$

Bsp. 12.8:

ⓐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist divergent, weil $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ keine Nullfolge ist.

ⓑ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge $\not\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

12.3
harmon. Reihe

Satz 12.9 (Geometrische Reihe)

Sei $q \in \mathbb{K}$.

ⓐ $|q| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist konvergent mit GW $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

ⓑ $|q| \geq 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist divergent.

Beweis:

ⓐ $$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \underset{7.12}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{|q|<1} \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

ⓑ $|q| \geq 1 \Longrightarrow (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge

$$\underset{12.7}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ divergent}$$

$\square$

Satz 12.10 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Dann: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ ist konvergent.

Beweis:

Setze: $S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k$ für $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte die TF der geraden Partialsummen: $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\Rightarrow \quad S_{2\cdot(n+1)} = S_{2\cdot n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$
$$= S_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \leq S_{2n}$$

$\Rightarrow$ Folge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend

Analog: die TF der ungeraden Partialsummen $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend!

Zudem: $$\boxed{S_1 \leq S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0}$$

$\Rightarrow$ $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt

$\Rightarrow$ Monotonie-Krit. 11.21 $\quad S_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} s \;, \quad S_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} t$

$$\Rightarrow \quad s - t \xleftarrow[n\to\infty]{} S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{12.7} 0$$

$$\Rightarrow \quad s - t = 0 \quad \Rightarrow \quad s = t$$

Zeige: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Sei $\varepsilon > 0$.

- $s_{2n} \to s \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon' : \forall n \geq n_\varepsilon' : \; |s_{2n} - s| < \varepsilon$
- $s_{2n+1} \to s \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon'' : \forall n \geq n_\varepsilon'' : \; |s_{2n+1} - s| < \varepsilon$

Setze: $n_\varepsilon := \max\{2\cdot n_\varepsilon', 2n_\varepsilon''+1\}$.

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$\Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. $\square$

Bsp. 12.11 (Alternierende harmonische Reihe)

$(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ ist eine monoton fallende Nullfolge

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent

Zudem: $-1 = s_1 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \leq s_2 = -\frac{1}{2}$

Lemma 12.12 (Umklammern in Reihen)

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$ und sei

$0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ eine aufsteigende Folge nat. Zahlen.

Setze: $b_n := \sum\limits_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} a_k = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$.

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ist konvergent mit GW $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis:

Setze $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ und $t_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

$\Rightarrow t_n = s_{k_{n+1}-1} \Rightarrow (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine TF von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\underset{\not}{\Rightarrow} (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. $\square$

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

C) Absolut konvergente Reihen

Def. 12.13

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijektiv.

Dann heißt $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \dots)$

eine Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die

Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bsp. 12.14 i

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent!

Betrachte folgende Umordnung der Reihe:

$$\Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Index}\\ n \text{ ist}\\ \text{ungerade}}}{-\frac{1}{1}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Index}\\ \text{durch 2}\\ \text{teilbar,}\\ \text{nicht durch}\\ 4}}{\frac{1}{2}}\Big) + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Index}\\ \text{durch}\\ 4 \text{ teilbar}}}{\frac{1}{4}} + \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ungerad.}}}{-\frac{1}{3}} + \underset{\substack{\uparrow\\ 2\mid\\ 4\nmid}}{\frac{1}{6}}\Big) + \underset{\substack{\uparrow\\ 4\mid}}{\frac{1}{8}} + \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ungerade}}}{-\frac{1}{5}} + \underset{\substack{\uparrow\\ 2\mid\\ 4\nmid}}{\frac{1}{10}}\Big) + \underset{\substack{\uparrow\\ 4\mid}}{\frac{1}{12}} + \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ungerade}}}{-\frac{1}{7}} + \underset{\substack{\uparrow\\ 2\mid\\ 4\nmid}}{\frac{1}{14}}\Big) + \underset{\substack{\uparrow\\ 4\mid}}{\frac{1}{16}} + \dots$$

Lem. 12.22

falls die Reihe konvergiert

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{14}\right) + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

, d.h. der GW der altern. harm. Reihe hat sich durch Umordnen halbiert!

Fazit: der GW von konvergenten Reihen kann sich durch Umordnen ändern!

Def. 12.15:

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent

$:\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert

$\Longleftrightarrow (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, mit $t_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$

Bsp. 12.16:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent, nicht absolut konvergent

Lemma 12.17:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

Beweis:

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

(dann fertig mit Cauchy-Kriterium).

Vor. $\Longrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent}}$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon$

$\|$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \underset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

□

Umordnungssatz 12.18:

Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent mit demselben Grenzwert.

Beweis:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv.

① **Zeige:** $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{\sigma(n)})$ ist konvergent mit GW 0.

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{\sigma(k)}) - 0 \right| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Vor. $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

$$\underset{\text{Cauchy}}{\Longrightarrow} \exists n'_\varepsilon : \forall m > n \geq n'_\varepsilon : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon$$

$$\| \quad \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

Weil σ surjektiv und $\{0, 1, \dots, n'_\varepsilon\}$ endlich ist

$\Longrightarrow \exists n_\varepsilon : \{0, 1, \dots, n'_\varepsilon\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_\varepsilon)\}$

Sei nun $n \geq n_\varepsilon$. (Beachte: $n_\varepsilon \geq n'_\varepsilon$)

$$\Longrightarrow \left| \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{\sigma(k)}) - 0 \right| \underbrace{\leq}_{\Delta\text{-Ungl.} + 1.\text{Fall} + 2.\text{Fall}} \sum_{i=n'_\varepsilon+1}^{m} |a_i| < \varepsilon$$

Wie oft kommt ein a_i höchstens vor?
Wie oft mindestens?

wobei $m := \underbrace{\max\{0, \dots, n, \sigma(0), \dots, \sigma(n)\} + 1}_{> n'_\varepsilon}$

1. Fall: $i \leq n'_\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\underset{\underset{\{0, \dots, n\}}{\cap}}{i} \in \{0, 1, \dots, n'_\varepsilon\} \subseteq \underset{\underset{\{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}}{\cap}}{\{\sigma(0), \dots, \sigma(n_\varepsilon)\}}$

$\Rightarrow$ a_i kommt unter den a_k's und den $a_{\sigma(k)}$'s jeweils genau einmal vor

$\Rightarrow$ in der Summe heben sich die beide weg!

2. Fall: $i \geq n'_\varepsilon$ $\Rightarrow$ a_i kommt doppelt vor und hebt sich weg oder kommt nur 1x positiv oder negativ vor

② GW-sätze für Reihen

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-(a_n-a_{\sigma(n)})) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{\sigma(n)})}_{\underset{GW}{=}0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\| $$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

③ Wende ① & ② auf $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \underset{①\&②}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ist konvergent

$\Downarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ist abs. konvergent

∎

D) Konvergenzkriterien für absolute Konvergenz

Satz 12.19 (Majorantenkriterium)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen in $\mathbb{K}$.

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist und $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq |b_n|$,

dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Wir nennen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dann eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis.

Setze : $s_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$

$\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt durch $s_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

Prop. 12.20 (Minorantenkriterium)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen $\mathbb{R}$.

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent und $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq b_n \geq 0$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Wir nennen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis:

Setze: $t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$

$\Rightarrow$ $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\underbrace{\text{monoton wachsend}}$, weil $b_k \geq 0 \;\forall k$

Vor. $\Rightarrow$ $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent $\xRightarrow[11.21]{}$ $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Zudem: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \geq \sum_{k=0}^{n} b_k = t_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt $\overset{11.11}{\Longrightarrow}$ $\underset{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}{\underset{\|}{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}}}$ divergent

$\square$

Bsp. 12.21:

Bh: $k \geq 2$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist absolut konvergent

Bew:

$k=2$: $a_n := \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n\cdot(n+1)} =: b_n \quad \forall n \geq 1$

$\underset{\text{Maj.krit.}}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$ ist konv. Maj. für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \overset{\|}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}}$$

$\Rightarrow$ $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist abs. konvergent

$k>2$: $0 < \frac{1}{n^k} < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konv. Maj. für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

$\square$

Satz 12.22 (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$.

ⓐ $\exists\, q < 1 : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

ⓑ $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beweis:

ⓐ $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n \underset{0<q<1}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist konv. Maj. von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

ⓑ $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1^n = 1 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Satz 12.23 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$.

ⓐ $\exists\, q < 1 : \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

ⓑ $\forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beweis:

ⓐ $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \Rightarrow |a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \leq q^2 \cdot |a_{n-1}| \overset{\text{Ind.}}{\leq} \dots \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \cdot q^{-n_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

ist konvergente Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

ⓑ $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_n| \neq 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_0}| \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. $\square$

Kor. 12.24 (Praktikable Wurzel-/Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$.

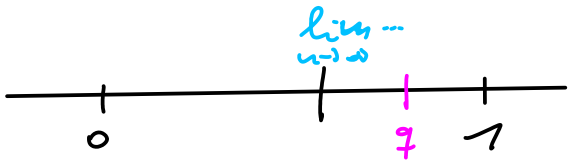
ⓐ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

ⓑ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent

ⓒ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ $\Rightarrow$ keine Aussage zur Konvergenz

Beweis:

ⓐ $q := \dfrac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dots}{2}$



$\Rightarrow$ Wende 12.22 ⓐ oder 12.23 ⓐ an!

ⓑ • $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \overset{12.23 ⓑ}{\Rightarrow}$ Beh.

• $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \underset{12.22 ⓑ}{\Rightarrow}$ Beh.

$\boxed{}$

Bem. 12.25:

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

ABER:

• $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ $\forall n \geq 1$

• $\nexists\, q < 1 : \forall n : 1 - \frac{1}{n+1} \leq q$ ⇝ QK gilt nicht

• $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

Bsp. 12.25:

Beh.: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{n!}}_{=:a_n}$ ist absolut konvergent

Bew.:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{n^2}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)!}} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

$$\underset{\substack{\text{PQK}\\ 12.24}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abs. konvergent.} \qquad \boxed{<}$$

E) Das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen

Satz 12.27 (Cauchy-Produkt)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{K}$.

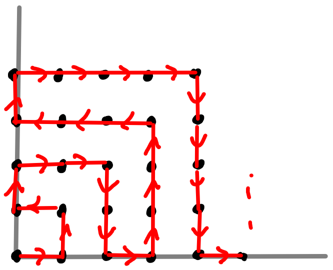
Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent

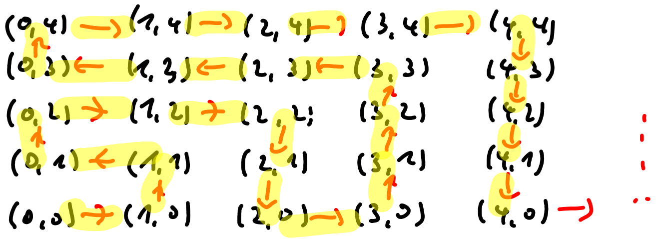
und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{k+\ell=n} a_k \cdot b_\ell$.

Beweis

① Konstruiere eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wie folgt:





Damit: (*) $\{(k,\ell) \mid 0 \le k,\ell \le m\} = \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma((m+1)^2-1)\}$

② Definiere: $d_n := a_k \cdot b_\ell$, wenn $\sigma(n) = (k, \ell)$

Zeige: $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ ist absolut konvergent

$$\sum_{n=0}^{m} |d_n| \le \sum_{n=0}^{(m+1)^2-1} |d_n| \underset{\circledast}{=} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} |a_k \cdot b_\ell| = \sum_{k=0}^{m} |a_k| \cdot \sum_{\ell=0}^{m} |b_\ell|$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} |b_\ell|$$

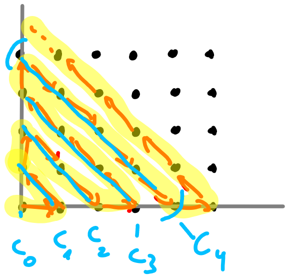
für alle $m \in \mathbb{N}$

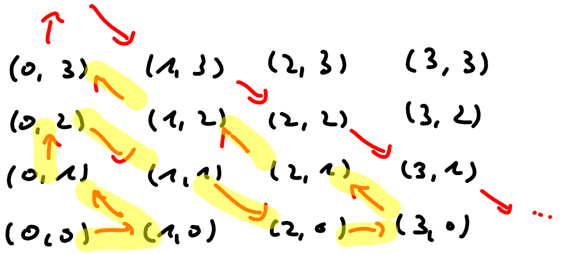
$\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$ ist beschränkt, also konvergent

③ Beachte: $\sum_{i=0}^{\infty} d_i \xleftarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=0}^{(n+1)^2-1} d_i \underset{\circledast}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=0}^{\infty} d_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$

④ Konstruiere mit Cantorschem Diagonalverfahren 2. Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:





Setze: $e_n := a_k \cdot b_\ell = d_{\sigma^{-1}(\pi(n))}$ wenn $\pi(n) = (k, \ell)$

$\sigma^{-1} \circ \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv $\Rightarrow$ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(d_{\sigma^{-1}(\pi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Umordnung von $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ ist absolut konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$

⑤ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ entsteht aus $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ durch Umklammern

$\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$

⑥ $$\sum_{n=0}^{m} |c_n| = \sum_{n=0}^{m} \Big| \sum_{k+l=n} a_k \cdot b_l \Big| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k+l=n} |a_k \cdot b_l|$$

$$\le \sum_{k=0}^{m} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{m} |b_l| \le \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|}_{}$$

hängt nicht von m ab!

$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{m} |c_n| \right)_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, also konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ abs. konvergent. ß

F) Potenzreihen

Def. 12.28:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ und t eine Veränderliche.

Ein Ausdruck der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$ wird Potenzreihe in der Veränderlichen t mit Entwicklungspunkt a genannt.

Meist: $a = 0 \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$

Ziel: setze für t Werte $x \in \mathbb{K}$ ein und erhalte eine konvergente oder divergente Reihe in $\mathbb{K}$!

Lemma 12.29

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathbb{K}$ und $y \in \mathbb{K}$, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ konvergiert.

Dann: $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist absolut konvergent.

Bew:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergent $\Rightarrow (a_n \cdot y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge

$\Rightarrow (a_n \cdot y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Rightarrow \exists s : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot y^n| \le s$

- Sei $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$. Setze: $q := \frac{|x|}{|y|} < 1$

$$\Rightarrow \quad |a_n \cdot x^n| = |a_n \cdot y^n| \cdot \frac{|x^n|}{|y^n|} = \underbrace{|a_n \cdot y^n|}_{\leq S} \cdot q^n \leq S \cdot q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} S \cdot q^n = S \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist konv. Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist abs. konv. nach Majorantenkriterium.

Notation 12.30

Definiere:

- $\sup(\emptyset) := -\infty$
- $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow \sup(A) := \infty$
- Also: $\forall A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
- Sei $x \in \mathbb{R}$.
  - $\frac{x}{\infty} := 0$
  - $\frac{x}{-\infty} := 0$
  - $\frac{x}{0} := \infty$ falls $x > 0$
  - $\frac{x}{0} := -\infty$ falls $x < 0$

Def. 12.31

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$.

Dann heißt $r := \sup\{ |y| \mid y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ konvergent} \} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

$a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n$ ist konvergent

Satz 12.32:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r.

ⓐ $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist abs. konvergent.

ⓑ $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > r$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist divergent.

Für $\mathcal{U}_r(0) := \{ x \in \mathbb{K} \mid |x| < r \}$ = r-Umgebung der 0, dann definiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Abbildung

$$\mathcal{U}_r(0) \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

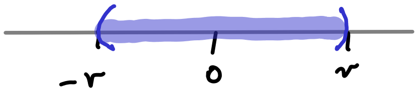
$\mathcal{U}_r(0)$ heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

Bem. 12.33:

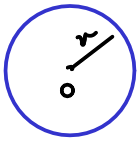
ⓐ 12.32 macht keine Aussage zu $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| = r$!
Die Menge $\{ x \in \mathbb{K} \mid |x| = r \}$ heißt Rand des Konvergenzbereichs.

ⓑ Falls $r = \infty$, dann: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist konvergent $\forall x \in \mathbb{K}$.

ⓒ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathcal{U}_r(0) = (-r, r)$



$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\mathcal{U}_r(0)$ = Kreisscheibe um 0 mit Radius r



Beweis von 12.32:

ⓐ Setze: $A := \{ |y| \mid y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ konvergent} \}$

$\Rightarrow r = \sup(A)$

Zeige: $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r \implies \exists |y| \in A : |x| < |y|$ mit $y \in \mathbb{K}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergent

1. Fall: $r = \infty$.

Sei $x \in \mathbb{K} \implies |x| < \infty = \sup(A) \implies \exists |y| \in A : |x| < |y|$ mit $y \in \mathbb{K}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergent

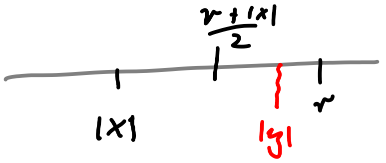
1. Fall: $r < \infty$

Sei $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \overset{\sup(A)}{\overset{\shortparallel}{r}}$. $\implies \varepsilon := \frac{r - |x|}{2} > 0$

$\implies r - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A

$\implies \exists |y| \in A$ mit $y \in \mathbb{K}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ konverg.

und $\underset{\substack{\shortparallel \\ |x| < \frac{r+|x|}{2}}}{r - \varepsilon} < |y|$



Damit: Lemma 12.29 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist abs. konv.

ⓑ $|x| > r = \sup(A) \implies |x| \notin A \underset{\text{Def. } A}{\implies} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ divergent ∎

Satz von Cauchy-Hadamard 12.34

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$.

ⓐ Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ als eigentlicher oder uneigentlicher GW existiert, dann ist $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

ⓑ Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ als eigentlicher oder uneigentlicher GW existiert, dann ist $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ der Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

Beweis:

ⓐ Sei $r := \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| < 1$$

$\underset{\text{PQK}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist abs. konvergent.

Analog: $|x| > r \underset{\text{PQK}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ divergent

Also: r = Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

ⓑ Analog mit PWK ∎

Bsp. 12.35:

ⓐ Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$ ist $1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}}$

und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ ist divergent $\forall\ |x| = 1$, d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$ ist in jedem Randpunkt des Konvergenzbereiches divergent

ⓑ Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ ist $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$,

aber $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ ist im Randpunkt -1 des KBs konvergent!

G) Exponentialfunktion, Sinus & Cosinus als Potenzreihe

Satz 12.35:

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞.

Die dadurch definierte Abbildung

$$\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

nennen wir die Exponentialfunktion.

Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis:

· Cauchy-Hadamard $\Rightarrow$

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right|} = \frac{1}{0} = \infty$$

ist der KR von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, wobei $a_n = \frac{1}{n!}$

· Seien $x, y \in \mathbb{K}$.

$$\Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \overset{\text{Cauchy-Produkt}}{\underset{11.27}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}_{=\binom{n}{k}} x^k \cdot y^{n-k}}_{\overset{7.15}{=} (x+y)^n} \underset{7.15}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \exp(x+y)$$

$\boxed{q}$

Bem. 12.37: Definiere: $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ = Eulersche Zahl e

Sei $n \geq 2$ $\Rightarrow$ · $\exp(n) = \underbrace{\exp(1) \cdot \exp(1) \cdots \exp(1)}_{} = e^n$

· $e = \exp(1) = \exp(\underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}}^{n\text{-mal}}}_{n\text{-mal}}) = \left(\exp\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n \Rightarrow \exp\left(\tfrac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{e}$

$e^{\frac{1}{n}}$
$\|$

Definition für $x \in \mathbb{K}$: $e^x := \exp(x)$, damit: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

Satz 12.38

ⓐ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ hat KR ∞ und $\cos : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ heißt Cosinus.

ⓑ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ hat KR ∞ und $\sin : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ heißt Sinus.

ⓒ sin ist eine ungerade Fkt., d.h. $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}$
cos " " gerade Fkt., d.h. $\cos(-x) = \cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}$

ⓓ $\forall x \in \mathbb{K}$: $e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

ⓔ $\forall x \in \mathbb{K}$: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

ⓕ $\forall x \in \mathbb{K}$: $\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix})$ $\wedge$ $\sin(x) = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot (e^{ix} - e^{-ix})$

ⓖ $\forall x,y \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \\ \sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y) \end{array}\right\}$ Additionstheoreme

ⓗ $\forall x \in \mathbb{R}$: $|e^{ix}| = 1$

Beweis:

ⓐ Sei $x \in \mathbb{K}$. Setze: $a_n := \begin{cases} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} & \text{, falls } n = 2m \text{ gerade} \\ 0 & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent,

weil sie die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \exp(x)$ hat,

denn: $|a_n| = \left\{\begin{array}{ll} \frac{|x^{2m}|}{(2m)!} & \text{, falls } n = 2m \\ 0 & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{array}\right\} \leq \frac{|x^n|}{n!}$

Also: KR von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ist ∞.

ⓑ analog

ⓒ $$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\overset{=\,-1}{\boxed{(-1)^{2n+1}}} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= -\sin(x)$$

Analog: $\cos(-x) = \cos(x)$

ⓓ Beachte: $(i)^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$, $(i)^{2n+1} = i \cdot (i)^{2n} = i \cdot (-1)^n$,

$$\Rightarrow \cos(x) + i \cdot \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{=\, i^{2n}} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \boxed{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{=\, i^{2n}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \overset{!}{\underset{\substack{12.18 \\ 12.4}}{=}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i \cdot x)^m}{m!} = \exp(i \cdot x)$$

ⓔ Sei $x \in \mathbb{K}$.

$$\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = (\cos(x) + i\cdot\sin(x))\cdot(\cos(x) - i\cdot\sin(x))$$

$$\underset{\textcircled{c}}{=} (\cos(x) + i\cdot\sin(x))\cdot(\cos(-x) + i\cdot\sin(-x))$$

$$\underset{\textcircled{d}}{=} \exp(i\cdot x)\cdot\exp(-i\cdot x) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1$$

ⓕ
$$e^{ix} + e^{-ix} \underset{\textcircled{d}}{=} (\cos(x) + i\cdot\sin(x)) + (\cos(-x) + i\cdot\sin(-x))$$

$$\underset{\textcircled{c}}{=} \cos(x) + i\cdot\cancel{\sin(x)} + \cos(x) - i\cdot\cancel{\sin(x)} = 2\cdot\cos(x)$$

Analog: $\sin(x) = \frac{1}{2i}\cdot(e^{ix} - e^{-ix})$

ⓖ Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \overbrace{\cos(x+y)}^{\in\mathbb{R}} + i\cdot\overbrace{\sin(x+y)}^{\mathbb{R}} \underset{\textcircled{d}}{=} \exp(i\cdot(x+y))$$

$$= \exp(ix)\cdot\exp(iy) \underset{\textcircled{d}}{=} (\cos(x) + i\cdot\sin(x))\cdot(\cos(y) + i\cdot\sin(y))$$

$$= \underbrace{(\cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y))}_{\in\mathbb{R}} + i\cdot(\underbrace{\cos(x)\cdot\sin(y) + \sin(x)\cdot\cos(y)}_{\in\mathbb{R}})$$

Vergleiche Real- und Imaginärteil $\Rightarrow$ Beh.

ⓗ Sei $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $e^{ix} \underset{\textcircled{d}}{=} \underbrace{\cos(x)}_{\in\mathbb{R}} + i\cdot\underbrace{\sin(x)}_{\in\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \underset{\textcircled{e}}{=} \sqrt{1} = 1$$

$\Box$

Bem. 12.41:

Sei $a \in \mathbb{K}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(t-a)^n$ eine PR mit Entwicklungspkt. a.

Dann:
- $r = \sup\{|y| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ konvergent}\}$ = Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(t-a)^n$
- $\forall x : |x-a| < r \Rightarrow \sum a_n\cdot(x-a)^n$ abs. konvergent
- $\forall x : |x-a| > r \Rightarrow$ - - - - - - divergent
- Formeln von Cauchy-Hadamard funktionieren zur Berechnung des KR

$\Box$

§ 13 Grenzwerte von Funktionen

A) Häufungspunkte von Teilmengen von $\mathbb{R}$

Def. 13.1

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a heißt Häufungspunkt von $\mathcal{U}$

$$:\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \mathcal{U} \setminus \{a\} \; : \; 0 < |x-a| < \varepsilon$$

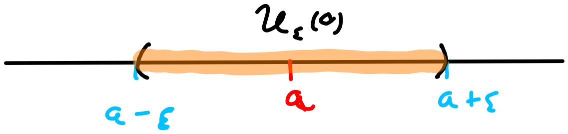
Achtung: a muss kein Element von $\mathcal{U}$ sein.

Bem. 13.2:

Sei $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $\mathcal{U}_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in R \mid |x-a| < \varepsilon\}$

die ε-Umgebung von a:



Damit: a ist HP von $\mathcal{U}$ $\iff$ jede ε-Umgebung von a enthält ein x aus $\mathcal{U}$ mit $x \neq a$.

Bsp. 13.3:

Jede reelle Zahl ist HP von $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$.

Denn:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$

$\underset{9.6}{\Longrightarrow} \exists \, x \in \mathbb{Q} \cap (a, a+\varepsilon) \implies x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ mit $|x-a| < \varepsilon$

$\implies a$ ist HP von $\mathbb{Q}$. $\square$

Prop. 13.4 (Folgenkriterium für HP)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Dann: a ist HP von $\mathcal{U}$

$\iff \exists \, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei a HP von $\mathcal{U}$. Sei $n \in \mathbb{N}$

Setze: $\varepsilon := \frac{1}{n+1} > 0$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathcal{U} \setminus \{a\} : |x - a| < \varepsilon = \frac{1}{n+1}$

Setze: $a_n := x$. $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$

Zudem:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, "n\to\infty"'] & < & {|a_n - a|} \arrow[dd, "n\to\infty"] & < & \frac{1}{n+1} \arrow[d, "n\to\infty"] \\ 0 \arrow[dr, Rightarrow] & & & & 0 \arrow[dll, Rightarrow] \\ & & 0 & & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

"$\Leftarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}}$ und $\boxed{a_n \to a}$.

Sei $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow \exists\, n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \boxed{|a_n - a| < \varepsilon}$

Setze: $x := a_{n_\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ und $|x - a| < \varepsilon$

Also: a ist HP von $\mathcal{U}$. $\square$

Bsp. 13.5:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Dann: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist HP von } (a,b)\} = [a,b]$

Beweis:

"$\subseteq$" Sei c HP von (a,b) $\quad \overset{[a,b]}{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}$

$\underset{13.4}{\Rightarrow} \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in (a,b)$ und $a_n \neq c$

und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \underbrace{\in}_{\boxed{11.28}} [a,b]$

"$\supseteq$" Sei $c \in [a,b]$

1. Fall: $c < b$

Sei $n \geq 1$. Setze: $a_n := \underbrace{\overbrace{c + \frac{b-c}{2\cdot n}}^{\overset{(a,b)}{\cup}}}_{\downarrow n\to\infty \atop c} \neq c$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in (a,b)$ und $a_n \neq c$ und $\overset{\overset{c}{\|}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

$\underset{13.4}{\Rightarrow}$ c ist HP von (a,b)

2. Fall: $c = b$, analog. $a_n := \underset{\overset{\nparallel}{c}}{\overbrace{c - \frac{c-a}{2n}}^{\overset{(a,b)}{\cup}}} \longrightarrow c$

$\square$

B) Grenzwerte von Funktionen

Def. 13.6:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ HP von U.

$y \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f in a

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U$ mit $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

Schreibe dann: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$ oder $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} y$

Sage: $f(x)$ konvergiert gegen y für x gegen a.

Prop. 13.7: (Folgenkriterium für GWe von Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \to \mathbb{R}$ und a ein HP von U.

Dann sind Ö:

ⓐ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$

ⓑ $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in U\setminus\{a\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = y$

Beweis:

ⓐ ⇒ ⓑ: Sei $\lim_{x\to a} f(x) = y$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}\setminus\{a\} \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = a$

Zeige: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |f(a_n) - y| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$.

- $\lim_{x\to a} f(x) = y \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}$ mit $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \exists n_{\delta_\varepsilon} : \forall n \geq n_{\delta_\varepsilon} : |a_n - a| < \delta_\varepsilon$
- Setze: $n_\varepsilon := n_{\delta_\varepsilon}$. Sei $n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(a_n) - y| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$

ⓑ ⇒ ⓐ: Sei y nicht GW von f in a

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta_\varepsilon > 0 \quad \exists x_{\delta_\varepsilon} \in \mathcal{U}\setminus\{a\} : 0 < |x_{\delta_\varepsilon} - a| < \delta_\varepsilon$, aber $|f(x_{\delta_\varepsilon}) - y| \geq \varepsilon$

Sei $n \geq 1$. Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{1}{n}$ und $a_n := x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{U}\setminus\{a\}$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 0 & < & |a_n - a| & < & \frac{1}{n} \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ 0 & \searrow & 0 & \swarrow & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Aber: $|f(a_n) - y| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \quad f(a_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} y$

$\square$

Bsp. 13.8:

ⓐ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto x^2$, $a = 3$ ist HP von $\mathbb{R}$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ und $a_n \longrightarrow 3$

$$\underset{11.15}{\Rightarrow} \quad f(a_n) = a_n^2 = \underset{\underset{3}{\downarrow}}{a_n} \cdot \underset{\underset{3}{\downarrow}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 3\cdot 3 = 9$$

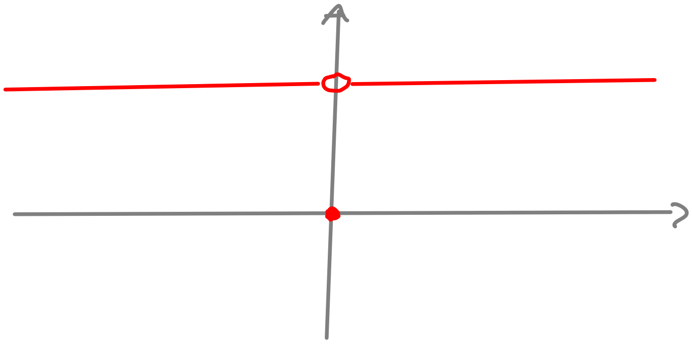
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^3 = 9 = f(3)$$

ⓑ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $a = 0$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$a_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $a_n \to 0$

$$\Rightarrow \quad f(a_n) \underset{a_n \neq 0}{=} 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$



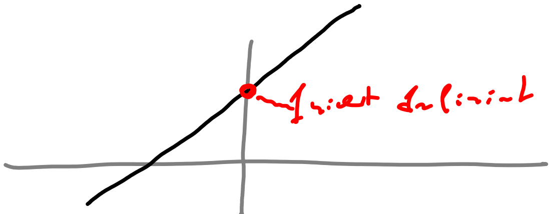
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

ⓒ $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $a = 0$ ist HP von $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ und $a_n \to 0$.

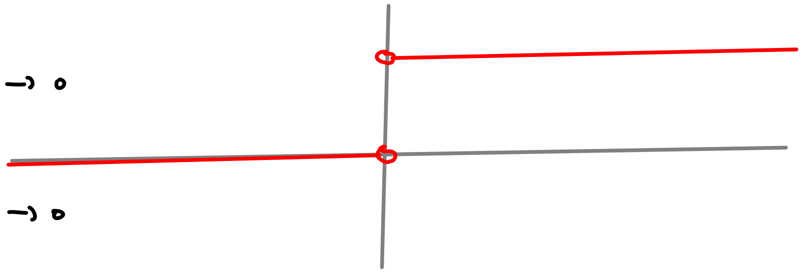
$$\Rightarrow \quad f(a_n) = \frac{a_n^2 - 1}{a_n - 1} = \frac{(a_n+1)\cdot\cancel{(a_n-1)}}{\cancel{a_n-1}} = a_n + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0+1 = 1$$

$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, obwohl $a = 0$ nicht im Def.bereich von f liegt!



ⓓ $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$, $a=0$ ist HP von $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Betrachte die Folgen:



- $a_n = -\frac{1}{n} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $a_n \to 0$
- $b_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $b_n \to 0$

Aber:
$$\left.\begin{aligned} f(a_n) &= 0 \longrightarrow 0 \\ f(b_n) &= 1 \longrightarrow 1 \end{aligned}\right\} \neq \quad \Longrightarrow \quad \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

C) Die Grenzwertsätze für Funktionen

Def. 13.9:

Seien $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und $g: V \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, $c \in \mathbb{R}$.

Definiere:

- $c\cdot f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c\cdot f(x)$
- $f+g : \mathcal{U}\cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)+g(x)$
- $f-g : \mathcal{U}\cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)-g(x)$
- $f\cdot g : \mathcal{U}\cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)\cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : \{x\in \mathcal{U}\cap V \mid g(x)\neq 0\} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

Prop. 13.10 (Grenzwertsätze für Funktionen)

Seien $f: \mathcal{U}\to\mathbb{R}$ und $g: \mathcal{U}\to\mathbb{R}$ Funktionen, a HP von $\mathcal{U}$, $c\in\mathbb{R}$.

ⓐ $\lim_{x\to a} f(x) = y \wedge \lim_{x\to a} f(x) = z \Longrightarrow y = z$

ⓑ Wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren, dann gelten

① $\lim_{x\to a} (c\cdot f)(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$ ② $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

③ $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ ④ $\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

ⓒ $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0 \Longrightarrow a$ HP von $\{x\in\mathcal{U} \mid f(x)\neq 0\}$ und $\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$.

Beweis:

ⓐ a ist HP von $\mathcal{U}$ $\overset{13.4}{\Longrightarrow}$ $\exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}\setminus\{a\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\overset{13.7}{\Longrightarrow}$ $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = z$ $\underset{11.28}{\Longrightarrow}$ $y = z$

ⓑ analog mit 11.15.

ⓒ 13.4 $\Longrightarrow$ $\exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}\setminus\{a\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\underset{13.7}{\Longrightarrow}$ $\underset{\neq 0}{y} := \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$

$\underset{11.25}{\Longrightarrow}$ $\exists\ n_0 : \forall n \geq n_0 : f(a_n) \neq 0$

$\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\geq n_0}$ ist Folge in $\{x\in\mathcal{U} \mid f(x)\neq 0\}\setminus\{a\}$

und $a_n \to a$

$\underset{13.4}{\Longrightarrow}$ a ist HP von $\{x\in\mathcal{U} \mid f(x)\neq 0\}$

Rest analog mit 11.15. $\square$

Def. 13.11:

① Sei t eine Veränderliche und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot t + a_0$$

ein Polynom in der Veränderlichen t mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ in $\mathbb{R}$.

Wenn $a_n \neq 0$, heißt $n =: \deg\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k\right)$ der Grad des Polynoms $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$.

Setze: $\deg(0) := -\infty$

② Setze: $\mathbb{R}[t] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$

= Menge aller Polynome in der Variablen t
mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \deg : \mathbb{R}[t] \arrow[r] & \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \\ f \arrow[r, mapsto] & \deg(f) \end{tikzcd}$$

③ Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom.

Dann: • $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

• $\mathbb{R} \xrightarrow[f]{} \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$

Funktionen dieser Form heißen Polynomfunktionen!

Zudem: Seien $f, g \in \mathbb{R}[t]$ mit $g \neq 0$
dann heißt eine Funktion der Form

$$\frac{f}{g} : \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

eine rationale Funktion.

④ $f : U \to \mathbb{R}$ und $x \in U$ mit $f(x) = 0$, dann heißt x eine Nullstelle von f.

Bem. 13.12:

$0 \neq g \in \mathbb{R}[t] \longrightarrow \left| \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \right| \leq \deg(g) < \infty$

Bsp. 13.13:

ⓐ $f = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ und $a \in \mathbb{R}$ $\overset{13.10}{\Longrightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \Big(\overbrace{\lim_{x \to a} x}^{\overset{a}{\shortparallel}}\Big)^k = f(a)$

ⓑ $\left. \begin{array}{l} f, g_{x_0} \in \mathbb{R}[t],\ a \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \\ HP \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \end{array} \right\} \overset{13.10}{\Longrightarrow} \lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f(a)}{g(a)}$

D) Uneigentliche Grenzwerte

Def. 13.14

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

ⓐ $\mathcal{U}$ heißt nach oben unbeschränkt $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{U} \cap [0, \infty)$ ist nicht beschränkt
$\mathcal{U}$ " nach unten unbeschränkt $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{U} \cap (-\infty, 0]$ " "

ⓑ Sei $\mathcal{U}$ nach oben unbeschränkt. y heißt der Grenzwert von f in ∞

$:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists s_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}$ mit $x > s_\varepsilon$: $|f(x) - y| < \varepsilon$

Schreibe: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y$

ⓒ Sei $\mathcal{U}$ nach unten unbeschränkt. y heißt der Grenzwert von f in $-\infty$

$:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists s_\varepsilon < 0 : \forall x \in \mathcal{U}$ mit $x < s_\varepsilon$: $|f(x) - y| < \varepsilon$

Schreibe: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y$

Bem. 13.15 (Grenzwertsätze & Folgenkrit. für GWe in $\pm\infty$)

Folgenkriterium 13.10 und GW-Sätze 13.15 verallgemeinern sich:

z.B. · $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}$ und $a_n \to \infty$: $f(a_n) \to y$

· $\lim\limits_{x \to \infty} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) + \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$.

Def. 13.16 :

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und a HP von $\mathcal{U}$.

ⓐ ∞ heißt uneigentlicher GW von f in a

$:\Leftrightarrow$ $\forall s > 0 \ \exists \delta_s > 0 : \forall x \in \mathcal{U}$ mit $0 < |x - a| < \delta_s$ gilt: $f(x) > s$

Schreibe: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

ⓑ $-\infty$ heißt uneigentlicher GW von f in a

$:\Leftrightarrow$ $\forall s < 0 \ \exists \delta_s > 0 : \forall x \in \mathcal{U}$ mit $0 < |x - a| < \delta_s$ gilt: $f(x) < s$

Schreibe: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

ⓒ ∞ heißt uneigentlicher GW von f in ∞

$:\Longleftrightarrow \forall\, s>0\ \exists t>0 : \forall x \in U$ mit $x>t$ gilt: $f(x)>s$

Schreibe: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

ⓓ $-\infty$ heißt uneigentlicher GW von f in ∞

$:\Longleftrightarrow \forall\, s<0\ \exists t>0 : \forall x \in U$ mit $x>t$ gilt: $f(x)<s$

Schreibe: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

ⓔ ∞ heißt uneigentlicher GW von f in $-\infty$

$:\Longleftrightarrow \forall\, s>0\ \exists t<0 : \forall x \in U$ mit $x<t$ gilt: $f(x)>s$

Schreibe: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

ⓕ $-\infty$ heißt uneigentlicher GW von f in $-\infty$

$:\Longleftrightarrow \forall\, s<0\ \exists t<0 : \forall x \in U$ mit $x<t$ gilt: $f(x)<s$

Schreibe: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Bem. 13.17:

Die GW-Sätze 13.10 und der Folgenkrit. verallgemeinern sich auf uneigentliche GWe wie in 13.16, wenn wir die Rechenregeln aus 11.35 beachten:

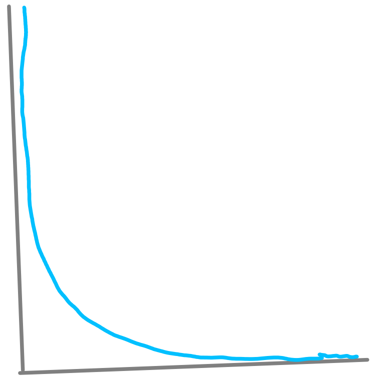
z.B.: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in U$ und $a_n \to \infty$ gilt: $f(a_n) \to -\infty$

Bsp. 13.18:

$f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$



Dann:

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in (0, \infty)$ mit $a_n \longrightarrow 0$

  Z.z.: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$

  d.h. $\forall s > 0 \ \exists n_s : \forall n \geq n_s : f(a_n) > s$

  Sei $s > 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{s} > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \underset{\overset{\shortparallel}{a_n}}{|a_n - 0|} < \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{s}}}{\varepsilon}$

  $\Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\frac{1}{s}} = s \quad \forall n \geq n_\varepsilon =: n_s$

  Folgenkrit. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in (0, \infty)$ und $a_n \longrightarrow \infty$.

  Z.z.: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$

  d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \underset{\overset{\shortparallel}{f(a_n)}}{|f(a_n) - 0|} < \varepsilon$

  Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow s := \frac{1}{\varepsilon} > 0$

  $\Rightarrow \exists n_s : \forall n \geq n_s : a_n > s$

  $\Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_s =: n_\varepsilon$

  Folgenkrit. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

□

Bsp. 13.19:

Sei $f = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit $n = \deg(f) \geq 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } (a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade}) \text{ oder} \\ & (a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade}) \\ -\infty, & \text{falls } (a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade}) \text{ oder} \\ & (a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade}) \end{cases}$$

Beweis für $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und $a_n > 0$:

$$f(x) = \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \underbrace{\left(\frac{a_n \cdot x^n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \right)}_{\substack{\geq 0 \ ⊛ \\ \text{für } x \text{ groß}}} \geq \frac{\overset{\geq 0}{a_n} \cdot \overset{\geq 0}{x^n}}{2} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$$

Zu ⊛:

$$x \geq \max\left\{ 1, \frac{-2 \cdot n \cdot a_0}{a_n}, \frac{-2 \cdot n \cdot a_1}{a_n}, \ldots, \frac{-2 \cdot n \cdot a_{n-1}}{a_n} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_n \cdot x^n}{2 \cdot n} \geq \underbrace{- a_k \cdot x^k} \qquad \forall k = 0, \ldots, n-1$$

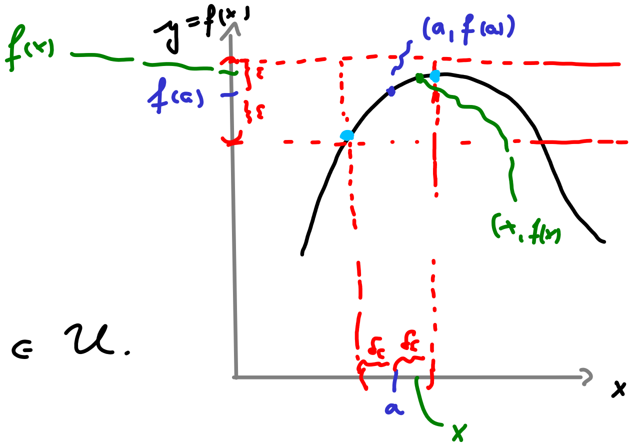
$$\Rightarrow \quad \frac{a_n \cdot x^n}{2} = n \cdot \frac{a_n \cdot x^n}{\underbrace{2 \cdot n}} \geq \sum_{k=0}^{n-1} - a_k \cdot x^k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \geq 0$$

$\square$

§ 14 Stetigkeit

A) Stetige Funktionen



Def. 14.1

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{U}$.

f heißt stetig in a

$:\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}$ mit $|x-a| < \delta_\varepsilon$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

f heißt stetig (auf $\mathcal{U}$), wenn f stetig in jedem Punkt von $\mathcal{U}$ ist.

Notation: $\mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) := \{ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } \mathcal{U} \}$

Bem. 14.2

Für die Stetigkeit von f in a ist nur das Verhalten von f in einer kleinen Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a maßgeblich. Wir nennen die Stetigkeit deshalb eine lokale Eigenschaft.

Lemma 14.3

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und a HP von $\mathcal{U}$.

Dann: f ist stetig in a $\iff$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Beweis: Def. 13.6 + Def. 14.1.

Bsp. 14.4:

ⓐ Jede Polynomfkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Denn: $a \in \mathbb{R} \underset{13.13}{\Longrightarrow} a$ HP von $\mathbb{R}$ & $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ⓑ Jede rationale Fkt. $\frac{f}{g}: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\}} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

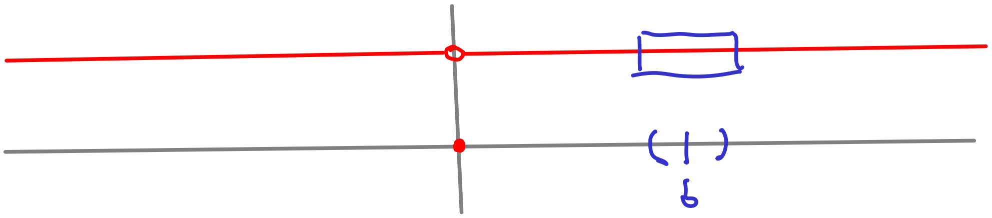
Denn: $a \in \mathbb{R}$ mit $g(a) \neq 0 \underset{13.13.}{\Longrightarrow} a$ HP von & $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f}{g}(a)$

ⓒ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ist nicht stetig in $a = 0$

Denn: a ist HP von $\mathbb{R}$ & $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$

Beachte: f stetig in b $\forall\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



ⓓ $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig & $V \subseteq \mathcal{U}$ $\Longrightarrow$ $f_{|V} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig

ⓔ Sei $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, dann ist f stetig!

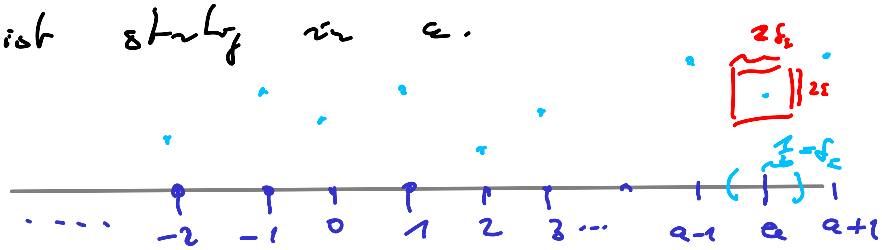
! d.h. Stetigkeit ist für Fkt. von $\mathbb{Z}$ kein gutes Konzept!

Denn: Sei $a \in \mathbb{Z}$ und sei $\varepsilon > 0$.

Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $|x - a| < \delta_\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ $x = a$ $\Longrightarrow$ $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

Also, f ist stetig in a. $\square$



Satz 14.5 (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{U}$.

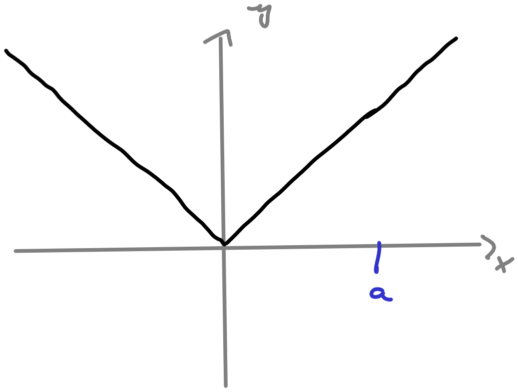
Dann: f ist stetig in a

$\Longleftrightarrow$ $\forall\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$

Beweis: wörtlich 13.7. $\square$

Bsp. 14.6:

Beh: Die Betragsfunktion $\overset{f}{\overset{\shortparallel}{|\cdot|}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ ist stetig.



Bew:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow a$.

$\underset{11.15}{\Rightarrow} \quad f(a_n) = |a_n| \longrightarrow |a| = f(a)$ $\square$

B) Rechnen mit stetigen Funktionen

Proposition 14.7

Seien $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in \mathcal{U}$ und sei $c \in \mathbb{R}$.

ⓐ $c \cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sind stetig in a.

ⓑ Falls $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g} : \mathcal{U} \setminus \{x \in \mathcal{U} \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Beweis:

Folgenkriterium 14.5 + GW-Sätze für Folgen

z.B.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\underset{14.5}{\Rightarrow} \quad f(a_n) \to f(a) \quad + \quad g(a_n) \longrightarrow g(a)$

$\underset{11.15}{\Rightarrow} \quad (f+g)(a_n) = f(a_n) + g(a_n) \longrightarrow f(a) + g(a) = (f+g)(a)$

$\underset{14.5}{\Rightarrow} \quad f+g$ stetig in a. $\square$

Prop. 14.8

Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Im}(f) \subseteq V$ und $a \in \mathcal{U}$.

Wenn f stetig in a und g stetig in $f(a)$, dann: $g \circ f$ stetig in a

Beweis:

$$\begin{tikzcd} a \in \mathcal{U} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "g\circ f"'] & V \subseteq \mathbb{R} \ni f(a) \arrow[d, bend left, "g"] \\ & \mathbb{R} \ni (g\circ f)(a) \end{tikzcd}$$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

z.z.: $(g\circ f)(a_n) \longrightarrow (g\circ f)(a)$

· $a_n \to a \underset{\substack{f \text{ stetig} \\ \text{in } a}}{\overset{14.5}{\Longrightarrow}} \underset{\substack{\in \\ V}}{f(a_n)} \longrightarrow \underset{\substack{\in \\ V}}{f(a)}$

$$14.5 \Big\Downarrow g \text{ stetig in } f(a)$$

$$(g\circ f)(a_n) = g(f(a_n)) \longrightarrow g(f(a)) = (g\circ f)(a)$$

Also: $g\circ f$ stetig in a wegen 14.5. ∎

Def. 14.10:

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$ ein HP von $\mathcal{U}$.

Dann: f heißt stetig fortsetzbar in a $:\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert

Zudem: $g: \mathcal{U}\cup\{a\} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{U} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & x = a \end{cases}$

heißt die stetige Fortsetzung von f in a

Beachte: g ist stetig (auch in a), wegen 14.3

Bsp. 14.11:

ⓐ $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ist stetig als rat. Fkt.

und 1 ist HP von $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ und $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \underset{13.8ⓐ}{=} 2$

Also: f ist stetig fortsetzbar in 1

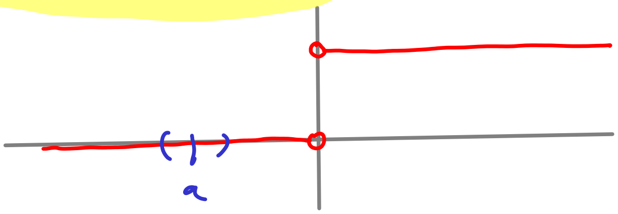
durch: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Damit: $g(x) = x + 1$

ⓑ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ist stetig!

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\Rightarrow$ f nicht stetig fortsetzbar in 0



ⓒ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ist stetig in a $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Trotzdem ist f in 0 nicht stetig fortsetzbar, weil f in 0 schon definiert ist!

C) Der Zwischenwertsatz

Satz 14.12 (Zwischenwertsatz)

Eine stetige Fkt. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis:

O.E.: $f(a) \leq f(b)$. Sei $c \in [f(a), f(b)]$.

Def.: $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) - c \overset{}{\underset{14.7}{\Longrightarrow}}$ g ist stetig

Z.z.: $\exists\, x \in [a,b] : g(x) = 0$ (d.h. $f(x) = c$)

Idee: Konstruieren x mittels Intervallhalbierung

Setze: $[a_0, b_0] := [a,b]$ und $x_0 := \frac{b_0 + a_0}{2} \in [a,b]$

1. Fall: $g(x_0) = 0 \longrightarrow x := x_0$ tut's

2. Fall: $g(x_0) > 0 \Rightarrow g(a_0) < g(x_0)$. Setze: $[a_1, b_1] := [a_0, x_0]$

3. Fall: $g(x_0) < 0 \Rightarrow g(x_0) < g(b_0)$. Setze: $[a_1, b_1] := (x_0, b_0]$

Fahre mit $[a_1, b_1]$ fort wie mit $[a_0, b_0]$, usw.

Dann folgende Fälle auftreten:

Fall a): wir finden nach endl. vielen Schritten ein $x_n \in [a,b]$ mit $g(x_n) = 0$ $\longrightarrow$ $x := x_n$ tut's

Fall b): das Verfahren bricht nicht ab!

$\Longrightarrow$ wir finden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt,

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ---- fallend ------

$$\underset{\text{Monotonie-Kriterium}}{\Longrightarrow} \quad \exists \lim_{n\to\infty} a_n = x \quad , \exists \lim_{n\to\infty} b_n = y$$

Zudem:

$$\begin{array}{ccccc} b_n & - & a_n & = \frac{b-a}{2^n} & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ y & - & x & & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad x = y = \lim_{n\to\infty} \overbrace{b_n}^{[a,b]} \underset{11.28}{\in} [a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad g(x) \longleftarrow g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n) \longrightarrow g(x)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ g(x) \leq 0 & & 0 \leq g(x) \end{array}}_{\Downarrow \; g(x) = 0}$$

☺

Bsp. 14.13

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktion ungeraden Grades, dann hat f eine Nullstelle.

Denn:

Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$, $a_n \neq 0$, n ungerade.

Dann hat f dieselben Nullstellen wie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{a_n} \cdot f(x)$

$$x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot x^k$$

$$\underset{13.19}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \exists a < b : \quad g(a) < 0 < g(b) \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists x \in [a,b] : g(x) = 0$$

□

D) Beschränktheit stetiger Funktionen

Def. 14.14:

Eine Funktion $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn $\operatorname{Im}(f)$ beschränkt ist.

Proposition 14.15

Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt.

Beweis:

Ang.: f ist nicht beschränkt

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists a_n \in [a,b] : f(a_n) > n$ $\circledast$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge im Intervall $[a,b]$, d.h. beschränkt

$\underset{BW}{\overset{11.26}{\Longrightarrow}} \exists$ TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\exists \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c \underset{\underset{11.28}{\uparrow}}{\in} [a,b]$

Vor. $\Rightarrow f$ stetig $\Rightarrow |f|$ stetig

$\Rightarrow \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{|f(c)|} \xleftarrow[k\to\infty]{} |f(a_{n_k})| \underset{\underset{\circledast}{\uparrow}}{>} n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$\lightning$

$\square$

Satz 14.16:

Eine stetige Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum & Minimum an,

d.h. $\exists c,d \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : f(c) \le f(x) \le f(d)$

Beweis:

14.15 $\Rightarrow \operatorname{Im}(f)$ beschränkt $\Rightarrow \exists y := \sup(\operatorname{Im}(f)) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall n \ge 1 : \exists a_n \in [a,b] : y - \frac{1}{n} < f(a_n) \le y$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $[a,b]$, damit beschränkt

$\underset{BW}{\overset{11.26}{\Longrightarrow}} \exists$ TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\exists \lim_{k\to\infty} a_{n_k} =: d \underset{11.28}{\in} [a,b]$

$\Rightarrow y \xleftarrow[k\to\infty]{} y - \frac{1}{n_k} < f(a_{n_k}) \le y \xrightarrow[k\to\infty]{} y$

$\overset{11.17}{\Longrightarrow} y = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) \underset{f \text{ stetig}}{=} f(d)$

Analog: $\exists c \in [a,b] : \inf(\operatorname{Im}(f)) = f(c)$. $\square$

Bsp. 14.17:

ⓐ $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist stetig

$\Rightarrow$ $\max(\mathrm{Im}(f)) = 1 = f(1) = f(-1)$

$\min(\mathrm{Im}(f)) = 0 = f(0)$

ⓑ $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = (0, \infty)$ ist nicht nach oben beschränkt und f nimmt weder sein Maximum noch sein Minimum an.

E) Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen

Def. 14.18:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $U \subseteq \mathbb{R}$.

ⓐ f heißt monoton wachsend $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$

ⓑ f heißt streng monoton wachsend $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) < f(y)$

ⓒ f heißt monoton fallend $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \geq f(y)$

ⓓ f heißt streng monoton fallend $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) > f(y)$

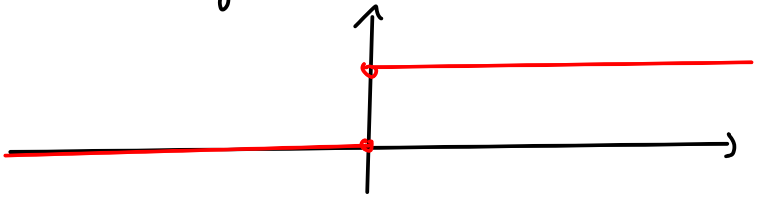
Bsp. 14.19:

ⓐ $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n$ (für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$)

ist streng monoton wachsend,

denn: 8.17 $\Rightarrow$ $(0 \leq x < y \Rightarrow f(x) = x^n < y^n = f(y))$

ⓑ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton !



Bem. 14.20:

$f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend / fallend $\Rightarrow$ f ist injektiv

Denn: o.E.: f streng monoton wachsend.

Sei $x, y \in \mathcal{U}$ mit $x \neq y$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{lll} \text{1. Fall: } x < y & \Rightarrow & f(x) < f(y) \\ \text{2. Fall: } x > y & \Rightarrow & f(x) > f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{f \text{ injektiv}}{\overset{}{f(x) \neq f(y)}}$$

$\Updownarrow$

f injektiv

$\square$

Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen 14.21

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $c := \inf(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $d := \sup(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

ⓐ Wenn f streng monoton wachsend und stetig ist, dann:

① $f: (a,b) \longrightarrow (c,d)$ ist bijektiv

② $f^{-1}: (c,d) \longrightarrow (a,b)$ ist streng monoton wachsend und stetig.

ⓑ Wenn f streng monoton fallend und stetig ist, dann:

① $f: (a,b) \longrightarrow (c,d)$ ist bijektiv

② $f^{-1}: (c,d) \longrightarrow (a,b)$ ist streng monoton fallend und stetig.

Beweis:

ⓐ Zeige: $c, d \notin \mathrm{Im}(f)$

Ang.: $d \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists\, x \in (a,b): f(x) = d$

$$\Rightarrow \exists\, x' \in (a,b): x < x' < b \Rightarrow \underset{\sup(\mathrm{Im}(f))}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{d}}} = f(x) < \underset{\mathrm{Im}(f)}{\underset{\cap}{f(x')}} \quad \lightning$$

Also: $d \notin \mathrm{Im}(f)$. Analog: $c \notin \mathrm{Im}(f)$

Zeige: $\mathrm{Im}(f) = (c,d)$

"$\subseteq$" $y \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow c = \inf(\mathrm{Im}(f)) \leq y \leq \sup(\mathrm{Im}(f)) = d$

$$\underset{y \neq c,d}{\Rightarrow} \quad y \in (c,d)$$

"$\supseteq$" Sei $y \in (c,d) \Rightarrow \underset{\inf(\mathrm{Im}(f))}{\underset{\shortparallel}{c}} < y < \underset{\sup(\mathrm{Im}(f))}{\underset{\shortparallel}{d}}$

$\Rightarrow$ y ist keine obere / untere Schranke von $\mathrm{Im}(f)$

$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in (a,b) : f(x_1) < y < f(x_2)$

$\underset{\text{f streng monot. wachs.}}{\Rightarrow} \quad x_1 < x_2$

$\Rightarrow \quad f|_{[x_1,x_2]} : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig

$\underset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \quad \exists\, x \in [x_1, x_2] \subseteq (a,b) : f(x) = y$

$\Rightarrow \quad y \in \mathrm{Im}(f)$

Damit: $f : (a,b) \longrightarrow \mathrm{Im}(f) = (c,d)$ stetig und streng monot. wachs.

$\underset{14.20}{\Rightarrow}$ f injektiv + surjektiv, also bijektiv

$\Rightarrow$ ①

Zeige: $f^{-1} : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ streng monoton wachsend

Seien $y_1, y_2 \in \underset{f((a,b))}{\underset{\shortparallel}{(c,d)}}$ mit $y_1 < y_2$

$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in (a,b) : y_1 = f(x_1), \; y_2 = f(x_2)$

$\underset{\text{f streng monot. wachs.}}{\Rightarrow} \quad \underset{f^{-1}(y_1)}{\underset{\shortparallel}{x_1}} < \underset{f^{-1}(y_2)}{\underset{\shortparallel}{x_2}} \quad \Rightarrow f^{-1}$ ist streng monot. wachs.

Zeige: f^{-1} ist stetig

Sei $y_0 \in (c,d)$ und $\varepsilon > 0$.

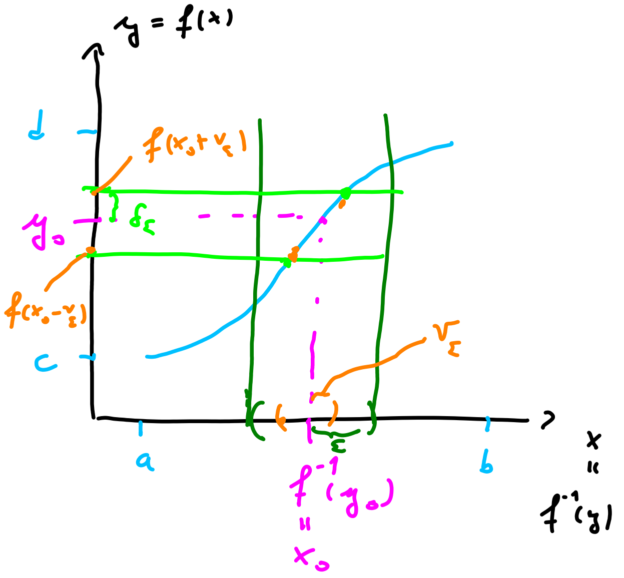
z.z.: $\exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall y \in (c,d)$ mit $|y - y_0| < \delta_\varepsilon : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

Setze $x_0 := f^{-1}(y_0)$ und

$$r_\varepsilon := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-x_0}{2}, \frac{x_0-a}{2}\right\} > 0$$

$$\Rightarrow a < x_0 - r_\varepsilon < x_0 < x_0 + r_\varepsilon < b$$

$$\underset{f \text{ s.m.w.}}{\Rightarrow} f(x_0 - r_\varepsilon) < \underset{\substack{\| \\ y_0}}{f(x_0)} < f(x_0 + r_\varepsilon)$$



Setze: $\delta_\varepsilon := \min\{y_0 - f(x_0 - r_\varepsilon), f(x_0 + r_\varepsilon) - y_0\} > 0$

$$\Rightarrow f(x_0 - r_\varepsilon) \le y_0 - \delta_\varepsilon < y_0 < y_0 + \delta_\varepsilon \le f(x_0 + r_\varepsilon)$$

Sei $y \in (y_0 - \delta_\varepsilon, y_0 + \delta_\varepsilon) \subseteq (c,d)$

$$\underset{f^{-1} \text{ s.m.w.}}{\Rightarrow} \underset{\substack{\| \\ x_0 - r_\varepsilon}}{f^{-1}(f(x_0 - r_\varepsilon))} \le f^{-1}(y_0 - \delta_\varepsilon) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta_\varepsilon) \le \underset{\substack{\| \\ x_0 + r_\varepsilon}}{f^{-1}(f(x_0 + r_\varepsilon))}$$

$$\Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < r_\varepsilon \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Also: f^{-1} ist stetig in y_0, damit auf (c,d)

(b) analog ◻

Bem. 14.22:

Wenn $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig & streng monoton wachsend,

dann: $c := \inf(\operatorname{Im}(f)) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $d := \sup(\operatorname{Im}(f)) = \lim\limits_{x \to b} f(x)$

Wenn $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig & streng monoton fallend,

dann: $c := \inf(\operatorname{Im}(f)) = \lim\limits_{x \to b} f(x)$, $d := \sup(\operatorname{Im}(f)) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Wenn f stetig nach a oder b fortgesetzt werden kann,

dann: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ ist dann in $\mathbb{R}$

und f^{-1} kann in c bzw. d stetig fortgesetzt werden durch den entsprechenden GW. a bzw. b.

D.h. 14.21 gilt auch für halboffene & abgeschlossene Intervalle.

Bsp. 14.23:

Sei $n \geq 2$.

$\Rightarrow$ $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n$ ist streng monoton wachsend & stetig

$\underset{14.21}{\Rightarrow}$ $\underset{\overset{\|}{\sqrt[n]{\cdot}}}{f^{-1}} : \underset{\overset{\|}{(0,\infty)}}{\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)} \longrightarrow (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend & stetig

dabei: $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$

$\underset{14.22}{\Rightarrow}$ $\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist str. mon. wachs. & stetig

weil $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x) = 0.$

Insb.: $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig & str. mon. wachs.

Korollar 14.24:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Beweis:

Setze: $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$, $n \geq 2$.

z.z.: $(a_n)_{n\geq 2}$ ist eine Nullfolge!

Beachte: $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_n > 0 \quad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow \quad n = (a_n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \underbrace{a_n^k \cdot 1^{n-k}}_{>0} \geq 1 + \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot a_n^2}_{>0} > 1$$

$$\Rightarrow \quad n-1 \geq \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot a_n^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ \frac{2}{n} \\ \downarrow n\to\infty \\ 0}}{\frac{n-1}{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}} \geq a_n^2 > \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{0} \qquad \Rightarrow \quad a_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Downarrow \sqrt{\cdot} \text{ stetig}$$

$$a_n = \sqrt{a_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{0} = 0$$

$\square$

F) Gleichmäßige Stetigkeit

Bem. 14.25:

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf U

$\Leftrightarrow \quad \forall a \in U$ gilt f ist stetig in a

$\Leftrightarrow \quad \forall a \in U \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{\varepsilon,a} > 0 : \forall x \in U$ mit $|x-a| < \delta_{\varepsilon,a} : |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

Def. 14.26.

Eine Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf U

$:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x,y \in U$ mit $|x-y| < \delta \ : \ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Bem. 14.27

$f: U \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf $U \quad \Rightarrow \quad f$ stetig auf U

Satz 14.28:

Wenn $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f glm. stetig auf $[a,b]$.

Beweis:

Ang: f ist nicht glm. stetig auf $[a,b]$.

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta_\varepsilon > 0 \; \exists x_{\delta_\varepsilon}, y_{\delta_\varepsilon} \in [a,b]$ mit $|x_{\delta_\varepsilon} - y_{\delta_\varepsilon}| < \delta_\varepsilon$, aber $|f(x_{\delta_\varepsilon}) - f(y_{\delta_\varepsilon})| \geq \varepsilon$

Für $n \geq 1$ und $\delta_\varepsilon := \frac{1}{n}$ wähle die passenden Werte

$x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}}$ und $y_{\delta_\varepsilon} = y_{\frac{1}{n}}$ wie oben und setze:

$a_n := x_{\frac{1}{n}}$ und $b_n := y_{\frac{1}{n}}$.

$\Longrightarrow$ $(a_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge in $[a,b]$, und damit beschränkt

$\overset{11.26}{\underset{BW}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ TF $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} y \underset{11.28}{\in} [a,b]$

$\Longrightarrow$ $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist Folge in $[a,b]$ und damit beschränkt

$\overset{11.26}{\underset{BW}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ TF $(b_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $b_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} z$

$\Longrightarrow$ $a_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} y$

Zudem: $|a_{n_{k_\ell}} - b_{n_{k_\ell}}| = |x_{\frac{1}{n_{k_\ell}}} - y_{\frac{1}{n_{k_\ell}}}| < \frac{1}{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$

$\swarrow \ell \to \infty$

$|y - z| \quad \Longrightarrow \quad y = z \in [a,b]$

$\Longrightarrow 0 = |f(y) - f(y)| \xleftarrow{\ell \to \infty} |f(a_{n_{k_\ell}}) - f(b_{n_{k_\ell}})| \geq \varepsilon > 0$ ↯

Also: f ist glm. stetig auf $[a,b]$ $\boxed{}$

Bsp. 14.29:

ⓐ $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$ ist stetig

$\underset{14.28}{\Longrightarrow}$ f ist glm. stetig auf $[0,1]$.

Prüfe dies mit der Definition nach:

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \underset{\underset{[0,1]}{\wedge}}{x, y} : |x - y| < \delta_\varepsilon : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Seien $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x-y|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{|x+y|}_{\leq 2} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

ⓑ $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0, \infty)$

Zeige: f ist nicht glm. stetig

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta : |x_\delta - y_\delta| < \delta : |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

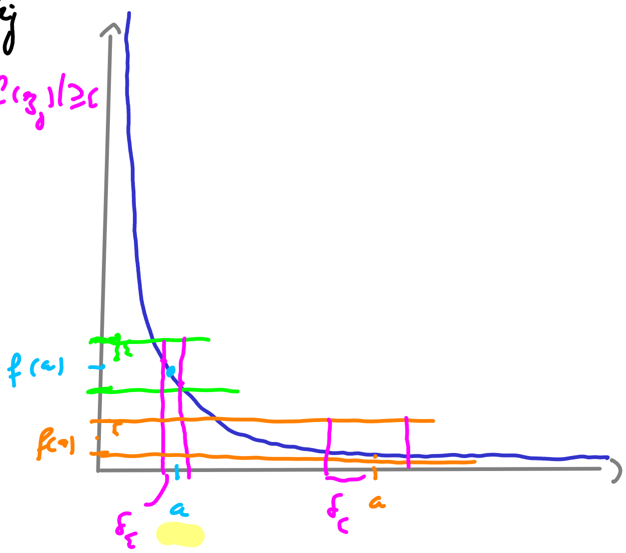
Setze $\varepsilon := 1$. Sei $\delta > 0$ gegeben.

Setze: $x_\delta := \delta$, $y_\delta := \frac{\delta}{1+\delta} \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow |x_\delta - y_\delta| = \delta - \frac{\delta}{1+\delta} < \delta$$

aber: $|f(x_\delta) - f(y_\delta)|$

$$\overset{\shortparallel}{\left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\delta}{\delta}\right|} = \frac{\delta}{\delta} = 1 = \varepsilon \geq \varepsilon$$



Problem: der Graph hat in der Nähe der 0 eine unbeschränkte Steigung!

§ 15 Konvergenz von Funktionenfolgen

A) Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Def. 15.1

ⓐ Sei $f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Folge von Funktionen** auf $\mathcal{U}$.

ⓑ Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf $\mathcal{U}$.

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **punktweise konvergent** $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathcal{U} \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
- Dann heißt $\underset{\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n}{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ **Grenzfunktion** von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert auf $\mathcal{U}$ punktweise gegen f.**

  d.h. $\forall x \in \mathcal{U} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{\varepsilon,x} : \forall n \geq n_{\varepsilon,x} : | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$

ⓒ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert auf $\mathcal{U}$ gleichmäßig gegen f**

$:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \ \& \ \forall x \in \mathcal{U} : | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$

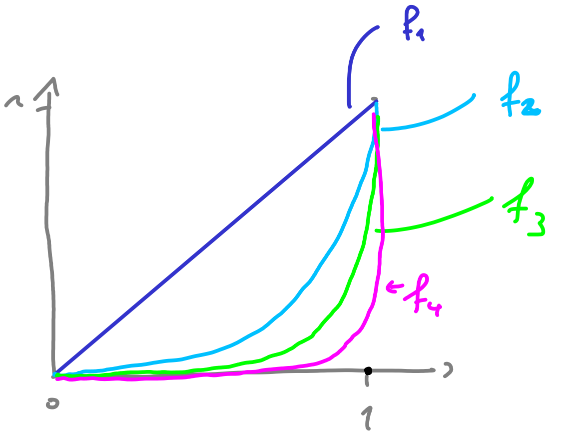
Bem. 15.2

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ glm. auf $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise auf $\mathcal{U}$

Bsp. 15.3:

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n$

$\Rightarrow f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \end{cases}$



$\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

Beachte: f_n stetig $\forall n \in \mathbb{N}$,

aber $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ist nicht stetig!

Bew: $f_n \longrightarrow f$ nicht glm. auf $[0,1]$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_\varepsilon : \exists n \geq n_\varepsilon \ \& \ \exists x \in U : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Denn: Setze $\varepsilon := \frac{1}{4} > 0$. Sei n_ε beliebig.

Setze: $n := \max\{2, n_\varepsilon\} \geq n_\varepsilon$ und $x := \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon$

$\boxed{\varepsilon}$

Satz 15.4

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit KR r.

Für $n \in \mathbb{N}$ setze: $f_n : (-r,r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

Dann: • $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $(-r,r)$ punktweise

gegen $f : (-r,r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$

• $\forall \ 0 \leq R < r$: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $[-R,R]$ glm. gegen f

Bew:

• Def. $\Rightarrow$ $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = f(x) \quad \forall x \in (-r,r)$

d.h. $f = \lim_{n \to \infty} f_n$.

• Zeige: f konv. auf $[-R,R]$ glm. gegen f.

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \ \& \ \forall x \in [-R,R] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Beachte: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot R^k$ ist konvergent

$\Rightarrow$ Folge der Restglieder ist eine Nullfolge!

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot R^k \right| < \varepsilon \quad (*)$

Sei $n \geq n_\varepsilon$ und $x \in [-R, R]$.

$$\Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cdot x^k \right| \underset{11.17}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot R^k \underset{(*)}{<} \varepsilon \qquad \boxed{\varepsilon}$$

Bsp. 15.5

$f_n : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ konvergiert auf $(-1,1)$

punktweise gegen $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Bh: $f_n \longrightarrow f$ nicht glm. auf $(-1, 1)$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_\varepsilon : \exists n \geq n_\varepsilon \ \& \ x \in (-1, 1) : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Setze: $\varepsilon := 1 > 0$. Sei n_ε gegeben.

Betrachte: $g : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^{n_\varepsilon + 1}}{1 - x}$ ist stetig

und $\lim_{x \to 1} g(x) = \infty$

$$\Rightarrow \exists x \in (0, 1) : \underset{\overset{\|}{\varepsilon}}{1} \leq g(x) = \frac{x^{n_\varepsilon+1}}{1-x}$$

$$\Rightarrow \left| f_{n_\varepsilon}(x) - f(x) \right| = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} x^k = x^{n_\varepsilon+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^{n_\varepsilon+1} \cdot \frac{1}{1-x} = \underset{\underset{\varepsilon}{\vee\!/}}{g(x)}$$

$$\boxed{\varepsilon}$$

B) Gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen

Satz 15.6

Sei $f_n : U \to \mathbb{R}$ stetig auf U, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ glm. auf U.

Dann: f ist stetig auf U.

Beweis: Sei $a \in U$.

Zeige: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U$ mit $|x-a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

- $f_n \longrightarrow f$ glm. auf U $\Rightarrow \underbrace{\exists n_{\varepsilon/3} : \forall n \geq n_{\varepsilon/3} \ \& \ \forall x \in U : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}}_{(*)}$
- f_{n_ε} ist stetig in a

  $\Rightarrow \underbrace{\exists \delta > 0 : \forall x \in U \text{ mit } |x-a| < \delta : |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}}_{(**)}$
- Setze: $\delta_\varepsilon := \delta > 0$

  Sei $x \in U$ mit $|x - a| < \delta_\varepsilon$

  $\Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) + f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a) + f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)|$

  $$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|}_{\overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)|}_{\overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)|}_{\overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$\square$

Kor. 15.7

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ eine PR über $\mathbb{R}$ mit KR r.

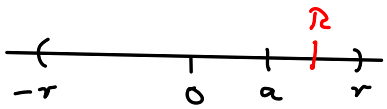
Dann: $f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist stetig auf $(-r, r)$.

Beweis: Sei $a \in (-r, r)$. Setze: $R := \frac{|a| + r}{2} \in [0, r)$

$\underset{15.6}{\Rightarrow}$ $f_n : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

konv. glm. auf $[-R, R]$

gegen $f_{|[-R,R]}$



$\underset{f_n \text{ stetig als PF}}{\Rightarrow}$ $f_{|[-R,R]}$ stetig $\Rightarrow f$ stetig in a. $\square$

Bsp. 15.8:

exp, cos, sin sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$. $\square$

§ 16 Exponentialfunktion, Logarithmus & trigonometrische Funktionen

A) Exponential- und Logarithmusfunktionen

Satz 16.1:

Die Exponentialfunktion $\exp : (-\infty, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Insbesondere gelten:

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty .$$

Beweis:

Sei $z > 0$.

$$\Rightarrow \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{>0} \geq \frac{z^1}{1!} + \frac{z^0}{0!} = z + 1 > 1 \qquad \circledast$$

$$\Rightarrow \quad \exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z + (-z)) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im}(\exp) \subseteq (0, \infty)$$

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

$$\Rightarrow \exp(y) = \exp(y - x + x) = \underbrace{\exp(\underbrace{y - x}_{>0})}_{>1 \; \circledast} \cdot \exp(x) > \underset{\exp(x)}{\underset{\shortparallel}{1 \cdot \exp(x)}}$$

$\Rightarrow$ exp ist streng monoton wachsend und nach 15.8 stetig

$$\overset{}{\underset{14.21}{\Rightarrow}} \quad \exp : (-\infty, \infty) \longrightarrow (c, d) \text{ ist bijektiv}$$

wobei

$$c = \inf(\operatorname{Im}(f)) \underset{14.22}{=} \lim_{x \to -\infty} \exp(x)$$

$$d = \sup(\operatorname{Im}(f)) = \lim_{x \to \infty} \exp(x)$$

Beweis: • $x > 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 1 + x \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$$\Rightarrow d = \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$$

• $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} \frac{1}{\infty} = 0$

$$\Rightarrow c = \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

Also: $\mathrm{Im}(\exp) = (c, d) = (0, \infty)$ $\square$

Bem. 16.2:

$e := \exp(1) =$ Eulersche Zahl ist irrational

und $e \in (2, 3)$.

Def. 16.3:

Die Umkehrfunktion von exp heißt (natürlicher) Logarithmus,

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty).$$

Satz 16.4:

Der natürliche Logarithmus ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.

Insbesondere:

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$

Beweis:

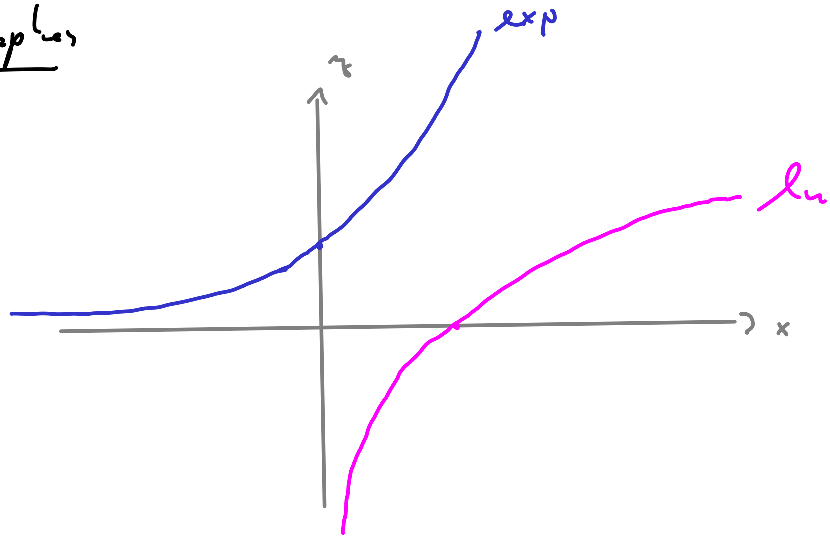
14.21 + 16.1 + 14.22. $\square$

Bem. 16.5:

Beachte: · $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$

· $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$

Skizze der Graphen



Def. 16.6

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Setze: $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$

Insb.: $e^x = \exp(x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = \exp(x)$

Satz 16.7:

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a = 1$.

ⓐ Die Abb. $\exp_a : (-\infty, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \ ; \ x \longmapsto a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$ heißt die Exponentialfunktion zur Basis a und sie ist stetig, bijektiv und streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend}, & a > 1 \\ \text{fallend}, & a < 1 \end{cases}$.

ⓑ Die Umkehrabbildung $\log_a : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$ von $\exp_a$ heißt Logarithmus zur Basis a und sie ist stetig, bijektiv und streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend}, & a > 1 \\ \text{fallend}, & a < 1 \end{cases}$.

Beweis:

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$.

$\Longrightarrow \ln(a) > 0$, denn $\ln(1) = 0$ und $\ln$ str. mon. wach.

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$

$\Longrightarrow x \cdot \ln(a) < y \cdot \ln(a)$

$\underset{\text{exp s.m.w.}}{\Longrightarrow} \exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln(a)) < \exp(y \cdot \ln(a)) = \exp_a(y)$

$\Longrightarrow \exp_a$ streng monoton wachsend

Zudem: $g : x \mapsto x \cdot \ln(a)$ stetig & $\exp$ stetig

$\Longrightarrow \exp_a = \exp \circ g$ stetig

Beachte: $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \underbrace{\ln(a)}_{>0} = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot \underbrace{\ln(a)}_{>0} = -\infty$

$\underset{\substack{\text{exp}\\\text{stetig}}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to \infty} \exp_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \exp(x \cdot \ln(a)) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x \cdot \ln(a)) = 0$

$\Longrightarrow \operatorname{Im}(\exp_a) = (0, \infty)$ und $\exp_a$ ist bijektiv

Teil ⓑ für $a > 1$ folgt aus 14.21 + ⓐ + 14.22.

Der Fall $a < 1$ geht analog!

$\boxed{\varepsilon}$

B) Potenz- und Logarithmusgesetze

Kor. 16.8:

Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$

ⓐ $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

ⓑ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

ⓒ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

ⓓ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

ⓔ $\forall n \in \mathbb{Z}$ stimmen die Def. von a^n in 7.9 & 16.6 überein.

ⓕ $\forall p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \geq 2$: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Insb. Def. 9.8 & 16.6 für $a^{\frac{1}{q}}$ stimmen überein.

Beweis:

ⓐ $a^{x+y} = \exp((x+y)\cdot \ln(a)) = \exp(x\cdot \ln(a) + y\cdot \ln(a))$

$= \exp(x\cdot\ln(a))\cdot\exp(y\cdot\ln(a)) = a^x\cdot a^y$

ⓑ $a^x = \exp(x\cdot \ln(a)) \Rightarrow \ln(a^x) = \ln(\exp(x\cdot\ln(a))) = x\cdot\ln(a)$

$\Rightarrow (a^x)^y = \exp(y\cdot\ln(a^x)) = \exp(y\cdot x\cdot\ln(a)) = a^{x\cdot y}$

ⓒ $(a\cdot b)^x = \exp(x\cdot\ln(a\cdot b)) \underset{16.9\,ⓓ}{=} \exp(x\cdot(\ln(a)+\ln(b)))$

$= \exp(x\cdot\ln(a) + x\cdot\ln(b)) = \exp(x\cdot\ln(a))\cdot\exp(x\cdot\ln(b)) = a^x\cdot b^x$

ⓓ $a^x\cdot a^{-x} \underset{ⓐ}{=} a^{x+(-x)} = a^0 = \exp(0\cdot\ln(a)) = \exp(0) = 1$

$\Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

ⓔ Sei $n\in\mathbb{Z}$ und $n>0$ $\Rightarrow$ $a^n \overset{\text{Def. 7.9}}{=} a\cdot\ldots\cdot a$

$a^n \underset{?}{=} \exp(n\cdot\ln(a))$) ! mit Ind.

Zu ?: $n=1$: $a \overset{!}{=} \exp(\ln(a))$ 16.6. ✓

$n-1 \mapsto n$: $\underbrace{a\cdots a}_{n\text{-mal}} = a\cdot(\underbrace{a\cdots a}_{n-1}) = \exp(\ln(a))\cdot\exp((n-1)\cdot\ln(a))$

$/\!/$ ⓒ

$\exp(n\cdot\ln(a)) = \exp((1+(n-1))\cdot\ln(a))$

Wenn $n=0$: $1 = \exp(0\cdot\ln(a))$ ✓

Wenn $n>0$: $a^{-n} \underset{7.9}{=} \frac{1}{\underset{\uparrow\, 7.9}{a^n}} = \frac{1}{\underset{\nearrow\, 16.6}{a^n}} \underset{ⓓ}{=} a^{-n}$

ⓕ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \underset{\uparrow\, ⓑ}{=} a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q} = \sqrt[q]{a^p}$

$\square$

Kor. 16.9:

Seien $a, x, y\in\mathbb{R}_{>0}$ mit $a\neq 1$ und $z\in\mathbb{R}$.

ⓐ $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

ⓑ $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

ⓒ $\log_a(x^z) = z\cdot\log_a(x)$

ⓓ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Beweis:

ⓐ Wenn $a \neq 1$, dann:

$$\exp_a\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \cdot \ln(a)\right) = \exp(\ln(x)) = x$$

$$\|$$

$$\exp_a(\log_a(x))$$

$$\underset{\substack{\exp_a\\ \text{injektiv}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \log_a(x)$$

ⓑ $\exp_a(\log_a(x \cdot y)) = x \cdot y = \exp_a(\log_a(x)) \cdot \exp_a(\log_a(y))$

$$\| \; 16.8ⓐ$$

$$\exp_a(\log_a(x) + \log_a(y))$$

$$\underset{\substack{\exp_a\\ \text{injektiv}}}{\Longrightarrow} \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

ⓒ $x^z = \exp(z \cdot \ln(x)) \overset{}{\underset{ⓐ}{=}} \exp(z \cdot \log_a(x) \cdot \ln(a))$

$$= \exp_a(z \cdot \log_a(x))$$

$$\Longrightarrow \log_a(x^z) = \log_a(\exp_a(z \cdot \ln(x))) = z \cdot \ln(x)$$

ⓓ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) \underset{ⓑ}{=} \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) \underset{ⓒ}{=} \log_a(x) - \log_a(y)$ $\square$

C) Die Zahl π

Satz 16.10

Der Sinus besitzt eine kleinste positive Nullstelle, die wir π nennen, und es gilt $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$.

Beweis:

Sei $x \in (0, 4]$ beliebig.

Erinnerung: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Setze: $a_n := \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $n \geq 1$.

Zeige: $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend

Denn: $a_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{x^{2n+1} \cdot x \cdot x}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)} \leq \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{= a_n} \cdot \frac{16}{20} < a_n$

Beachte: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sin(x) - x$ ist absolut konvergent

$\Longrightarrow (a_n)_{n \geq 1} = \left(\left| (-1)^n \cdot a_n \right| \right)_{n \geq 1}$ ist Nullfolge

Beweis des Leibniz-kriteriums mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot a_k$

$$\Longrightarrow \quad S_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \leq S_4$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underset{x - \frac{x^3}{6}}{\underset{\parallel}{x + S_1}} \leq \underset{x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n}{\underset{\parallel}{\sin(x)}} \leq x + S_4} \quad (*)$$

Sei $x = 1$: $\quad \Longrightarrow \quad \sin(1) \underset{(*)}{\geq} 1 - \frac{1^3}{6} > 0$

Sei $x = 4$: $\quad \sin(4) \underset{(*)}{\leq} S_4(4) + 4 \overset{!}{=} -\frac{268}{405} < 0$

Also: $\quad$ sin stetig, $\sin(1) > 0$ und $\sin(4) < 0$

$\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \quad \exists \; x \in [1, 4] : \sin(x) = 0$

$\Longrightarrow \quad A := \{ x \in [1, 4] \mid \sin(x) = 0 \} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \quad \exists \; \pi := \inf(A)$

Zeige: $\quad \sin(\pi) = 0$

$\pi = \inf(A) \underset{11.22}{\Longrightarrow} \exists \; (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n \in A$, monoton fallend und $\lim_{n \to \infty} b_n = \pi$

$\underset{\text{sin stetig}}{\Longrightarrow} \quad \underset{0}{\underset{\parallel}{\sin(b_n)}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sin(\pi) \quad \Longrightarrow \quad \sin(\pi) = 0$

$\Longrightarrow \quad \pi = \min(A)$ und $\pi > 1$, weil $\sin(1) > 0$

Zu zeigen: $\forall x \in (0, \pi) \; ; \; \sin(x) > 0$

1. Fall: $x \in [1, \pi)$

Ang: $\sin(x) = 0 \Rightarrow x \in A \;\&\; x < \pi \quad ↯ \; \pi = \min(A)$

Ang: $\sin(x) < 0$

$\Rightarrow \sin(1) > 0 \,,\; \sin(x) < 0 \underset{ZWS}{\Rightarrow} \exists\, y \in [1, x] : \sin(y) = 0$

$\Rightarrow y \in A \;\&\; y < \pi \quad ↯ \; \pi = \min(A)$

Also: $\sin(x) > 0$

2. Fall: $x \in (0, 1)$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} \sin(x) \geq S_1(x) + x = x - \frac{\overset{<x}{x^3}}{6} \geq x - \frac{x}{6} = \frac{5}{6} \cdot x > 0$$

□

Bem. 16.11:

Wir wissen zur Zeit nur: $\boxed{1 < \pi < 4}$

Zeigen später: $\pi \approx 3.14159 \ldots.$

D) Der Cosinus

Satz 16.12

$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ ist stetig, streng monoton fallend und bijektiv.

Beweis:

Seien $x, y \in [0, \pi]$ mit $x < y$.

Z.z.: $\cos(x) > \cos(y)$

- $\cos(y) = \cos\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right) \underset{AT}{=} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$
- $\cos(x) = \cos\left(\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2}\right) \underset{AT}{=} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{y-x}{2}\right)$

$$= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) + \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \sin\Big(\underbrace{\frac{y+x}{2}}_{\in (0,\pi)}\Big) \cdot \sin\Big(\underbrace{\frac{y-x}{2}}_{\in (0,\pi)}\Big) > 0$$

dabei: $0 \leq x < \frac{y+x}{2} < y \leq \pi \qquad 0 < \frac{y-x}{2} < y < \pi$

Also: cos streng monoton fallend auf $[0,\pi]$ und stetig

$$\underset{14.21}{\Longrightarrow} \quad \cos : [0,\pi] \longrightarrow \Big[\lim_{x\to\pi} \cos(x), \lim_{x\to 0} \cos(x)\Big] \text{ bijektiv}$$

$\| \leftarrow$ cos stetig

$\cos(\pi)$

$\| \leftarrow$ cos stetig

$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n}}{(2n)!} = 1$$

Dabei: $\cos^2(\pi) = 1 - \underbrace{\sin^2(\pi)}_{=0} = 1$

$\Longrightarrow \cos(\pi) \in \{1, -1\}$

$\Longrightarrow \cos(\pi) = -1$, weil $\cos(0) = 1$ und cos streng monoton fallend auf $[0,\pi]$.

□

E) Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Satz 16.13

ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) \in [-1,1]$ und $\cos(x) \in [-1,1]$

ⓒ

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1

ⓓ $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

ⓔ $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ und $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

ⓕ $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

ⓖ $\sin(x) = 0 \iff x \in \{k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis:

ⓐ $\sin(x+\pi) \overset{AT}{=} \sin(x)\cdot\overbrace{\cos(\pi)}^{=-1} + \overbrace{\sin(\pi)}^{=0}\cdot\cos(x) = -\sin(x)$

$\cos(x+\pi) \underset{AT}{=} \cos(x)\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \sin(x)\cdot\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -\cos(x)$

ⓑ $1 = \sqrt{\underbrace{\cos(x)^2}_{\geq 0} + \sin(x)^2} \geq |\sin(x)| \Rightarrow \sin(x) \in [-1,1]$

$1 = \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} \geq \sqrt{\cos(x)^2} = |\cos(x)| \Rightarrow \cos(x) \ ''$

ⓒ $\underline{x = 0}$:
$$\sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$
$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n}}{(2n)!} = 1$$

$\underline{x = \pi}$:
$16.10 \Rightarrow \sin(\pi) = 0$

$16.12 \Rightarrow \cos(\pi) = -1$

$\underline{x = \frac{\pi}{2}}$:
$$-1 = \cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \overset{AT}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 0 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}_{\leq 1} - 1 \leq 0$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \quad \wedge \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \{1, -1\}$$
$$\Downarrow \ \sin(y) > 0 \ \forall y \in \underset{\overset{\cup}{\frac{\pi}{2}}}{(0,\pi)}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$\underline{x = \frac{\pi}{4}}$:
$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \underset{AT}{=} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \quad ⊛$$

Zudem: $1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \ '' \ ⊛$$

Beachte: · $\sin(y) > 0 \quad \forall y \in \underset{\overset{\cup}{\frac{\pi}{4}}}{(0,\pi)} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

· cos str. mon. fallend auf $[0,\pi]$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\underline{x = \frac{3\pi}{2}}$:
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \underset{(a)}{=} -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \underset{(a)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$\underline{x = 2\pi:}$ $\quad \cos(2\pi) = \cos(\pi+\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} -\cos(\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} -(-\cos(0)) = 1$

$\sin(2\pi) = \sin(\pi+\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} -\sin(\pi) = 0$

ⓓ $\cos(x+2\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} -\cos(x+\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} \cos(x)$

$\sin(x+2\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} -\sin(x+\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} \sin(x)$

ⓔ $\sin(x+\frac{\pi}{2}) \underset{AT}{=} \sin(x)\cdot\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1}\cdot\cos(x) = \cos(x)$

$\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

ⓕ $\sin(x) \underset{\textcircled{e}}{=} \cos(x-\frac{\pi}{2}) \underset{\textcircled{a}}{=} -\cos((x-\frac{\pi}{2})+\pi) = -\cos(x+\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \quad \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ streng monoton wachsend und bijektiv

auf $[-1, 1]$

ⓖ $\cdot \quad x = k\cdot\pi \underset{\text{Ind. nach } k}{\Longrightarrow} \sin(x) = 0$

$\cdot \quad \sin(x) = 0 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: \quad 0 \le x-k\cdot\pi < \pi$

$\Rightarrow \sin(x-k\cdot\pi) \underset{\textcircled{a}}{=} \pm\sin(x) = 0$

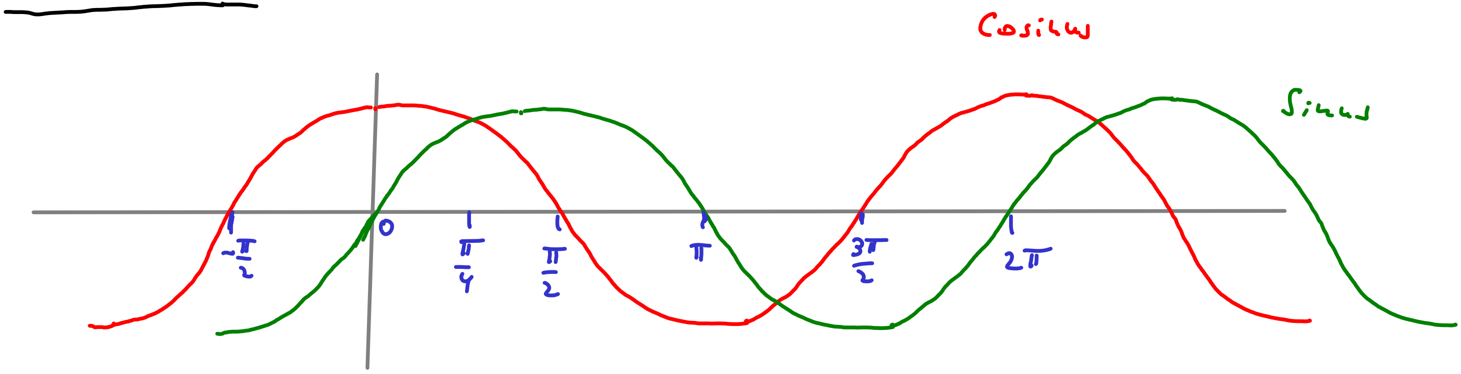
$\underset{\pi \text{ min. posit. Nst. von } \sin}{\Longrightarrow} \quad x-k\cdot\pi = 0 \Rightarrow x = k\cdot\pi$

$\cdot \quad \underset{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\overset{\cos(x) = 0}{\shortparallel}} \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{\pi}{2} \in \{k\cdot\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{k\cdot\pi-\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$= \{k\cdot\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Bem. 16.14:



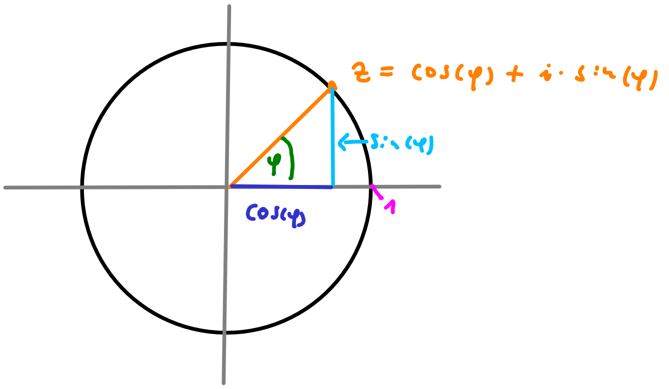
F) Polarkoordinaten

Bem. 16.15

Beh: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z| = 1 \iff \exists_1\, \varphi \in [-\pi, \pi) : z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Damit: $\overset{\neq 0}{z} \in \mathbb{C}$ beliebig

$\Rightarrow \exists_1\, \varphi \in [-\pi, \pi) : z = |z| \cdot e^{i\varphi}$



Beweis:

"$\Leftarrow$" $z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow |z|^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$

$$\Rightarrow |z| = \pm 1 \underset{|z| \geq 0}{\Rightarrow} |z| = 1$$

"$\Rightarrow$" Sei $z = a + ib$ mit $1 = |z|^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow a^2 = 1 - b^2 \leq 1 \Rightarrow a \in [-1, 1] = \cos([0, \pi])$$

$$\Rightarrow \exists_1\, x \in [0, \pi] : a = \cos(x)$$

$$\Rightarrow b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos(x)^2 = \sin(x)^2$$

$$\Rightarrow b \in \{\sin(x), \underset{\sin(-x)}{\underset{\shortparallel}{-\sin(x)}}\}$$

1. Fall: $b = \sin(x) \Rightarrow z = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \Rightarrow \varphi = x$

2. Fall: $b = \sin(-x) \Rightarrow a = \cos(x) = \cos(-x) \Rightarrow z = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x)$

$$\Downarrow \varphi = -x$$

Also: $\varphi \in [-\pi, \pi]$. o.E. $\varphi \in [-\pi, \pi)$

$\square$

Damit: $\{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} = \{ \underset{\uparrow}{e}^{i \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k} \mid k = 0, \dots, n-1 \}$

n-te Einheitswurzeln

"$\supseteq$" $$\left(e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k}\right)^n = e^{2\pi i k} = \underbrace{\cos(2\pi \cdot k)}_{=1} + i \cdot \underbrace{\sin(2\pi \cdot k)}_{=0} = 1$$

"$\subseteq$" $p = t^n - 1$ hat höchstens n Nullstellen □

G) Weitere trigonometrische Funktionen

Def. 16.16

ⓐ $\tan : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heißt Tangens.

ⓑ $\cot : \mathbb{R} \setminus \{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ heißt Cotangens.

Satz 16.17

ⓐ $\tan(x) = -\tan(-x)$, $\cot(x) = -\cot(-x)$, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$, $\cot(x+\pi) = \cot(x)$

ⓑ $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv, punktsymm. zu 0.

ⓒ $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton fallend, bijektiv, punktsymm. zu $\frac{\pi}{2}$.

Beweis:

ⓐ $$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan(-x)$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

analog für cot!

ⓑ Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \quad \cos(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cos str. m. f.} \\ \text{auf } [0,\pi]}}{>} \cos(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0}}{>} 0 \quad , \quad 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \sin(0) = 0}}{\leq} \sin(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sin str. m. w.} \\ \text{auf } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}}{<} \sin(y)$$

$$\Rightarrow \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y)$$

$\Rightarrow$ tan streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$

$\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ tan streng mon. wachsend auf $(-\frac{\pi}{2}, 0]$, also auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

tan pkt. symm. zu 0 nach ⓐ

Damit: tan ist str. m. w. auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und stetig

$$\Rightarrow \tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \left(\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x)\right) \text{ ist bijektiv}$$

Dabei:
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \frac{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x)}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(x)}_{>0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \frac{\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin(x)}{\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(x)}_{>0}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Also: $\tan\left((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

ⓒ analog zu ⓑ. □

Satz 16.18 (Arcusfunktionen)

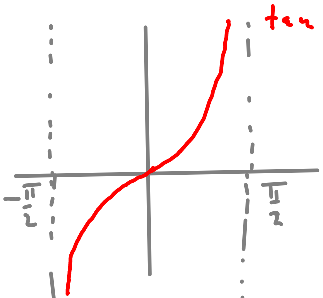
ⓐ $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ hat eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, den sog. Arcussinus $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

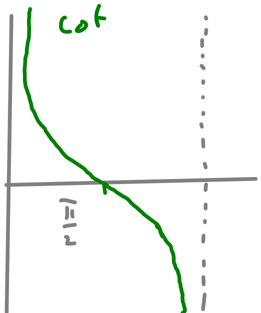
ⓑ $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$ hat eine stetige, streng monoton fallende Umkehrfunktion, den sog. Arcuscosinus $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$.

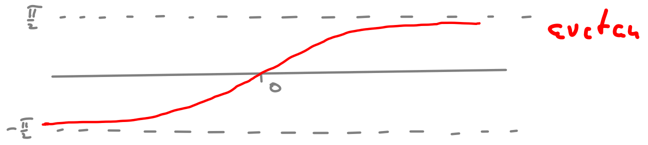
ⓒ $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ hat eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, den sog. Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

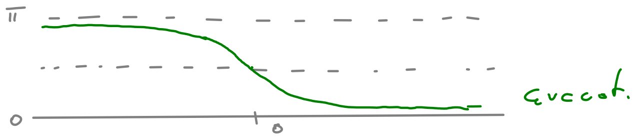
ⓒ $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ hat eine stetige, streng monoton fallende Umkehrfunktion, den sog. Arcuscotangens $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

Bew: 14.21 + 16.12 + 16.13 + 16.17. □









§ 17 Differenzierbarkeit

A) Der Differenzenquotient

Def. 17.1

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathcal{U}$.

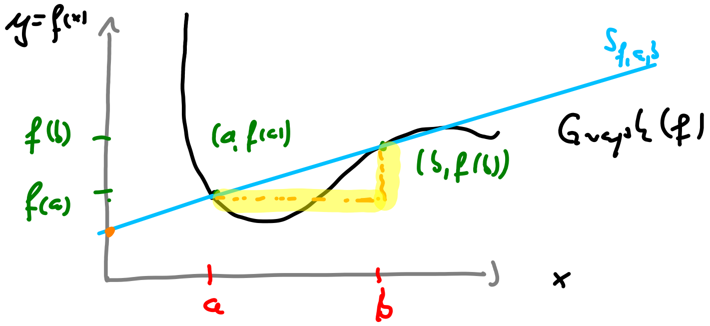
Dann heißt $\mathrm{Diff}_{f,a}: \mathcal{U}\setminus\{a\}\to\mathbb{R} : x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ der

Differenzenquotient von f an der Stelle a.

Sei $b \in \mathcal{U}\setminus\{a\}$ fest gegeben.

Setze: $S_{f,a,b}$ = Sekante an den Graphen von f durch a & b

= Gerade durch $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$



Geradengleichung von $S_{f,a,b}$:

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x + \frac{f(a)\cdot b - f(b)\cdot a}{b-a}$$

$$= \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\cdot (x-a) + f(a)$$

$= \mathrm{Diff}_{f,a}(b)$ = Steigung von $S_{f,a,b}$

Bsp. 17.2:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : x \longmapsto x^n$, $n \geq 1$ und $a\in\mathbb{R}$ & $x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$

$$\Rightarrow \mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k\cdot x^{n-1-k} = x^{n-1} + a\cdot x^{n-2} + \dots + a^{n-2}\cdot x + a^{n-1}$$

B) Differenzierbarkeit und die Ableitung.

Def. 17.3

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{U}$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{U}$.

ⓐ f heißt differenzierbar in a $:\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert

Wir nennen dann $f'(a) := \frac{df}{dx}(a) := \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ die Ableitung von f in a.

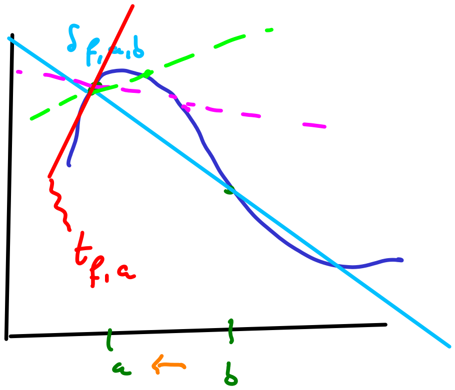
ⓑ f heißt differenzierbar auf $\mathcal{U}$

$:\Longleftrightarrow$ f ist differenzierbar in a $\forall a \in \mathcal{U}$

Insbesondere muß dann jedes $a \in \mathcal{U}$ ein HP von $\mathcal{U}$ sein.

Wir nennen dann $f': \mathcal{U} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

Bem. 17.4:



$S_{f,a,b}$ = Sekante an Graph(f) durch a & b

hat die Geradengleichung:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\Big\downarrow \; b \to a$$

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Gleichung der $\underset{t_{f,a}}{\text{Tangente}}$ an Graph(f) im Punkt $(a, f(a))$

Bsp. 17.5:

ⓐ Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto c$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \frac{c - c}{x - a} = 0 \xrightarrow[x \to a]{} 0$

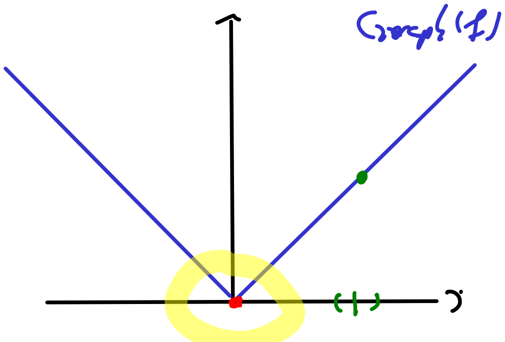
$\Rightarrow$ f ist diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto 0$

ⓑ Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^n$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} \Rightarrow \quad \mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot x^{n-1-k} \arrow[r, "x \to \infty"'] \arrow[d, "x \to a"] & n \cdot a^{n-1} \\ a^k \cdot a^{n-1-k} = a^{n-1} & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ f ist diff.bar auf $\mathbb{R}$ mit $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto n \cdot x^{n-1}$

ⓒ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$



Beh: f ist in $a = 0$ nicht diffbar!

Betrachte $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \geq 1}$

$\Rightarrow$ $a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $\mathrm{Diff}_{f,0}(a_n) = \frac{|a_n|}{a_n} = (-1)^n$

konvergiert nicht für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \mathrm{Diff}_{f,0}(x)$ existiert nicht

$\Rightarrow$ f nicht diff.bar in $a = 0$

Bemerk: $a \neq 0 \Rightarrow f$ diffbar in a mit $f'(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$

Bem. 17.6:

ⓐ Diff.barkeit ist eine lokale Eigenschaft, d.h. ob f diffbar in a ist, hängt nur vom Verhalten von f in einer sehr kleinen Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ab!

ⓑ f ist diffbar in a

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{= f'(a)}$ existiert

$\Leftrightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ und $\rho : U \to \mathbb{R}$: $f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + \rho(x) \wedge \lim_{x \to a} \frac{\rho(x)}{|x-a|} = 0$

Dabei: $f'(a) = c \quad \wedge \quad \rho(x) = (\mathrm{Diff}_{f,a}(x) - f'(a)) \cdot (x-a)$

C) Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz 17.7

$f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diff.bar in a $\Longrightarrow$ f stetig in a

Bew:

- f diff.bar in a $\Longrightarrow$ a ist ein HP von $\mathcal{U}$
- z.z.: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) + f(a) \xrightarrow{x\to a} f(a)$$

$$\big\downarrow{\scriptstyle x\to a} \qquad \big\downarrow{\scriptstyle x\to a} \qquad \big\downarrow{\scriptstyle x\to a}$$

$$f'(a)\cdot\underbrace{(a-a)}_{=0} + f(a) = f(a)$$

□

Bsp. 17.8:

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \mapsto |x|$ ist stetig in $a=0$, nicht diff.bar in $a=0$

D.h. die Umkehrung von 17.7 ist falsch!

D) Ableitungsregeln – Linearität, Produkt- und Quotientenregel

Prop. 17.9 (Linearität)

Seien $f: \mathcal{U}\to\mathbb{R}$ und $g: \mathcal{U}\to\mathbb{R}$ diff.bar in $a\in\mathcal{U}$, und $c,d\in\mathbb{R}$.

Dann: $c\cdot f+d\cdot g$ ist diff.bar in a mit $(c\cdot f+d\cdot g)'(a) = c\cdot f'(a)+d\cdot g'(a)$.

Beweis:

$$\mathrm{Diff}_{c\cdot f+d\cdot g,\,a}(x) = \frac{(c\cdot f(x)+d\cdot g(x)) - (c\cdot f(a)+d\cdot g(a))}{x-a}$$

$$= c\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + d\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} c\cdot f'(a) + d\cdot g'(a)$$

$$\big\downarrow{\scriptstyle x\to a} \qquad\qquad \big\downarrow{\scriptstyle x\to a}$$

$$f'(a) \qquad\qquad g'(a)$$

□

Bsp. 17.10:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$.

$\underset{17.9 \,+\, 17.5}{\Longrightarrow}$ f ist diff.bar auf $\mathbb{R}$ mit $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$

Prop. 17.11 (Produktregel)

Seien $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diff.bar $a \in \mathcal{U}$.

Dann: $f \cdot g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist diff.bar in a mit $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.

Beweis:

$$\mathrm{Diff}_{f\cdot g, a}(x) = \frac{f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a)}{x-a}$$

$$= \frac{f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(x) + f(a)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a)}{x-a}$$

$$= \underset{\substack{\downarrow x \to a \\ f'(a)}}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \cdot \underset{\substack{\downarrow x \to a \\ g(a)}}{g(x)} + \underset{\substack{\downarrow x \to a \\ f(a)}}{f(a)} \cdot \underset{\substack{\downarrow x \to a \\ g'(a)}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \xrightarrow{x \to a} f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$$

weil g stetig in a und 17.7

$\square$

Prop. 17.12 (Quotientenregel)

Seien $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diff.bar in $\overset{\mathcal{U}}{\overset{\in}{a}}$ mit $g(a) \neq 0$.

Dann: $\frac{f}{g} : \mathcal{U} \setminus \{x \in \mathcal{U} \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist diff.bar in a

mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}$.

Bew:

Zeige: a ist HP von $V := U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\} \underset{\boxed{g(a) \neq 0}}{\overset{!}{\ni}} a$

a ist HP von U und g ist stetig in a (und 17.7)

$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a) \neq 0 \underset{13.10\,c}{\Longrightarrow}$ a ist HP von V.

Dann:

$$\mathrm{Diff}_{\frac{1}{g},a}(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a)}}{x-a}$$

$$= \underset{\frac{1}{g(a)^2}}{\underset{17.7\ \big\downarrow\ x \to a}{\frac{1}{g(x) \cdot g(a)}}} \cdot \left(- \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x-a}}_{\substack{\big\downarrow\ x \to a \\ g'(a)}}\right) \longrightarrow -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Rest folgt aus 17.11 angewandt auf $f \cdot \frac{1}{g}$. $\square$

Bsp. 17.13

Jede rationale Fkt. $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist diff.bar.

z.B.: $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} ;\ x \longmapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \geq 1$

$\Rightarrow$ h ist diff.bar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

mit $h'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -n x^{-n-1}$

E) Ableitungsregeln - Ableitung der Umkehrfunktion + Kettenregel

Satz 17.14 (Ableitung der Umkehrfkt.)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton.

Wenn f in $a \in I$ diff.bar ist mit $f'(a) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R} \text{ diff.bar in } b = f(a) \text{ mit } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Bew.:

$\underset{14.21}{\Rightarrow}$ $f(I)$ ist ein Intervall & $f^{-1}: f(I) \to I$ stetig & bijektiv

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f(I) \setminus \{b\}$ mit $y_n \xrightarrow{n \to \infty} b$.

$$\Rightarrow \quad x_n := f^{-1}(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

$$\Rightarrow \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \underset{\boxed{\text{weil } f^{-1} \text{ bijektiv } \& \ y_n \neq b}}{\underset{\uparrow}{I \setminus \{a\}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Diff}_{f,a}(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lim_{x \to a} \mathrm{Diff}_{f,a}(x) = f'(a)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Diff}_{f^{-1},b}(y_n) = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\mathrm{Diff}_{f,a}(x_n)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{f'(a)}$$

$$\underset{13.7}{\Rightarrow} \quad \exists \lim_{y \to b} \mathrm{Diff}_{f^{-1},b}(y) = \frac{1}{f'(a)}$$

$\square$

Bsp. 17.15: $n \geq 2$

$f: [0, \infty) \to [0, \infty): x \longmapsto x^n$ ist str. monoton wachsend, stetig

und diff.bar auf $[0, \infty)$ mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$

$\underset{17.14}{\Rightarrow}$ $\sqrt[n]{\cdot}: [0, \infty) \to [0, \infty): y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ diff.bar in y $\forall y \in (0, \infty)$

mit $(\sqrt[n]{\cdot})': (0, \infty) \to \mathbb{R}: y \longmapsto \frac{1}{f'(\sqrt[n]{y})} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot y^{\frac{n-1}{n}}}$

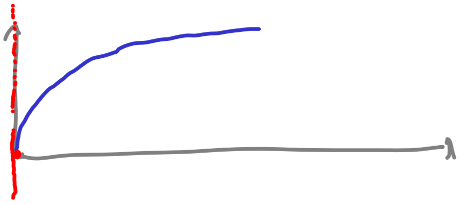
$$= \frac{1}{n \cdot y^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n} - 1}$$

Bemerkung: $\sqrt[n]{\cdot}$ ist nicht diffbar in $a = 0$!

dazu: $a_k = \frac{1}{k^n} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

aber: $\mathrm{Diff}_{\sqrt[n]{\cdot},0}(a_k) = \dfrac{\sqrt[n]{\frac{1}{k^n}} - 0}{\frac{1}{k^n} - 0} = \dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^n}} = k^{n-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Diff}_{\sqrt[n]{\cdot},0}(x) \Rightarrow \sqrt[n]{\cdot}$ nicht diffbar in 0



Insbesondere: $n=2$

$\sqrt{\cdot} : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist diffbar auf $(0,\infty)$

mit $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

Prop. 17.16 (Kettenregel)

Seien $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$ und $a \in U$.

Wenn f diffbar in a und g diffbar in $f(a)$, dann

$g \circ f$ ist diffbar in a mit $(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

äußere Ableitung × innere Ableitung

Beweis:

Setze: $h : V \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \begin{cases} \mathrm{Diff}_{g,f(a)}(y) = \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}, & y \neq f(a) \\ g'(f(a)), & y = f(a) \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \xRightarrow[\text{in } f(a)]{g \text{ diffbar}} \quad h(y) \xrightarrow[y\to f(a)]{} g'(f(a)) = h(f(a)) \\ \text{d.h. } h \text{ ist stetig in } f(a) \end{array}\right\} \circledast$$

Zudem: $\forall y \in V: \quad h(y)\cdot(y - f(a)) = g(y) - g(f(a)) \quad (**)$

$$\Rightarrow \operatorname{Diff}_{g\circ f, a}(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \underset{y = f(a)}{\overset{(**)}{=}} \frac{h(f(x))\cdot(f(x) - f(a))}{x - a}$$

$$= \underbrace{\underbrace{h(f(x))}_{\substack{\downarrow x\to a \\ f(a) \\ \text{weil } f \\ \text{stetig in} \\ a \text{ nach } 17.7}}}_{\substack{\downarrow x\to a \\ h(f(a)) \\ \text{wegen } (*)}} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\substack{\downarrow x\to a \\ f'(a)}} \xrightarrow{x\to a} h(f(a))\cdot f'(a)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g'(f(a))\cdot f'(a)$$

$\square$

Bsp. 17.17

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow \quad h = g\circ f$ mit $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$

$f: \mathbb{R} \to (0,\infty); x \mapsto x^2+1$

$\underset{17.16}{\Rightarrow}$ h ist diffbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\cdot\sqrt{f(x)}}\cdot\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\square$

F) Stetige Differenzierbarkeit

Def. 17.18: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ⓐ f heißt stetig differenzierbar $:\Longleftrightarrow$ f ist diff.bar auf $\mathcal{U}$ & f' ist stetig auf $\mathcal{U}$.

ⓑ Wir definieren k-fache Differenzierbarkeit rekursiv:

- $f^{(0)} := f$
- Für $k \geq 1$:
  - f heißt k-fach differenzierbar $\Longleftrightarrow$ $f^{(k-1)}$ ist diff.bar
  - $f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)'$

Notation: $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$

ⓒ f heißt k-fach stetig differenzierbar $:\Longleftrightarrow$ f k-fach diff.bar und $f^{(k)}$ stetig auf $\mathcal{U}$

Notation: $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) := \{ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \mid f \text{ k-fach stetig diff.bar} \}$

ⓓ f heißt ∞ oft differenzierbar $:\Longleftrightarrow$ $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \quad \forall k \geq 1$

Notation: $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

Bsp. 17.19:

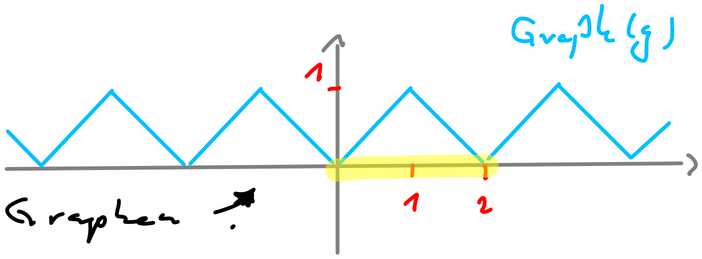
ⓐ
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar, aber f' ist in $x = 0$ nicht stetig!

ⓑ Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind ∞ oft diff.bar, da die Ableitungen wieder Polynomfkt. oder rationale Fkt. sind!

Bem. 17.20

Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die periodische Fkt. mit folgendem Graphen ↗:



$\Longrightarrow$ g ist stetig, g nur in $x \in \mathbb{Z}$ nicht diff.bar

Definition: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(2^n \cdot x)}{2^n}$

$\Rightarrow$ f ist stetig , aber f ist nirgendwo diff.bar

Wie sieht man die Stetigkeit?

Setze: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{g(2^k \cdot x)}{2^k}$

ist stetig als Summe stetiger Funktionen

Klar: $f_n \longrightarrow f$ punktweise auf $\mathbb{R}$.

Zeige: $f_n \longrightarrow f$ glm. auf $\mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\overset{\le 1}{\boxed{g(2^k \cdot x)}}}{2^k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

unabh. von x!

$$\Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty}$$

$$0$$

Also: f ist als glm. GW von stetigen Fkt. stetig!

§ 18 Der Mittelwertsatz und seine Anwendungen

A) Notwendige Bedingung für Extremstellen

Def. 18.1

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathcal{U}$.

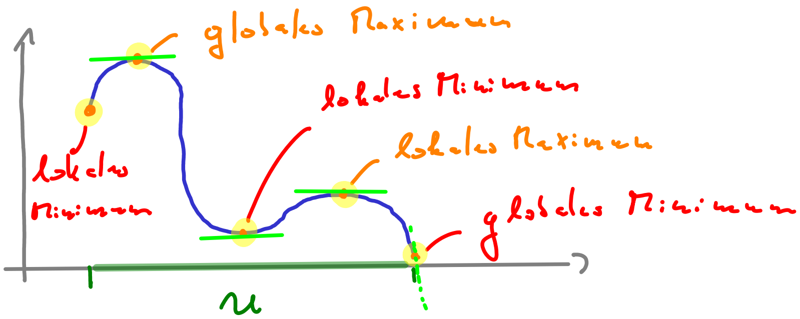
ⓐ f hat in a ein globales Maximum :⟺ $\forall x \in \mathcal{U} : f(x) \le f(a)$

ⓑ f hat in a ein lokales Maximum :⟺ $\exists \delta > 0 ; \forall x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\delta(a) ; f(x) \le f(a)$

ⓒ f hat in a ein globales Minimum :⟺ $\forall x \in \mathcal{U} : f(x) \ge f(a)$

ⓓ f hat in a ein lokales Minimum :⟺ $\exists \delta > 0 ; \forall x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\delta(a) ; f(x) \ge f(a)$

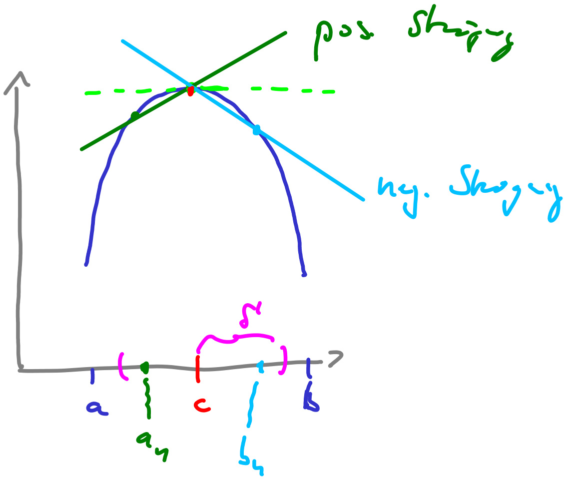
ⓔ a heißt Extremstelle und f(a) Extremum von f
:⟺ f hat in a ein lokales Maximum oder Minimum



Prop. 18.2 (Notwendiges Krit. für Extremstellen)

Sei $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und f sei diffbar in $c \in (a,b)$.

Wenn f in c eine Extremstelle hat, dann gilt: $f'(c) = 0$.



Beweis:

1. Fall: f hat in c ein lok. Max.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in (a,b) \cap \mathcal{U}_\delta(c) : f(x) \le f(c)$

Setze: $\delta' := \min\{\delta, c-a, b-c\} > 0$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{\delta'}(c) = (c-\delta', c+\delta') \subseteq (a,b) \cap \mathcal{U}_\delta(c)$

Für $n \ge 2$ setze: $a_n := \underset{\substack{n\to\infty \downarrow \\ c}}{c - \frac{\delta'}{n}} \in \mathcal{U}_{\delta'}(c)$, $\quad b_n := \underset{\substack{n\to\infty \downarrow \\ c}}{c + \frac{\delta'}{n}} \in \mathcal{U}_{\delta'}(c)$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{\overbrace{f(a_n) - f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{a_n - c}_{< 0}} \xrightarrow[n \to \infty]{} f'(c) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f'(c)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c) = 0$$

$$\Uparrow$$

$$0 \geq \frac{\overbrace{f(b_n) - f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{b_n - c}_{> 0}} \xrightarrow[n \to \infty]{} f'(c) \quad \Rightarrow \quad 0 \geq f'(c)$$

2. Fall: f hat lok. Min. in c

$\Rightarrow$ $-f$ " " Max. in c

$\Rightarrow$ $0 = (-f)'(c) = -(f'(c)) \Rightarrow f'(c) = 0$ $\square$

Bsp. 18.3:

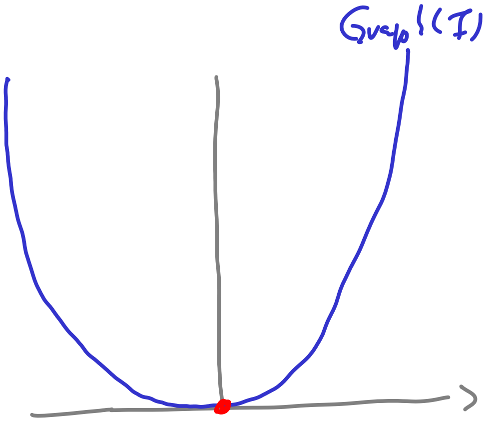
ⓐ $n \geq 2$ und n gerade:

$\Rightarrow$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^n$

$\Rightarrow$ f hat in 0 globales Minimum,

weil $f(x) = x^n \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

und $f(0) = 0$



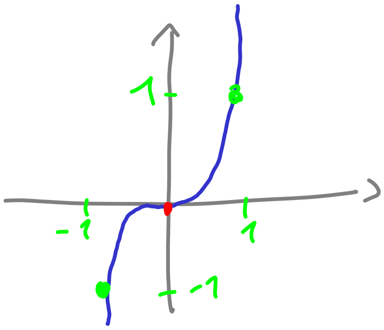
Zudem: $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow f'(0) = 0$

ⓑ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \longmapsto x^3$

$\Rightarrow$ f hat in $x = 0$ keine Extremstelle,

weil: $x^3 = f(x) < \overset{f(0)}{0}$ $\forall x < 0$ und

$x^3 = f(x) > \underset{f(0)}{0}$ $\forall x > 0$



ABER: $f'(x) = 3 \cdot x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, d.h. $f' = 0$ ist kein hinreichendes Krit. für Extremstelle!

Bem. 18.4:

Auch wenn f auf $[a,b]$ definiert und in a & b diffbar ist, macht 18.2 keine Aussage für $c = a$ oder $c = b$.

Denn: $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

$\Rightarrow$ f hat in $x = -1$ ein lok. Minimum &

f " " $x = 1$ " " Maximum,

denn: $1 = f(1) \geq x^3 \geq f(-1) = -1$

$\forall x \in [-1, 1]$

Aber: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3 \neq 0 \neq 3 = f'(-1)$

B) Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz

Satz von Rolle 18.5

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b) mit $a < b$.

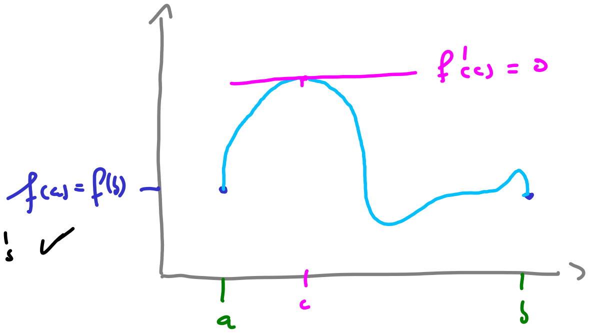
Wenn $f(a) = f(b)$, dann: $\exists\, c \in (a,b) : f'(c) = 0$.

Beweis:

1. Fall: f = konstant

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow$ jedes c in (a,b) tut's ✓



2. Fall: f nicht konstant $\Rightarrow \exists\, y \in (a,b) : f(y) \neq f(a) = f(b)$

Fall 2.1: $f(y) > f(a) = f(b)$

f stetig auf $[a,b] \underset{14.16}{\Rightarrow} \exists\, c \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : f(x) \leq f(c) \Rightarrow c \in (a,b)$

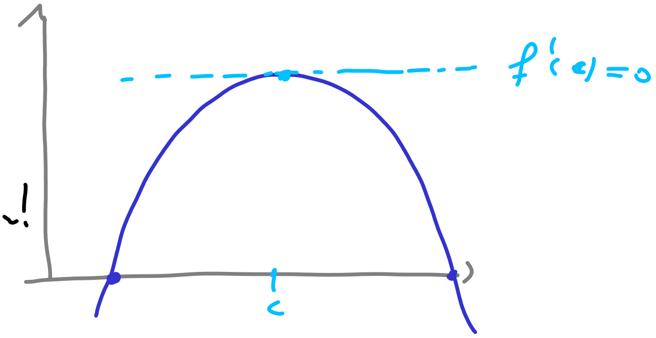
$\underset{18.2}{\Rightarrow} f'(c) = 0$

Fall 2.2: $f(y) < f(a) = f(b)$. analog.

$\square$

Bem. 18.6:

Eine diff.bare Fkt. hat zwischen je zwei Nullstellen stets ein Extremum!



Mittelwertsatz 18.7

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff.bar auf (a,b) mit $a<b$.

Dann: $\exists\, c\in(a,b) : f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Beweis:

Setze: $g:[a,b]\to\mathbb{R} : x\longmapsto f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

$\Rightarrow$ g ist stetig auf $[a,b]$ und diff.bar auf (a,b)

mit
$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)=f(a)$$
$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cdot(\cancel{b-a}) \quad /\!/$$

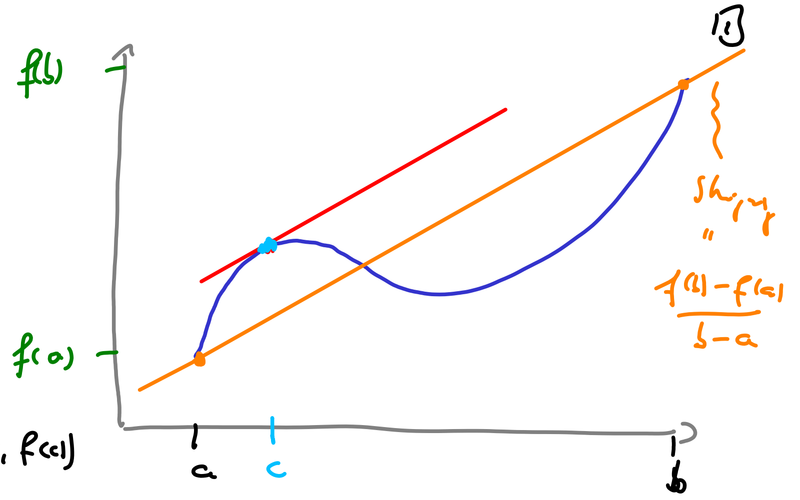
$\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ $\exists\, c\in(a,b) : 0=g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Bem. 18.8:

MWS $\Rightarrow$ $\exists\, c\in(a,b)$

s.d. Steigung der Sekante durch $(a,f(a))$ & $(b,f(b))$

$\hat{=}$ Steigung der Tangente in $(c,f(c))$



Bsp. 18.11:

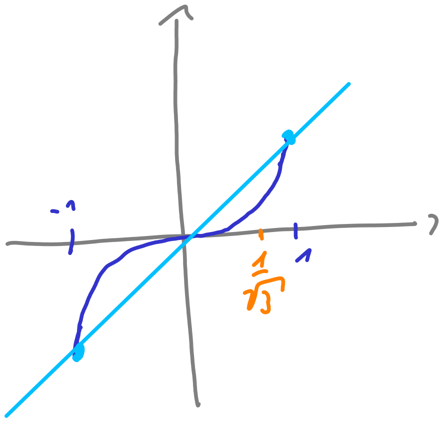
$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

ist stetig & diffbar auf $[-1, 1]$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^2 \overset{!}{=} \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Kor. 18.10 (Allgemeiner MWS der Differentialrechnung)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b) mit $a<b$.

Dann: $\exists\, c \in (a,b) : \quad f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$.

Beweis:

Setze $h : [a,b] \to \mathbb{R} ; x \mapsto f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a))$

$\Rightarrow h$ stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b)

mit $h(a) = f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a) = h(b)$

$\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (a,b) : \quad 0 = h'(c) = f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$

$\square$

C) Anwendungen des Mittelwertsatzes

C.1) Konstante Funktionen

Prop. 18.11 (Kriterium für Konstantheit)

Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff.bar auf (a,b) mit $a<b$.

Wenn $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$, dann ist f konstant auf $[a,b]$.

Beweis: Sei $x\in(a,b]$ fest.

$\Rightarrow f_{|[a,x]}$ ist stetig auf $[a,x]$ und diff.bar auf (a,x)

$$\overset{18.7}{\underset{MWS}{\Longrightarrow}} \exists\, c\in(a,x): \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=f(a).$$

$\square$

C.2) Monotonie und Ableitung.

Prop. 18.12: (Kriterium für Monotonie)

Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff.bar auf (a,b) mit $a<b$.

ⓐ $f'(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ $\Longrightarrow$ f ist streng monoton wachsend auf $[a,b]$.

ⓑ $f'(x)<0$ $\forall x\in(a,b)$ $\Longrightarrow$ f ist streng monoton fallend auf $[a,b]$.

Beweis:

ⓐ Seien $x,y\in[a,b]$ mit $x<y$.

$\Rightarrow f_{|[x,y]}$ ist stetig auf $[x,y]$ und diff.bar auf (x,y)

$$\overset{18.7}{\underset{MWS}{\Longrightarrow}} \exists\, c\in(x,y): \quad f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\Rightarrow \quad f(y)-f(x) = \underbrace{f'(c)}_{>0}\cdot\underbrace{(y-x)}_{>0} > 0 \quad \Rightarrow f(y)>f(x)$$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend auf $[a,b]$.

ⓑ analog.

$\square$

Bsp. 18.13: Sei $n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n \quad \text{ist streng monoton wachsend!}$$

Zeige dies wiederum mit Hilfe von 18.12:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} > 0 \qquad \forall x \in (0, \infty)$$

$$\underset{18.12}{\Rightarrow} \quad f \text{ ist str. monoton wachsend auf } [0, b] \quad \forall b > 0$$

$$\Rightarrow \quad f \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad [0, \infty)$$

□

C.3) Hinreichendes Kriterium für Extremstellen

Prop. 18.14 (Hinreichendes Kriterium für Extremstellen)

Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-fach diff.bar und sei $c \in (a,b)$.

ⓐ $f'(c) = 0$ und $f''(c) < 0 \Rightarrow$ f hat ein lokales Maximum in c

ⓑ $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0 \Rightarrow$ f hat ein lokales Minimum in c

Beweis:

ⓑ Vor. $\Rightarrow \quad 0 < f''(c) \overset{!}{=} \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - \overset{=0}{f'(c)}}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{x - c}$

Sei $\varepsilon := \dfrac{f''(c)}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (a,b)$ mit $|x - c| < \delta_\varepsilon$

gilt: $\left| \dfrac{f'(x)}{x - c} - f''(c) \right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{f''(c)}{2} = -\varepsilon < \frac{f'(x)}{x - c} - f''(c)} < \varepsilon = \frac{f''(c)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{x - c} > -\frac{f''(c)}{2} + f''(c) = \frac{f''(c)}{2} > 0 \qquad (*)$$

O.E.: δ_ε so klein, dass: $(c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon) \subsetneq (a, b)$

Sei $x \in (c-\delta_\varepsilon, c) \Rightarrow x - c < 0$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} f'(x) < 0 \cdot (x-c) = 0$

$\underset{18.12}{\Rightarrow}$ f ist auf $[c-\delta_\varepsilon, c]$ streng monoton fallend

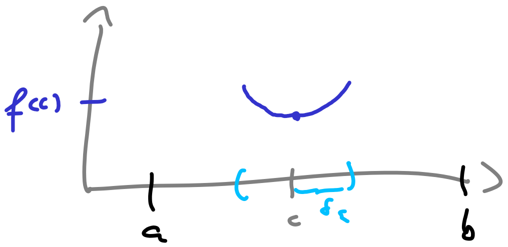
Sei $x \in (c, c+\delta_\varepsilon) \Rightarrow x - c > 0$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} f'(x) > 0 \cdot (x-c) = 0$

$\underset{18.12}{\Rightarrow}$ f ist auf $[c, c+\delta_\varepsilon]$ streng monoton wachsend

Also: $f(c) \le f(x) \ \forall x \in [c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon]$

$\Rightarrow$ f hat in c ein lokales Minimum.



ⓐ analog. $\boxed{\xi}$

Bsp. 18.15:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; x \longmapsto x^3 - 3x^2 - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \overset{!}{=} 0$

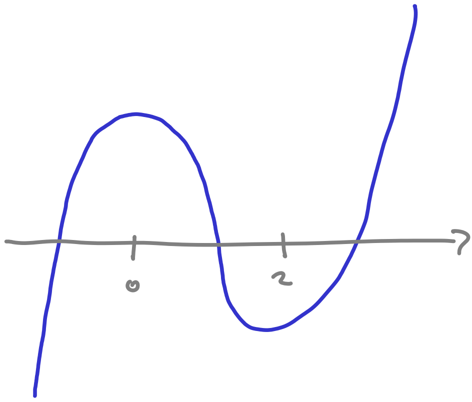
$= 3 \cdot (x-2) \cdot x$

$\Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$

Zudem: $f''(x) = 6x - 6$

$\Rightarrow \cdot\, f(0) = -6 < 0 \Rightarrow f$ hat lok. Maximum in 0

$\cdot\, f(2) = 6 > 0 \Rightarrow f$ " " Minimum in 2



Bem. 18.17

$f'(c) = 0$ und f' hat in c Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ f hat in c eine Extremstelle

C.4) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung

Satz 18.17

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise und $f_n' \xrightarrow{n\to\infty} g$ gleichmäßig, dann ist f stetig diffbar mit $f' = g$.

Beweis:

Beachte: f_n' stetig $\forall n$ & $f_n' \xrightarrow{\text{glm.}} g \underset{15.6}{\Longrightarrow} g$ stetig

Sei $c \in [a,b]$.

Zeige: $$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g(c)$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Z.Z.: $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$: $\forall x \in [a,b]$ mit $0 < |x - c| < \delta_\varepsilon$ gilt: $|\mathrm{Diff}_{f,c}(x) - g(c)| < \varepsilon$

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right|$$

Beachte: g ist in c

$\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$: $\forall x \in [a,b]$ mit $|x - c| < \delta_\varepsilon$ gilt: $\underbrace{|g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{3}}_{(**)}$

Beachte: $f_n' \longrightarrow g$ glm. auf $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, n_\varepsilon$: $\forall n \geq n_\varepsilon$ und $\forall x \in [a,b]$: $\underline{|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}}$ (***)

Sei nun $x \in [a,b]$ mit $0 < |x - c| < \delta_\varepsilon$ und $n \geq n_\varepsilon$.

$\overset{\text{MWS}}{\underset{18.7}{\Longrightarrow}} \exists\, y$ zwischen x und c mit $\frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = f_n'(y)$ (*)

$\Rightarrow |y - c| \leq |x - c| < \delta_\varepsilon$

Damit: $\left|\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - g(c)\right| \overset{(*)}{=} |f_n'(y) - g(c)| =$

$$= |f_n'(y) - g(y) + g(y) - g(c)| \le \underbrace{|f_n'(y)-g(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ (***)} + \underbrace{|g(y)-g(c)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ (**)} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left|\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - g(c)\right|}_{<\frac{2\varepsilon}{3}} \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Also: f ist diff.bar in c mit $f'(c) = g(c)$

$\Rightarrow$ $f' = g$ $\Rightarrow$ f ist stetig diffbar auf $[a,b]$. □

Bem. 18.19:

ⓐ 18.17 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(f_n')(c) = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(c)$

d.h. Ableitung und GW vertauschen

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c}\frac{f_n'(x)-f_n'(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}$$

d.h. 2 GWe vertauschen !!!

ⓑ Man kann in 18.17 auf die Stetigkeit der f_n' verzichten! (dann ist f' evt. nicht mehr stetig).

ⓒ In 18.17 fordert man nur pktw. Konvergenz der f_n, aber man kann zeigen, daß die f_n unter der Voraussetzung von 18.17 immer glm. gegen f konvergieren!

C.5) Ableitung von Potenzreihen

Kor. 18.19

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r>0$.

Dann ist $f:(-r,r)\to\mathbb{R} : x\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ diffbar auf $(-r,r)$

mit $f':(-r,r)\to\mathbb{R} : x\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$.

Beweis:

ÜA (12.45) $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot t^n$ & $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot t^{n-1}$ haben beide den KR r

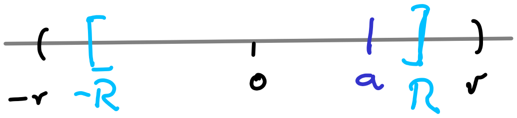
$\underset{15.7}{\Rightarrow}$ $g:(-r,r)\to\mathbb{R} : x\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$ ist stetig auf $(-r,r)$

Sei $a\in(-r,r)$.

Z.z.: f diffbar in a mit $f'(a)=g(a)$

Setze $R := \frac{r+|a|}{2} < r$

$\Rightarrow a\in[-R,R]$



$\Rightarrow$ $f_n:[-R,R]\to\mathbb{R} : x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k$ ist stetig diffbar auf $[-R,R]$

und $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k\cdot x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$

und $f_n' \longrightarrow g$ glm. auf $[-R,R]$

und $f_n \to f$ glm. auf $[-R,R]$

$\underset{18.17}{\Rightarrow}$ f ist diffbar auf $[-R,R]$, also auch in a,

mit $f'(a) = g(a)$ $\square$

Kor. 18.20:

Eine durch eine Potenzreihe definierte Funkt. ist ∞ oft diffbar!

C.6) Ableitungen spezieller Funktionen

Kor. 18.21

ⓐ exp ist unendlich oft diff.bar auf $\mathbb{R}$ mit $\exp'(x) = \exp(x)$.

ⓑ sin ist unendlich oft diff.bar auf $\mathbb{R}$ mit $\sin'(x) = \cos(x)$.

ⓒ cos ist unendlich oft diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $\cos'(x) = -\sin(x)$.

ⓓ $\exp_a$ ist stetig diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $\exp_a'(x) = \ln(a)\cdot\exp_a(x)$, $a\in\mathbb{R}_{>0}$.

ⓔ $\log_a$ ist stetig diffbar auf $(0,\infty)$ mit $\log_a'(x) = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}$, $1\neq a\in\mathbb{R}_{>0}$

Insbesondere: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

ⓕ tan ist stetig diffbar auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ mit $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

ⓖ cot ist stetig diffbar auf $(0,\pi)$ mit $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

ⓗ arctan ist stetig diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

ⓘ arccot ist stetig diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

ⓙ arcsin ist stetig diffbar auf $(-1,1)$ mit $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

ⓚ arccos ist stetig diffbar auf $(-1,1)$ mit $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bew:

ⓐ 18.19 + 18.20 ⇒ exp ist ∞ oft diffbar auf $\mathbb{R}$

mit $$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

ⓑ 18.19 + 18.20 ⇒ sin ist ∞ oft diffbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{x^{2n+1-1}}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

ⓒ 18.19 + 18.20 ⇒ cos ist ∞ oft diffbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2n\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$$

ⓓ $\exp_a(x) = \exp(x\cdot\ln(a))$ ist wegen der KR diffbar auf $\mathbb{R}$

mit $$\exp_a'(x) = \exp'(x\cdot\ln(a))\cdot\big(x\cdot\ln(a)\big)' = \ln(a)\cdot\exp(x\cdot\ln(a)) = \ln(a)\cdot\exp_a(x)$$

Zudem: $\exp_a'$ ist offenbar stetig

ⓔ Beachte: $\exp_a'(x) = \ln(a)\cdot\exp_a(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\underset{17.14}{\Longrightarrow}$ $\log_a$ ist differbar auf $(0,\infty)$ mit

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a)\cdot\exp_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a)\cdot x}$$

Zudem: $\log_a'$ ist stetig auf $(0,\infty)$

Falls: $a = e \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{\ln(e)\cdot x} = \frac{1}{x}$

ⓕ $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist diffbar auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ wegen QR mit

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \underset{\overset{\shortparallel}{1+\tan^2(x)}}{\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

Zudem: $\tan'$ stetig auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

ⓖ Analog für cot!

ⓗ Beachte: $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\underset{17.14}{\Longrightarrow}$ arctan ist diffbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\frac{\sin^2}{\cos^2}(\arctan(x)) + 1}$$

$$= \frac{1}{\tan^2(\arctan(x)) + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Zudem: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan'$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

ⓘ analog für arccot!

(j) **Beweis:** $\sin'(x) = \boxed{\cos(x) > 0}$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\underset{17.14}{\Longrightarrow}$ arcsin ist diffbar auf $\sin\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1, 1)$

mit $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Zudem: arcsin' ist offenbar stetig auf $(-1, 1)$

(k) Analog für arccos!

$\square$

Bem. 17.22:

Man kann mit Ind. leicht zeigen, daß alle Fkt. in 17.21 ∞ oft diffbar sind.

Bsp. 17.23

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$.

Zeige: f ist ∞ oft diffbar auf $(0, \infty)$ mit $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

Bew.:

KR $\Rightarrow$ f ist diffbar auf $(0, \infty)$ mit

$$f'(x) = \exp'(a \cdot \ln(x)) \cdot (a \cdot \ln(x))' = \exp(a \cdot \ln(x)) \cdot \frac{a}{x}$$

$$= x^a \cdot a \cdot x^{-1} = a \cdot x^{a-1}$$

Da f' wieder vom selben Typ ist, folgt mit Ind., dass f ∞ oft diffbar ist.

$\square$

C.7) Die Regeln von der l'Hôpital

Bem. 18.24

Grenzwertsätze

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{\cos(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} x^2+1}{\lim_{x\to 0}\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\lim_{x\to 0}\exp(x)}{\lim_{x\to 0}\sin^2(x)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\arctan(x)}{\lim_{x\to\infty}1+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\exp(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty}1+\frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty}\exp(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ABER: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \overset{?}{=} \frac{\lim_{x\to 0}\sin(x)}{\lim_{x\to 0}\sqrt{x}} \overset{!}{=} \frac{0}{0}$?

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} \overset{?}{=} \frac{\lim_{x\to\infty}\ln(x)}{\lim_{x\to\infty}x} \overset{?}{=} \frac{\infty}{\infty}$?

Satz 18.25 (Regeln von der l'Hôpital)

Seien $a,b\in[-\infty,\infty] := \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ mit $a<b$, sei $c\in[a,b]$

und $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff.bar.

Zudem sei $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ und $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in[-\infty,\infty]$ existiere.

$$\left.\begin{array}{l} ⓐ\ \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \\ \text{oder} \\ ⓑ\ \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis:

Wir zeigen die Aussage nur für den Fall:

$c\in\mathbb{R}$ und $k := \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\mathbb{R}$

(Die Fälle $c\in\{-\infty,\infty\}$ und $k\in\{-\infty,\infty\}$ gehen analog!)

Sei $\varepsilon>0$ gegeben.

Z.z.: $\exists\,\delta_\varepsilon>0 : \forall\, \underset{\neq c}{x}\in(a,b)$ mit $0<|x-c|<\delta_\varepsilon$ gilt: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$

Vor. $\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to c]{} k$

$\Rightarrow \exists \delta'_{\varepsilon/2} > 0 : \forall z \in (a,b)$ mit $0 < |z-c| < \delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt: $\boxed{\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - k\right| < \frac{\varepsilon}{2}}$ (*)

Seien $c \neq x, y \in (a,b) \cap (c-\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}, c+\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}})$

$\overset{\text{Bl.10}}{\underset{\text{Anw}}{\Longrightarrow}}$ ∃ z zwischen x & y mit $f'(z)\cdot(g(x)-g(y)) = g'(z)\cdot(f(x)-f(y))$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(y)}{\underset{\neq 0}{\boxed{g(x)-g(y)}}} = \frac{f'(z)}{\underset{\neq 0 \leftarrow \text{Vor.}}{\boxed{g'(z)}}} \quad (**) \quad \text{und} \quad z \in (a,b)\cap(c-\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}, c+\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}})$$

Ang: "$=0$" $\xRightarrow{\text{Rolle}}$ ∃ a zwischen x & y mit $g'(a)=0$ ↯

Zu ⓐ: Seien $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$

1. Fall: $c \in (a,b) \xRightarrow[\text{in } c]{f,g \text{ stetig}} f(c) = 0 = g(c)$

2. Fall: $c \notin (a,b) \Rightarrow \underset{\mathbb{R}}{\hat{c}} \in \{a,b\} \Rightarrow$ f & g in c stetig fortsetzbar durch $f(c)=g(c)=0$

Also: o.E. f & g in c stetig mit $f(c)=g(c)=0$!

Setze: $\delta_\varepsilon := \delta'_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ und $c \neq x \underset{\neq}{,} y \in (a,b)\cap(c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon)$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - k\right| \underset{(**)}{=} \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - k\right| \underset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Big\downarrow y \to c$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| = \left|\frac{f(x) - \overset{=0}{f(c)}}{g(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(c)}}} - k\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \, .$$

Also: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

Zu ⓑ: Sei $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$.

1. Fall: $f \equiv 0$ in einer kleinen Umgebung von c $\Rightarrow$ $f' \equiv 0$ nahe bei c

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{0}{\pm\infty} = 0 = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: k$$

2. Fall: $f \not\equiv 0$ in der Nähe von c (und $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$)

$$\Rightarrow \exists \underset{c^*}{y} \in (a,b) \cap (c-\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}, c+\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}) : f(y) \neq 0 \neq g(y)$$

Ansatz: $$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| = \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} - k\right| =$$

$$= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} - k\right|$$

$$= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} - k\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|}_{\leq S} \cdot \underbrace{\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|}_{<\frac{\varepsilon}{4\cdot S}} + \underbrace{\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - k\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad (**)$$

① $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$

$$\Rightarrow \exists \delta''_\varepsilon > 0 : \forall x \in (a,b) \text{ mit } 0 < |x-c| < \delta''_\varepsilon \text{ gilt: } \left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4\cdot|f(y)|}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

② Für $0 \neq x, y \in (a,b) \cap (c-\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}, c+\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}})$ gilt:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - k + k\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - k\right| + |k| \underset{(**)}{=} \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - k\right| + |k| \underset{(*)}{<} \overbrace{\frac{\varepsilon}{2} + |k|}^{=: S}$$

③ $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$

$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon''' > 0 : \forall x \in (a,b)$ mit $0 < |x-c| < \delta_\varepsilon'''$ gilt: $\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot S \cdot |g(y)|}$

$$\Rightarrow \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot S}$$

④ Für $c \neq x, y \in (a,b) \cap (c - \delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}, c + \delta'_{\frac{\varepsilon}{2}})$ gilt:

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k\right| \underset{(**)}{=} \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - k\right| \underset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

Setze: $\delta_\varepsilon := \min\{\delta'_{\frac{\varepsilon}{2}}, \delta''_\varepsilon, \delta'''_\varepsilon, |y-c|\} > 0$

Sei $x \in (a,b)$ mit $0 < |x-c| < \delta_\varepsilon$.

Dann: $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$ nach (***)

Also: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ $\boxed{\varepsilon}$

Bem. 18.26: (Vor. wie in 18.25)

g' stetig $\Rightarrow$ g' stets positiv oder stets negativ

$\Rightarrow$ g ist streng monoton

Bsp. 18.27:

ⓐ $(a,b) = (0,\infty)$, $c = 0$, $f = \sin$, $g = \sqrt{\cdot}$ diffbar & $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$ $\forall x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{\sqrt{x}'} = \lim_{x\to 0} \cos(x) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = \cos(0) \cdot 2 \cdot \sqrt{0} = 0$$

ⓑ $(a,b) = (0,\infty)$, $c = \infty$, $f = \ln$, $g:(0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$

f & g diffbar, $g'(x) = a \cdot x^{a-1} \neq 0 \quad \forall x \in (0,\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln'(x)}{(x^a)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a\cdot x^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{a\cdot x^a}_{>0}}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

C.8) Wachstum der Exponentialfunktion

Korollar 18.28

Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$ ein Polynom über $\mathbb{R}$.

Dann gilt: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = 0$.

D.h. die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Polynomfunktion.

Beweis:

Beob.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ ist diffbar mit $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$

d.h. f' ist auch ein Polynomfkt. mit $\deg(f') = \deg(f) - 1$.

Zeige mit Ind. nach n: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = 0$

$n=0$: $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{\exp(x)} \underset{\text{GWS}}{=} \frac{a_0}{\lim_{x\to\infty} \exp(x)} = \frac{a_0}{\infty} = 0$$

$n-1 \mapsto n$: $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} \underset{18.25}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\exp'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\exp(x)} \underset{\boxed{\text{Ind.}}}{=} 0$$

$\boxed{\xi}$

C.9) Der Satz von Taylor

Def. 18.29

Sei $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$.

ⓐ Ist f n-fach diff.bar in a, dann heißt $T^n_{f,a} := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$ das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt a.

ⓑ Ist f ∞ oft diff.bar in a, dann heißt $T_{f,a} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$ die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt a oder die Taylor-Entwicklung von f in a.

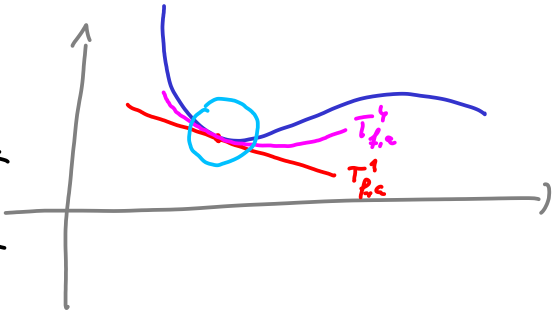
Beachte: $T^n_{f,a}(a) = T_{f,a}(a) = f(a)$.

Bem. 18.30

$$T^1_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = \boxed{f(a) + f'(a) \cdot (x-a) \overset{!}{=} y}$$

optimale lineare Approximation an f in $(a, f(a))$ = Gleichung der Tangente an den Graphen von f in $(a, f(a))$

Idee: $T^n_{f,a}(x)$ ist eine Approximation von $f(x)$ durch ein Polynom vom Grad n



Hoffnung:
- $T^n_{f,a}(x)$ approximiert $f(x)$ nahe bei a besser als $T^1_{f,a}$
- $T_{f,a}(x)$ approximiert $f(x)$ optimal, d.h. $\boxed{T_{f,a}(x) = f(x)}$

Bsp. 18.31

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit KR $r > 0$.

$\Rightarrow$ $f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist ∞ oft diff.bar

mit $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

$\Rightarrow$ $T_{f,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ $\Rightarrow$ $T_{f,0}(x) = f(x)$
$\forall x \in (-r, r)$

Zudem: $(T^n_{f,0})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $(-r, r)$ pktw. gegen f
und auf $[-R, R] \subseteq (-r, r)$ sogar glm.!

Bsp. 18.32

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

Beh: f ist ∞ oft diffbar in $a = 0$
mit $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: ÜA.

Also: $T_{f,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{=0}{f^{(n)}(0)}}{n!} \cdot t^n = 0$ hat KR ∞

$\Rightarrow$ $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}$: $T_{f,0}(x) = 0 \neq \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = f(x)$

Satz von Taylor 18.33

Sei I ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $n+1$-fach diffbar und $x, a \in I$.
Dann gibt es ein c zwischen a und x, so dass

$$f(x) - T^n_{f,a}(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}}_{\text{Restglied des n-ten Taylorpolynoms}}$$

Beweis: O.E.: $x > a$.

Definiere: $z := \dfrac{\left(f(x) - T^n_{f,a}(x)\right)\cdot(n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \in \mathbb{R}$

und $g : [a,x] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := f(x) - T^n_{f,y}(x) - \frac{z}{(n+1)!}\cdot(x-y)^{n+1}$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}\cdot(x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!}\cdot(x-y)^{n+1}$$

$$= f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}\cdot(x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!}\cdot(x-y)^{n+1}$$

Vor $\Rightarrow f$ ist $(n+1)$-fach differbar auf I, also auch auf $[a,x]$

$\Rightarrow g$ ist diffbar auf $[a,x]$

$$\Rightarrow g'(y) = -f'(y) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}\cdot(x-y)^k - k\cdot\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\cdot(x-y)^{k-1}\right) + \frac{z\cdot(n+1)}{(n+1)!}\cdot(x-y)^n$$

$$= -f'(y) - \sum_{k=1}^{n}\left(\underline{\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}}\cdot(x-y)^k - \underline{\frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}}\cdot(x-y)^{k-1}\right) + \frac{z}{n!}\cdot(x-y)^n$$

$$= -\cancel{f'(y)} + \cancel{f'(y)} - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\cdot(x-y)^n + \frac{z}{n!}\cdot(x-y)^n$$

$$= \frac{z}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\cdot(x-y)^n = \underline{\frac{z - f^{(n+1)}(y)}{n!}\cdot(x-y)^n}$$

Zu zeigen: $\cdot\ g(x) = \underbrace{f(x) - f(x)}_{=0} - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{k}(x)}{k!}\cdot\underbrace{(x-x)^n}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \frac{z}{(n+1)!}\cdot\underbrace{(x-x)^{n+1}}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$

$\cdot\ g(a) = f(x) - T^n_{f,a}(x) - \frac{z}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} \underset{\text{Def. von } z}{\overset{\uparrow}{=}} 0$

$\underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow}\ \exists\, c \in (a,x):\ 0 = g'(c) = \dfrac{z - f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\underbrace{(x-c)^n}_{\neq 0}$

$\Longrightarrow f^{(n+1)}(c) = z \Rightarrow f(x) - T^n_{f,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-c)^{n+1}$ $\square$

Bsp. 19.34:

$f = \exp$, $a = 0$, $x = 1$

$$\Rightarrow \quad T^n_{\exp,0}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}\cdot(1-0)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, c \in (0,1): \quad \Big|\exp(\underset{1}{\overset{\shortparallel}{x}}) - T^n_{\exp,0}(\underset{1}{\overset{\shortparallel}{x}})\Big| = \Bigg|\frac{\boxed{\exp^{(n+1)}(c)}}{(n+1)!}\cdot \overbrace{(\underset{1}{\overset{\shortparallel}{x}}-0)^{n+1}}^{=1}\Bigg|$$

$\exp(c) \leq \overset{\overset{e}{\shortparallel}}{\exp(1)}$

$$\Big|e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Big| = \ldots \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

n=6: $\Big|e - \frac{1957}{720}\Big| < \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < \frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$

d.h. e & $\frac{1957}{720}$ stimmen bis zur 3. Nachkommastelle überein

d.h. $e = 2{,}718\ldots.$

Bsp. 18.35:

$\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ∞ oft diffbar mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$\Rightarrow \quad T^n_{\ln,1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}\cdot(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{(x-1)^k}{k}$$

Sei $x \in (1,2]$

$$\xRightarrow[18.33]{\text{Taylor}} \exists\, c \in (1,x) \subseteq (1,2] : \quad \Big|\ln(x) - T^n_{\ln,1}(x)\Big| = \Bigg|\frac{\ln^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-1)^{n+1}\Bigg|$$

$$0 \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{c^{n+1}}}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\underbrace{|x-1|}_{\leq 1}{}^{n+1}}_{\leq 1}$$

$$\begin{tikzcd} \Rightarrow \; T^n_{\ln,1} \arrow[r, "n\to\infty"'] \arrow[d, "n\to\infty"] & \ln \text{ glm. auf } [1,2] \\ T_{\ln,1} \text{ glm. auf } [1,2] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(x) = T_{\ln,1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{(x-1)^k}{k}$$

für alle $x \in [1,2]$

Später: $\ln(x) = T_{\ln,1}(x) \quad \forall x \in (0,2]$

Konkret: $$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{\overbrace{(2-1)^k}^{=1}}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -\ln(2)$$

$\square$

C.10) Allgemeinere Bedingung für Extremstellen

Satz 18.36

Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ n+1-fach stetig diff'bar, $c \in (a,b)$ und $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n)}(c) = 0$ sowie $f^{(n+1)}(c) \neq 0$.

ⓐ n gerade $\Rightarrow$ f hat in c kein Extremum.

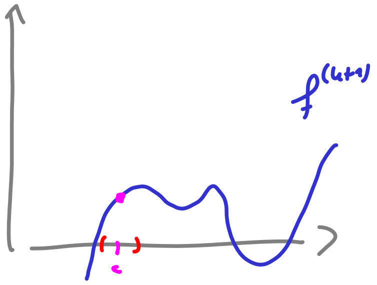
ⓑ n ungerade $\wedge$ $f^{(n+1)}(c) < 0$ $\Rightarrow$ f hat in c ein lokales Maximum.

ⓒ n ungerade $\wedge$ $f^{(n+1)}(c) > 0$ $\Rightarrow$ f hat in c ein lokales Minimum.

Beweis: o.E. $f^{(n+1)}(c) > 0$

Vor. $\Rightarrow$ $f^{(n+1)}$ stetig und $f^{(n+1)}(c) > 0$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) : f^{(n+1)}(x) > 0$



Vor. $\Rightarrow$ $$T^n_{f,c} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{f^{(k)}(c)}^{=0 \text{ für } k>0}}{k!} \cdot (t-c)^k = f(c)$$

Sei $c \neq x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

$\xRightarrow[18.33]{\text{Taylor}}$ $\exists\, d_x$ zwischen x und c: $$f(x) - T^n_{f,c}(x) = \underbrace{\frac{\overset{\nearrow 0}{f^{(n+1)}(d_x)}}{(n+1)!}}_{>0} \cdot (x-c)^{n+1}$$

$$\| \\ f(x) - f(c)$$

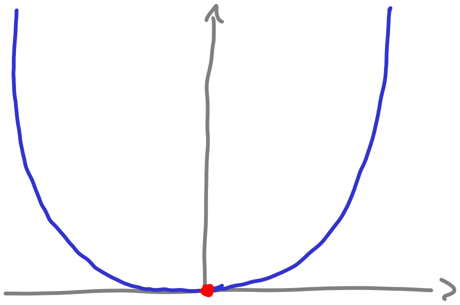
1. Fall: n gerade $\Rightarrow$ $n+1$ ungerade $\Rightarrow$ $(x-c)^{n+1}$ hat in c einen Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ $f(x) - f(c) \begin{cases} < 0, & x \in (c-\varepsilon, c) \\ > 0, & x \in (c, c+\varepsilon) \end{cases}$

$\Rightarrow$ f hat in c keine Extremstelle

2. Fall: n ungerade $\Rightarrow$ $n+1$ gerade $\Rightarrow$ $(x-c)^{n+1} > 0 \quad \forall\, x \neq c$

$\Rightarrow \; f(x) > f(c) \quad \forall \underset{\neq c}{x} \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \; \Rightarrow$ f hat in c ein lokales Minimum.

$\boxed{\xi}$



Bsp. 18.37:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4$

hat in $c=0$ ein globales Minimum

Beachte: $f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$

$f''(0) = 4 \cdot 3 \cdot 0^2 = 0$

$f^{(3)}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 = 0$

$f^{IV}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 0$

$\underset{18.36}{\Longrightarrow}$ f hat in 0 ein lokales Minimum!

Bemerkung 18.38:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$\underset{18.32}{\Longrightarrow}$ f ist ∞ oft diffbar mit $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 0$

Aber: f hat in $c=0$ ein globales Minimum, weil $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

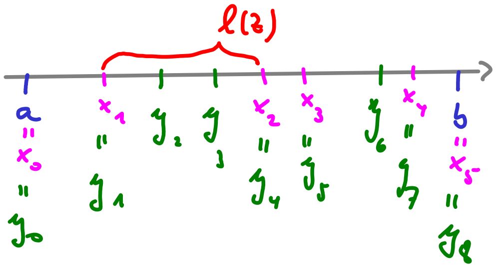
! 18.36 ist hier nicht anwendbar !

§ 19 Das Riemann-Integral

A) Obersummen und Untersummen

Def. 19.1 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

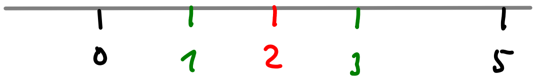
ⓐ
- $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ heißt Zerlegung von $[a,b]$:⟺ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- $\ell(Z) := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$ = Länge von Z
- $\operatorname{supp}(Z) := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ = Träger von Z
- $|Z| := n$ = Mächtigkeit von Z
- $x_0, \dots, x_n$ heißen die Stützpunkte von Z



ⓑ Seien $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $Z' = (y_0, \dots, y_m)$ Zerlegungen von $[a,b]$.
Dann heißt Z' Verfeinerung von Z :⟺ $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \{y_0, \dots, y_m\}$.

ⓒ Seien Z und Z' zwei Zerlegungen.
Dann: $Z * Z' = (z_0, \dots, z_\ell)$, mit $\operatorname{supp}(Z) \cup \operatorname{supp}(Z') = \{z_0, \dots, z_\ell\}$ und $z_0 < \dots < z_\ell$,
heißt gemeinsame Verfeinerung von Z und Z'.

Bsp. 19.2



$$\left.\begin{array}{l} Z = (0, 1, 3, 5) \\ Z' = (0, 2, 5) \end{array}\right\} \text{Zerlegungen von } [0,5]$$

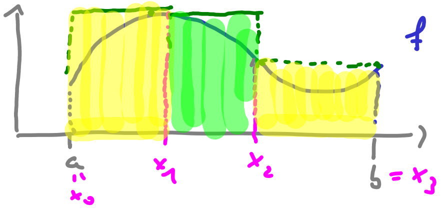
$\Longrightarrow$ $Z * Z' = (0, 1, 2, 3, 5)$ ist Verfeinerung von Z und Z'

Def. 19.3

Sei $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$, $Z = (x_0, \dots, x_n)$ Zerlegung von $[a,b]$

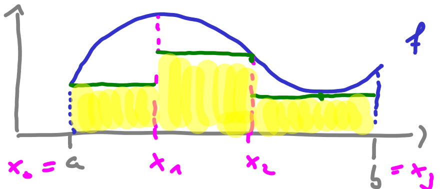
- $OS(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

  = Obersumme von f bzgl. Z

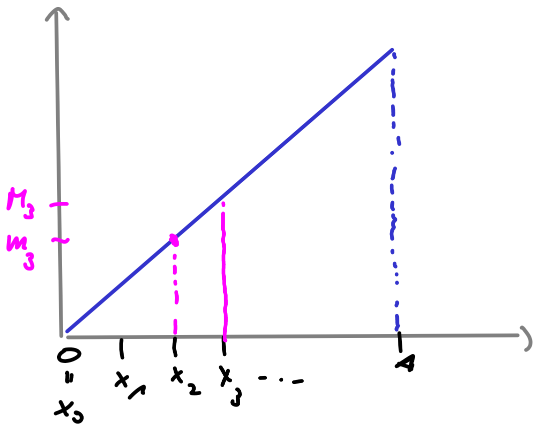


- $US(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

  = Untersumme von f bzgl. Z



Bsp. 19.4:



$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x$$

$$Z^n = (x_0, \dots, x_n) = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\right)$$

= äquidistante Zerlegung von $[0,1]$

$$\Rightarrow [x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

$$\Rightarrow \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \frac{i-1}{n}$$

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \frac{i}{n}$$

$$\Rightarrow \quad US(f, Z^n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \frac{i-1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$OS(f, Z^n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{1}{n}} \cdot M_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Lemma 19.5

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$, $a < b$.

ⓐ Z' Verfeinerung von Z

$$\Rightarrow \cdot \; 0 \leq US(f, Z') - US(f, Z) \leq 2 \cdot M \cdot \ell(Z) \cdot (|Z'| - |Z|)$$

$$\cdot \; 0 \leq OS(f, Z) - OS(f, Z') \leq 2 \cdot M \cdot \ell(Z) \cdot (|Z'| - |Z|)$$

Insbesondere: $US(f, Z) \leq US(f, Z') \leq OS(f, Z') \leq OS(f, Z)$

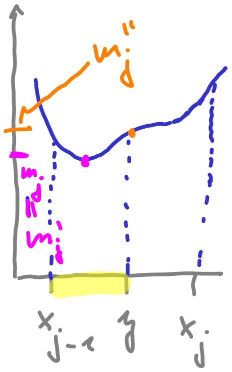
ⓑ Seien Z & Z' sind zwei Zerlegungen von $[a,b]$

$$\Longrightarrow \quad US(f, Z) \leq OS(f, Z')$$

ⓒ Zudem: $-M \cdot (b-a) \leq US(f, Z) \leq OS(f, Z) \leq M \cdot (b-a)$

Beweis:

ⓐ Sei $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.



Ferner sei $Z' = (x_0, \dots, x_{j-1}, y, x_j, \dots, x_n)$.

Setze: $m_j' := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, y]\} \geq m_j$

$m_j'' := \inf\{f(x) \mid x \in [y, x_j]\} \geq m_j$

$$\Rightarrow \; US(f,Z) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (x_j - x_{j-1}) \cdot m_j$$

$$= \sum_{i \neq j} (x_i - x_{j-1}) \cdot m_i + \underset{\wedge|}{(x_i - y) \cdot m_j} + \underset{\wedge|}{(y - x_{j-1}) \cdot m_j}$$

$$\leq \sum_{i \neq j} (x_i - x_{j-1}) \cdot m_i + (x_i - y) \cdot m_j' + (y - x_{j-1}) \cdot m_j''$$

$$= US(f, Z')$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq US(f,Z') - US(f,Z)$$

$$= (x_j - y) \cdot (m_j' - m_j) + (y - x_{j-1}) \cdot (m_j'' - m_j)$$

$$\leq (x_j - y) \cdot (M + M) + (y - x_{j-1}) \cdot (M + M)$$

$$= 2 \cdot M \cdot \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\leq \ell(Z)} \leq 2 \cdot M \cdot \ell(Z) \cdot \underbrace{(|Z'| - |Z|)}_{=1}$$

Wenn $|Z'| - |Z| > 1$, dann mache Induktion mit dem Fall von eben!

Für Obersummen geht das analog!

ⓑ Seien Z e Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$

$$\Rightarrow \quad US(f,Z) \underset{ⓐ}{\leq} US(f, Z * Z') \underset{\substack{\text{Def.}/\\ ⓐ}}{\leq} OS(f, Z * Z') \leq OS(f, Z')$$

ⓒ $\underset{\substack{\shortparallel \\ y_0}}{Z' = (a}, \underset{\substack{\shortparallel \\ y_1}}{b)}$ und $Z = (x_0, \dots, x_n)$ beliebige Zerlegung von $[a,b]$

$$\underset{ⓐ}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{ccccccc} US(f,Z') & \leq & US(f,Z) & \leq & OS(f,Z) & \leq & OS(f,Z') \\ \shortparallel & & & & & & \shortparallel \\ (b-a)\cdot \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} & & & & & & (b-a)\cdot \sup\{f(x) \mid x\in[a,b]\} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & & & \rotatebox{90}{$\geq$} \\ -(b-a)\cdot M = (b-a)\cdot(-M) & & & & & & (b-a)\cdot M \end{array}$$

$\square$

Bsp. 19.6:

f und Z^n wie in 19.4

$$\Rightarrow \quad US(f, Z^n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = OS(f, Z^n)$$

B) Riemann-integrierbare Funktionen

Def. 19.7:

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$.

- $OI(f) := \inf\{OS(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$
  = Oberintegral von f
- $UI(f) := \sup\{US(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$
  = Unterintegral von f
- $8.19 \Rightarrow UI(f) \leq OI(f)$
- f heißt Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ $:\Leftrightarrow$ $UI(f) = OI(f)$

  Dann heißt zudem $\int_a^b f(x)\,dx := OI(f)$ das Integral von f auf $[a,b]$.

Bsp. 19.8:

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x$ und $Z^n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = US(f, Z^n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, Z^n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$\big\downarrow n \to \infty$ $\qquad\qquad$ $\big\downarrow n \to \infty$

$\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq UI(f) \leq OI(f) \leq \frac{1}{2} \quad \Leftarrow$$

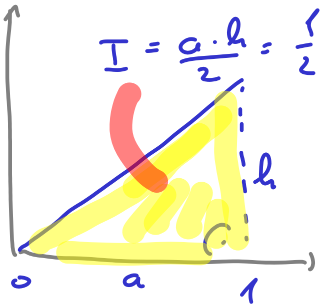
$$\Downarrow$$

$$UI(f) = OI(f) = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

f ist Riemann-int. auf [0,1

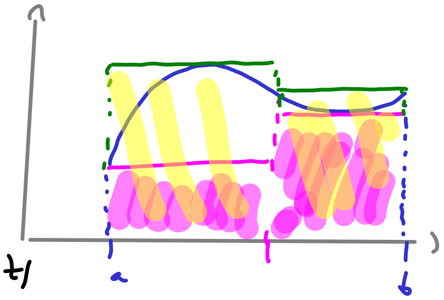
mit $\int_0^1 x \, dx = OI(f) = \frac{1}{2}$



Bem. 19.9:

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0 \ \forall x$ und beschränkt!

Sei $I :=$ Flächeninhalt, den Graph von f mit x-Achse einschließt



$$\Rightarrow \forall Z : \quad US(f, Z) \leq I \leq OS(f, Z)$$

$$\Downarrow$$

$$UI(f) \leq I \leq OI(f)$$

$$\Downarrow \ f \text{ R-int.}$$

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

Bsp. 19.10:

ⓐ $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c$

$\Rightarrow$ $Z = (x_0, \dots, x_n)$ Zerlegung von $[a,b]$

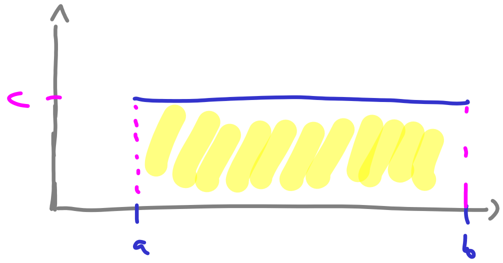
$\rightsquigarrow$ $OS(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b-a)$

$\shortparallel$

$US(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c$

$\Rightarrow$ $OI(f) = UI(f) = c \cdot (b-a)$

$\Rightarrow$ f ist R.-int. mit $\int_a^b c \, dx = c \cdot (b-a)$



ⓑ $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Dirichlet'sche Sprungfunktion

ist beschränkt

Sei $Z = (x_0, \dots, x_n)$ Zerlegung von $[0,1]$.

$\Rightarrow$ $US(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{=0} = 0$

$\boxed{[x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \neq 0}$

$OS(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{=1} = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{(x_n - x_0)}}$

$\boxed{([x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \neq \emptyset}$

$\Rightarrow$ $UI(f) = 0 \neq 1 = OI(f)$

$\Rightarrow$ f ist nicht Riemann-integrierbar!

C) Das Riemannsche Integrabilitätskriterium

Satz 19.11 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ beschränkt, $a<b$.

Dann: f ist integrierbar auf $[a,b]$

$\iff$ $\forall \varepsilon>0\ \exists\ Z=$ Zerlegung von $[a,b]$: $OS(f,Z)-US(f,Z)<\varepsilon$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon>0$.

- $$OI(f)=\inf\overbrace{\{OS(f,Z)\mid Z=\text{Zerl. von }[a,b]\}}^{=:A}$$

$\Rightarrow$ $OI(f)$ ist die größte untere Schranke von A

$\Rightarrow$ $OI(f)+\frac{\varepsilon}{2}$ ist keine untere Schranke von A

$\Rightarrow$ $\exists\ Z'=$ Zerl von $[a,b]$: $OS(f,Z')<OI(f)+\frac{\varepsilon}{2}$

- $$UI(f)=\sup\underbrace{\{US(f,Z)\mid Z=\text{Zerl von }[a,b]\}}_{=:B}$$

$\Rightarrow$ $UI(f)$ ist die kleinste obere Schranke von B

$\Rightarrow$ $UI(f)-\frac{\varepsilon}{2}$ ist keine obere Schranke von B

$\Rightarrow$ $\exists\ Z''=$ Zerl. von $[a,b]$: $US(f,Z'')>UI(f)-\frac{\varepsilon}{2}$

- Setze: $Z:=Z'*Z''$

$$\Rightarrow OS(f,Z)-US(f,Z)\leq OS(f,Z')-US(f,Z'')$$

$$<\left(OI(f)+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(\underbrace{UI(f)}_{f\text{ integrierbar}\ \rightsquigarrow\ \overset{\|}{OI(f)}}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

"$\Leftarrow$" Setze: $\varepsilon:=\frac{1}{n}>0$ $\Longrightarrow$ $\exists\ Z^n=$ Zerl. von $[a,b]$: $OS(f,Z^n)-US(f,Z^n)<\frac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \underset{\substack{\downarrow n\to\infty\\ 0}}{\frac{1}{n}} > OS(f,Z^n)-US(f,Z^n)\geq\underbrace{OI(f)-UI(f)}_{\Longrightarrow\ \substack{\downarrow n\to\infty\\ 0}\ \Longleftarrow}\geq\underset{\substack{\downarrow n\to\infty\\ 0}}{0}\quad\Downarrow\quad OI(f)=UI(f)\ \square$$

Lemma 19.12

Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$, $a<b$.

Dann: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0 : \forall Z$ = Zerl. von $[a,b]$ mit $\ell(Z)<\delta_\varepsilon$ gilt: $OS(f,Z)-US(f,Z)<\varepsilon$

Beweis:

Sei $\varepsilon>0$ gegeben.

RIK 19.11 $\Rightarrow$ $\exists\ Z'$ = Zerl. von $[a,b]$: $OS(f,Z')-US(f,Z')<\varepsilon$ ⊛

Setze: $\delta_\varepsilon := \dfrac{\varepsilon}{8\cdot|Z'|\cdot M} > 0$, wobei $M := \sup\{|f(x)| \mid x\in[a,b]\}$

Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\ell(Z)<\delta_\varepsilon$.

$$\Rightarrow OS(f,Z)-US(f,Z) = \underbrace{OS(f,Z)-OS(f,Z*Z')}_{<\frac{\varepsilon}{4}\ ①} + \underbrace{OS(f,Z*Z')-US(f,Z*Z')}_{<\frac{\varepsilon}{2}\ ②} + \underbrace{US(f,Z*Z')-US(f,Z)}_{<\frac{\varepsilon}{4}\ ③} < \varepsilon$$

zu ②: $OS(f,Z*Z')-US(f,Z*Z') \leq OS(f,Z')-US(f,Z') \underset{⊛}{<} \frac{\varepsilon}{2}$

zu ①: $OS(f,Z)-OS(f,Z*Z') \underset{19.5}{\leq} 2\cdot M\cdot \underbrace{\ell(Z)}_{<\delta_\varepsilon}\cdot\big(\underbrace{|Z*Z'|-|Z|}_{\leq |Z'|}\big) < 2\cdot M\cdot|Z'|\cdot\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$

zu ③: $US(f,Z*Z')-US(f,Z) \underset{19.5}{\leq} 2\cdot M\cdot \underbrace{\ell(Z)}_{<\delta_\varepsilon}\cdot\big(\underbrace{|Z*Z'|-|Z|}_{\leq |Z'|}\big) < 2\cdot M\cdot|Z'|\cdot\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$

$\square$

D) Zwei Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 19.13

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f integrierbar auf $[a,b]$

Beweis:

Beachte: f stetig auf $[a,b]$ $\overset{14.15}{\Rightarrow}$ f ist beschränkt

$\underset{14.28}{\hookrightarrow}$ f ist glm. stetig auf $[a,b]$ ⊛

Sei $\varepsilon>0$ gegeben.

$$(*) \Longrightarrow \exists\, \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}} > 0 : \forall x,y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| < \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}} \text{ gilt: } |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (**)$$

Wähle eine Zerlegung $\underset{(x_0,\dots,x_n)}{\overset{}{Z}}$ von $[a,b]$ mit $\ell(Z) < \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$.

Vor. $\Rightarrow$ f ist stetig auf $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Rightarrow \exists\, y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i] : f(y_i) = \sup\{|f(x)| \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$\text{und } f(z_i) = \inf\{|f(x)| \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\Rightarrow |y_i - z_i| \le |x_i - x_{i-1}| \le \ell(Z) < \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}} \underset{(**)}{\Longrightarrow} 0 \le f(y_i) - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow OS(f,Z) - US(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{\big(f(y_i) - f(z_i)\big)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

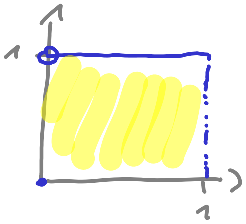
$$< \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \boxed{\frac{\varepsilon}{b-a}} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (\underset{b}{x_n} - \underset{a}{x_0}) = \varepsilon$$

Damit: f integrierbar wegen 19.11. (RIK). $\square$

Bsp. 19.14:

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$ ist nicht stetig in 0.

Setze: $Z^n := (0, \frac{1}{n}, 1)$ ist eine Zerlegung von $[0,1]$, $n \geq 1$.



$$\Rightarrow US(f,Z^n) = (\tfrac{1}{n} - 0) \cdot 0 + (1 - \tfrac{1}{n}) \cdot 1 = 1 - \tfrac{1}{n}$$
$$OS(f,Z^n) = (\tfrac{1}{n} - 0) \cdot 1 + (1 - \tfrac{1}{n}) \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} = US(f,Z^n) \le & & UI(f) & \le & OI(f) & \le & OS(f,Z^n) = 1 \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & \Longrightarrow & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & \Longleftarrow & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = 1$$

$\Rightarrow$ f ist integrierbar auf $[0,1]$ mit $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

Satz 19.15

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ monoton $\Longrightarrow$ f ist integrierbar auf $[a,b]$

Beweis: o.E. f ist monoton wachsend

$\Rightarrow \forall x\in[a,b]: \quad f(a)\le f(x)\le f(b) \quad \Rightarrow$ f ist beschränkt

1. Fall: f konstant $\Longrightarrow$ f ist integrierbar

2. Fall: f nicht konstant $\Longrightarrow$ $f(a)<f(b)$ $\Rightarrow$ $f(b)-f(a)>0$

Sei $\varepsilon>0$ gegeben.

$$\Rightarrow \exists\, n\geq 1: \quad \frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{(b-a)\cdot(f(b)-f(a))} \qquad (*)$$

Setze: $Z=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ mit $x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$ für $i=0,\dots,n$

$$\Rightarrow OS(f,Z)-US(f,Z)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{=\frac{b-a}{n}}\cdot\Big(\underbrace{\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}}_{=f(x_i)}-\underbrace{\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}}_{=f(x_{i-1})}\Big)$$

$$=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)=\frac{b-a}{n}\cdot\big(\underset{\substack{\shortparallel\\ f(b)}}{f(x_n)}-\underset{\substack{\shortparallel\\ f(a)}}{f(x_0)}\big)$$

$$=\frac{1}{n}\cdot(b-a)\cdot\big(f(b)-f(a)\big)\underset{(*)}{<}\frac{\varepsilon}{(b-a)\cdot(f(b)-f(a))}(b-a)\cdot(f(b)-f(a))=\varepsilon$$

$\underset{\substack{19.11\\ \text{RIK}}}{\Rightarrow}$ f ist integrierbar auf $[a,b]$ $\square$

Bsp. 19.16)

19.14 $\rightsquigarrow$ $f:[0,1]\to\mathbb{R}: x\longmapsto\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 1\end{cases}$ ist monoton, also integrierbar nach 19.15

ABER: 19.15 liefert nicht den Wert von $\int_0^1 f(x)\,dx$!!!

E) Riemannsche Zwischensummen

Def. 19.17

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $a<b$, $Z=(x_0,\dots,x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$.

Gilt für $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ stets $\alpha_i\in[x_{i-1},x_i]$, dann heißt

$$ZS(f,Z,\alpha) := \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot f(\alpha_i)$$

die Riemannsche Zwischensumme von f bzw. der Zerlegung Z und den Zwischenpunkten α.

Lemma 19.18

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $a<b$, $Z=$ Zerl. von $[a,b]$ und $\varepsilon>0$.

ⓐ $\exists\,\alpha$ ZWP von Z, so dass $0\leq OS(f,Z)-ZS(f,Z,\alpha)<\varepsilon$

ⓑ $\exists\,\beta$ ZWPe von Z, so dass $0\leq ZS(f,Z,\beta)-US(f,Z)<\varepsilon$

Beweis:

ⓐ Sei $Z=(x_0,\dots,x_n)$.

Setze: $M_i := \sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$

$\Rightarrow M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$ ist kein obere Schranke für $\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$

$\Rightarrow \exists\,\alpha_i\in[x_{i-1},x_i]:\ f(\alpha_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow M_i-f(\alpha_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}$ ⊛

Setze: $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$$\Rightarrow \underset{0\leq}{OS(f,Z)-ZS(f,Z,\alpha)} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\Big(\overbrace{\underbrace{M_i-f(\alpha_i)}_{\overset{⊛}{<}\frac{\varepsilon}{b-a}}}^{\geq 0}\Big)$$

$$< \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\boxed{\frac{\varepsilon}{b-a}} = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(\underset{b}{\underset{\shortparallel}{x_n}}-\underset{a}{\underset{\shortparallel}{x_0}}) = \varepsilon$$

ⓑ Analog. $\square$

F) Riemannsches Folgenkriterium für Integrierbarkeit

Satz 19.19

Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ beschränkt, $a<b$ und $I\in\mathbb{R}$.

Dann sind gleichwertig:

ⓐ f ist integrierbar auf $[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = I$

ⓑ $\forall\ ((Z^n,\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit ZwPen mit $\ell(Z^n)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

gilt: $ZS(f,Z^n,\alpha^n)\xrightarrow[n\to\infty]{} I$

Beweis:

ⓐ ⟹ ⓑ: Sei f integrierbar mit $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Sei zudem $((Z^n,\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Zerl. von $[a,b]$ mit ZwPen,

so dass: $\ell(Z^n)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Sei $\varepsilon>0$ gegeben.

Z.z.: $\exists\, n_\varepsilon : \forall n\geq n_\varepsilon : |ZS(f,Z^n,\alpha^n) - I| < \varepsilon$

(d.h. $ZS(f,Z^n,\alpha^n)\xrightarrow[n\to\infty]{} I$).

Vor. $\Rightarrow$ f integrierbar $\underset{19.12}{\Longrightarrow}$ $\exists\,\delta_\varepsilon>0 : \forall Z =$ Zerl. von $[a,b]$ mit $\ell(Z)<\delta_\varepsilon$

gilt: $OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$ ⊛

Vor. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\ell(Z^n)=0 \Rightarrow \exists\, n_{\delta_\varepsilon} : \forall n\geq n_{\delta_\varepsilon} : \ell(Z^n) = |\ell(Z^n)-0| < \delta_\varepsilon$

Setze: $n_\varepsilon := n_{\delta_\varepsilon}$. Sei nun $n\geq n_\varepsilon$.

$$\begin{array}{l} \Rightarrow\ ZS(f,Z^n,\alpha^n) - I \leq OS(f,Z^n) - \overset{UI(f)}{\overset{\shortparallel}{I}} \leq OS(f,Z^n) - US(f,Z^n) \overset{\circledast}{<} \varepsilon \\ \qquad\quad \rotatebox{-90}{$\geq$} \\ \qquad US(f,Z^n) - \overset{OI(f)}{\overset{\shortparallel}{I}} \geq US(f,Z^n) - OS(f,Z^n) \underset{\circledast}{>} -\varepsilon \end{array}$$

$\Rightarrow |ZS(f,Z^n,\alpha^n) - I| < \varepsilon$

ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ: Für $n \geq 1$ setze: $Z^n = (x_0, \dots, x_n)$ mit $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} l(Z^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$$

Zeige: $\lim_{n\to\infty} OS(f, Z^n) = I$

Sei $\varepsilon > 0$.

z.z.: $\exists\, n_\varepsilon : \forall\, n \geq n_\varepsilon : |OS(f,Z^n) - I| < \varepsilon$

Zu festem n gibt es nach 19.18 ZWP α^n von Z^n

s.d.: $OS(f,Z^n) - ZS(f,Z^n,\alpha^n) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\circledast$

Vor. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} ZS(f, Z^n, \alpha^n) = I$

$\Rightarrow \exists\, n_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall\, n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}} : |ZS(f,Z^n,\alpha^n) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ (**)

Setze: $n_\varepsilon := n_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Sei $n \geq n_\varepsilon$ gegeben

$$\Rightarrow |OS(f,Z^n) - I| \leq \underbrace{|OS(f,Z^n) - ZS(f,Z^n,\alpha^n)|}_{\overset{\circledast}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|ZS(f,Z^n,\alpha^n) - I|}_{\overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Analog: $\lim_{n\to\infty} US(f,Z^n) = I$

Damit:

$$\begin{tikzcd}
US(f,Z^n) \arrow[d, "n\to\infty"] & \leq & UI(f) \arrow[d, "n\to\infty"] & \leq & OI(f) \arrow[d, "n\to\infty"] & \leq & OS(f,Z^n) \arrow[d, "n\to\infty"] \\
I & \Rightarrow & I & & I & \Leftarrow & I
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = I \quad \Rightarrow f$ integrierbar mit $\int_a^b f(x)dx = I$

⊠

Bsp. 19.20:

$f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ mit $b > 0$

$\Rightarrow f$ stetig $\Rightarrow f$ integrierbar

Setze: $Z^n := (x_0, \dots, x_n)$ mit $x_i := i \cdot \frac{b}{n} =: \alpha_i$

$$\Rightarrow \quad \ell(Z^n) = \frac{b}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underset{19.19}{\Rightarrow} \quad ZS(f, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow \int_0^b f(x)\,dx$$

$$\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{b}{n}} \cdot \underbrace{f(\alpha_i)}_{\overset{\|}{x_i^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot \left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}^{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \ \| \ \text{Induktion}}$$

$$\|$$

$$\frac{b^3}{3} \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{b^3}{3} \cdot \underset{\overset{\downarrow}{1}}{(1+\tfrac{1}{n})} \cdot \underset{\overset{\downarrow}{1}}{(1+\tfrac{1}{2n})} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$$

G) Rechenregeln für Integrale – Linearität + Monotonie

Kor. 19.21

Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $a < b$, und seien $c, d \in \mathbb{R}$.

ⓐ $c \cdot f + d \cdot g$ ist integrierbar mit $\int_a^b (c\cdot f + d\cdot g)(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx + d \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

ⓑ Wenn $f(x) \le g(x) \ \forall x \in [a,b]$, dann: $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Beweis:

ⓐ Beachte: $Z = (x_0, \dots, x_n)$ = Zerl. von $[a,b]$ mit ZWPen α

$$\Rightarrow ZS(c\cdot f + d\cdot g, Z, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(c \cdot f(\alpha_i) + d \cdot g(\alpha_i) \right)$$

$$(*) \quad = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i) + d \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot g(\alpha_i) = c \cdot ZS(f, Z, \alpha) + d \cdot ZS(g, Z, \alpha)$$

Sei $((Z^n, \alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit ZwPkt, so dass $\ell(Z^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\begin{tikzcd}
\Rightarrow ZS(c\cdot f+d\cdot g, Z^n, \alpha^n) \underset{\circledast}{=} c\cdot & ZS(f, Z^n, \alpha^n) \arrow[d, "19.19"', "n\to\infty"] & + \; d\cdot & ZS(g, Z^n, \alpha^n) \arrow[d, "19.19"', "n\to\infty"] \\
& \int_a^b f(x)\,dx & & \int_a^b g(x)\,dx \\
\text{unabhängig von } ((Z^n,\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}} \arrow[rr, squiggly] & & c\cdot\int_a^b f(x)\,dx + d\cdot\int_a^b g(x)\,dx \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
& & &
\end{tikzcd}$$

$\overset{19.19}{\Rightarrow}$ $c\cdot f+d\cdot g$ integrierbar mit $\int_a^b (c\cdot f+d\cdot g)(x)\,dx$

ⓑ Sei $((Z^n, \alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Zerl. von $[a,b]$ mit ZwPkt, s.d. $\ell(Z^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \longleftarrow ZS(f, Z^n, \alpha^n) \underset{\overset{\wr}{\boxed{f(\alpha_i)\le g(\alpha_i)\ \forall i}}}{\le} ZS(g, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$\square$

Bsp. 19.22:

$$\int_0^b 3x^2+5\,dx = 3\cdot\int_0^b x^2\,dx + \int_0^b 5\,dx = 3\cdot\frac{b^3}{3} + 5\cdot b = b^3+5b$$

H) Rechenregeln für Integrale – Additivität

Bemerkung 19.23

- $Z' = (x_0, \dots, x_n)$ Zerleg. von $[a,c]$
 $Z'' = (y_0, \dots, y_m)$ " " $[c,b]$ $\Big\} \Rightarrow Z' * Z'' = (x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ Zerl. von $[a,b]$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ZWPe von Z'
 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ZWPe von Z'' $\Big\} \Rightarrow \alpha \sqcup \beta := (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$ ZWPe von $Z' * Z''$
- Offensichtlich: $OS(f, Z' * Z'') = OS(f, Z') + OS(f, Z'')$

$$US(f, Z' * Z'') = US(f, Z') + US(f, Z'')$$

$$ZS(f, Z' * Z'', \alpha \cup \beta) = ZS(f, Z', \alpha) + ZS(f, Z'', \beta)$$

Prop. 19.24

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$, und $c \in (a,b)$.

Dann: f ist auf $[a,b]$ integrierbar

$\iff$ f ist auf $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar

Zudem gilt dann: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Beweis:

"$\Leftarrow$" Sei f integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$\Rightarrow$ • $\exists\, Z' =$ Zerl. von $[a,c]$: $OS(f,Z') - US(f,Z') < \frac{\varepsilon}{2}$

• $\exists\, Z'' =$ " " $[c,b]$: $OS(f,Z'') - US(f,Z'') < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ $Z := Z' * Z''$ ist Zerl von $[a,b]$ mit

$$OS(f,Z) - US(f,Z) = (OS(f,Z') + OS(f,Z'')) - (US(f,Z') + US(f,Z''))$$

$$= \underbrace{OS(f,Z') - US(f,Z')}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{OS(f,Z'') - US(f,Z'')}_{< \varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

f int. auf $[a,b]$

$\Uparrow$ 19.11 (3)4

"$\Rightarrow$": Sei f integrierbar auf $[a,b]$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$\overset{}{\underset{19.11}{\Rightarrow}} \quad \exists \; \underset{\substack{\shortparallel \\ (x_0,\dots,x_n)}}{Z} = \text{Zerl. von } [a,b] \; : \quad OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$$

O.E.: $c = x_j$ Stützpunkt von Z (sonst verfeinern mit c)

Setze: $Z' := (x_0, \dots, x_j)$ = Zerl. von $[a,c]$

$Z'' := (x_j, \dots, x_n)$ = " " $[c,b]$

$$\Rightarrow \quad Z = Z' * Z''$$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{OS(f,Z') - US(f,Z')}^{\geq 0} + \overbrace{OS(f,Z'') - US(f,Z'')}^{\geq 0}$$

$$= OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad OS(f,Z') - US(f,Z') < \varepsilon \quad \text{und} \quad OS(f,Z'') - US(f,Z'') < \varepsilon$$

$$\overset{\text{RIK}}{\underset{19.11}{\Rightarrow}} \quad f \text{ integrierbar auf } [a,c] \text{ und } [c,b].$$

Zum Beweis der Integralwerte:

Wähle eine Folge $((Z'^n, \alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerl. von $[a,c]$ mit ZwPu

und " " $((Z''^n, \beta^n))_{n\in\mathbb{N}}$ " " " $[c,b]$ " ",

so dass: $\ell(Z'^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und $\ell(Z''^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Setze: $Z^n := Z'^n * Z''^n$ und $\gamma^n := \alpha^n \sqcup \beta^n$

ist Zerl. von $[a,b]$ mit ZwPu

Zudem: $\ell(Z^n) = \max\{\ell(Z'^n), \ell(Z''^n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \int_a^b f(x)\,dx}}{ZS(f,Z^n,\gamma^n)} \; \underset{19.23}{=} \; \underset{\substack{\downarrow \\ \int_a^c f(x)\,dx}}{ZS(f,Z'^n,\alpha^n)} + \underset{\substack{\downarrow \\ \int_c^b f(x)\,dx}}{ZS(f,Z''^n,\beta^n)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{!}{=\!=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bsp. 19.25 $0 < a < b \Rightarrow$

$$\int_0^b x^2\,dx = \int_0^a x^2\,dx + \int_a^b x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

I) Rechenregeln für Integrale – Δ-Ungleichung

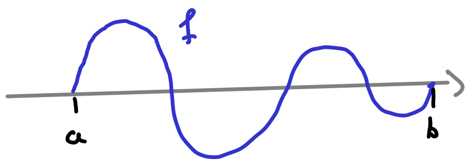
Prop. 19.26

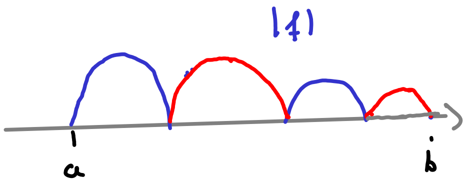
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $a < b$

Dann: $|f|$ ist integrierbar auf $[a,b]$ mit $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

!!

"Flächeninhalt, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt"

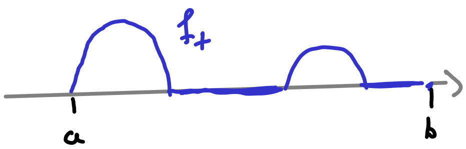




Beweis:

Definiere: $f_+ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |f| = 2 \cdot f_+ - f$



Zeige: f_+ ist integrierbar auf $[a,b]$

(dann automatisch $|f| = 2 \cdot f_+ - f$ integrierbar nach 19.24)

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Vor. $\Rightarrow$ f integrierbar auf $[a,b]$

$\overset{\text{RIK}}{\underset{19.11}{\Longrightarrow}}$ $\exists\, Z \overset{(x_0,\dots,x_n)}{=}$ Zerl. von $[a,b]$; $OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$

Zeige: $\forall\, I \subseteq [a,b]$: $\left.\begin{aligned} &\sup\{f_+(x) \mid x\in I\} - \inf\{f_+(x) \mid x \in I\} \\ &\leq \sup\{f(x) \mid x\in I\} - \inf\{f(x)\mid x\in I\}\end{aligned}\right\}$ ⊛

1. Fall: $\forall\, x \in I : f(x) < 0$

$\Rightarrow f_+(x) = 0 \;\forall x \in I$ $\Rightarrow$ linke Seite in ⊛ $= 0$

Aber: rechte Seite ≥ 0 $\Rightarrow$ ⊛

2. Fall: $\forall\, x\in I : f(x) \geq 0$ $\Rightarrow f_+ \equiv f$ auf I $\Rightarrow$ ⊛

3. Fall: $\exists\, y, z \in I : f(y) < 0 \leq f(z)$

$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \sup\{f_+(x) \mid x\in I\} = \sup\{f(x) \mid x \in I\} \text{ und} \\ &\inf\{f_+(x)\mid x\in I\} = 0 > \inf\{f(x) \mid x\in I\}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$ ⊛

Damit:

$$OS(f_+,Z) - US(f_+,Z) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\cdot\left(\sup\{f_+(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\} - \inf\{f_+(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\}\right)$$

$$\underset{⊛}{\leq} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\cdot\left(\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\} - \inf\{f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\right)$$

$$= OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f_+ int. auf $[a,b]$ nach 19.11 RIK

Noch zu zeigen: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Beachte: $\underset{(x_0,\dots,x_n)}{Z}$ = Zerlegung von $[a,b]$ mit ZWPen α

$$\Rightarrow \left|ZS(f,Z,\alpha)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0}\cdot f(\alpha_i)\right| \overset{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\cdot|f(\alpha_i)| = ZS(|f|,Z,\alpha)$$

Sei nun $((Z^n, \alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Zerl. von $[a,b]$ mit ZwPu,

so daß $\ell(Z^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \left| ZS(f, Z^n, \alpha^n) \right| \arrow[d, "n\to\infty"] & \underset{(**)}{\le} & ZS(|f|, Z^n, \alpha^n) \arrow[d, "n\to\infty"] \\ \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| & \underset{!}{\le} & \int_a^b |f(x)|\,dx \end{tikzcd}$$

$\Box$

Bem. 19.27:

Additivität $\Rightarrow$ f int. auf $[a,b]$ und $a < c < d < b$

$\Rightarrow$ f int. auf $[c,d]$

Setze: $\int_c^c f(x)\,dx := 0$

$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$ falls $a > b$

Können darauf verzichten, dass untere Integralgrenze kleiner ist!

$\rightarrow$ Linearität + Additivität verallgemeinern sich!

§ 20 Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung + Anwendungen

A) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Def. 20.1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann: $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f

$:\iff$ F ist differenzierbar auf I mit $F' = f$.

Prop. 20.2

Seien $F, G : I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von $f: I \to \mathbb{R}$, I Intervall.

Dann: $\exists\, c \in \mathbb{R} : \forall\, x \in I : F(x) = G(x) + c$

Beweis:

Wähle $a \in I$ fest. Setze: $c := F(a) - G(a)$.

Sei nun $b \in I \setminus \{a\}$, o.E.: $a < b$

z.z.: $F(b) = G(b) + c$

Vor. $\Rightarrow$ $F - G$ ist diffbar auf $[a,b] \subseteq I$, also auch stetig

und $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$

$\underset{16.11}{\Rightarrow}$ $F - G$ ist konstant auf $[a,b]$

$\Rightarrow$ $c = F(a) - G(a) = F(b) - G(b)$ $\Rightarrow$ $F(b) = G(b) + c$

$\square$

Bsp. 20.3:

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ hat die Stammfkt. $F: [0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{3}$,

da $F'(x) = 3 \cdot \frac{x^{3-1}}{3} = x^2 = f(x)$ $\forall\, x \in [0,\infty)$

Bemerke: 19.20 $\Rightarrow$ $\int_0^y f(x)\,dx = \int_0^y x^2\,dx = \frac{y^3}{3} = F(y)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$.

Dann ist $F: I \to \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^y f(x)\,dx$ eine Stammfunktion von f.

Beweis: Sei $c \in I$.

Zu zeigen: F ist diff.bar in c mit $F'(c) = f(c)$

d.h. $$\lim_{y \to c} \frac{F(y) - F(c)}{y - c} = f(c)$$

Sei $\varepsilon > 0$.

z.z.: $\exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall y \in I$ mit $0 < |y - c| < \delta_\varepsilon$ gilt: $\left| \frac{F(y) - F(c)}{y - c} - f(c) \right| < \varepsilon$

Vor. $\Rightarrow$ f stetig in c

$\Rightarrow\ \exists\, \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0 : \forall x \in I$ mit $|x - c| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt: $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ⊛

Setze: $\delta_\varepsilon := \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$.

Sei $y \in I$ mit $0 < |y - c| < \delta_\varepsilon = \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

$$\Rightarrow \left| \frac{F(y) - F(c)}{y - c} - f(c) \right| = \left| \frac{1}{y-c} \cdot \Big(\underbrace{\int_a^y f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx}_{= \int_c^y f(x)\,dx} \Big) - f(c) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{y-c} \cdot \int_c^y f(x)\,dx - \frac{\overbrace{f(c) \cdot (y - c)}^{\int_c^y f(c)\,dx}}{y - c} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{y-c} \right| \cdot \left| \int_c^y f(x)\,dx - \int_c^y f(c)\,dx \right| = \left| \frac{1}{y-c} \right| \cdot \left| \int_c^y f(x) - f(c)\,dx \right|$$

$$\underset{19.26}{\leq} \left| \frac{1}{y-c} \right| \cdot \left| \int_c^y \underbrace{|f(x) - f(c)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}\,dx \right| \underset{⊛}{\leq} \left| \frac{1}{y-c} \right| \cdot \left| \overbrace{\int_c^y \frac{\varepsilon}{2}\,dx}^{= \frac{\varepsilon}{2} \cdot (y - c)} \right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

Korollar 20.5 (HDIR)

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f.

Dann, $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis:

20.2 + 20.4 $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}: \forall\, y \in [a,b]: F(y) = \int_a^y f(x)dx + c$

$\Rightarrow F(a) = \int_a^a f(x)\,dx + c = 0 + c = c$

$\Rightarrow F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + c = \int_a^b f(x)\,dx + F(a) \Rightarrow$ Beh.

$\square$

Bem. 20.6:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig.

ⓐ HDIR $\Rightarrow$ Differentiation ist Umkehrung der Integration

ⓑ Sei F eine Stammfkt. von f, $a,b \in I$.

Notation: $F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

ⓒ $\int f(x)\,dx$ heißt ein unbestimmtes Integral

und $F := \int f(x)\,dx$, d.h. $F(y) = \int^y f(x)\,dx$, bezeichnet eine beliebige Stammfkt. von f.

B) Stammfunktionen durch Ableiten ablesen

Bsp. 20.7 (einige ausgewählte Stammfkt.)

f	$F = \int f(x)\,dx$
$\exp$	$\exp$
$\exp_a$, $a \neq 1$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \exp_a$
$\cos$	$\sin$
$\sin$	$-\cos$

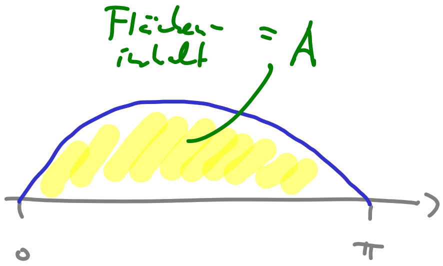
f	$F = \int f(x)\,dx$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\ln$
$x \mapsto x^a$, $a \neq -1$	$x \mapsto \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$	$\arctan$
$\frac{1}{\cos^2}$	$\tan$

Bsp. 20.8:

$$A = \int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$

$$\parallel$$

$$1 + 1 = 2$$

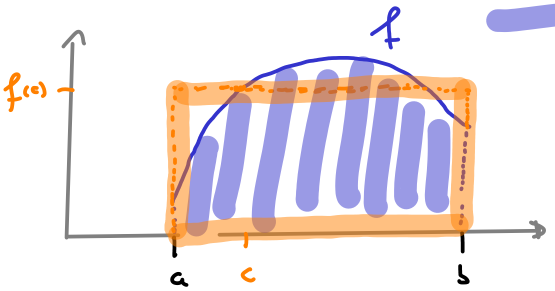


C) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Korollar 20.9

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a < b$.

Dann: $\exists\ c \in (a,b) : \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$.



Beweis:

HDIR $\Rightarrow$ $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} ; y \longmapsto \int_a^y f(x)\,dx$ ist Stammfkt von f

$\Rightarrow$ F ist diffbar auf $[a,b]$ mit $F' = f$

$\Rightarrow$ F ist stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b)

$$\underset{\text{MDR}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (a,b) : \quad F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{Df.}}{=} F(b) - \underbrace{F(a)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = F'(c)\cdot(b-a) = f(c)\cdot(b-a)$$

$\square$

D) Partielle Integration

Satz 20.11:

Seien $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar.

Dann:
$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx.$$

Beweis:

$$\text{PR} \Rightarrow (u\cdot v)' = u\cdot v' + u'\cdot v$$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \int_a^b (u\cdot v)'(x)\,dx - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$\underset{\text{HDIR}}{=} u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx.$$

$\square$

Bem. 20.12:

Partielle Integration $\hat{=}$ Umkehrung der Produktregel.

Bsp. 20.13

$$\int^y \cos^2(x)\,dx = \int^y \underset{\overset{\shortparallel}{u(x)}}{\cos(x)}\cdot\underset{\overset{\shortparallel}{v'(x)}}{\cos(x)}\,dx \overset{20.11}{=} u(x)\cdot v(x)\Big|^y - \int^y u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$= \cos(x)\cdot\sin(x)\Big|^y - \int^y(-\sin(x))\cdot\sin(x)\,dx = \cos(x)\cdot\sin(x)\Big|^y + \int^y \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)}\,dx$$

$$= \cos(x)\cdot\sin(x)\Big|^y + \int^y 1-\cos^2(x)\,dx = \cos(x)\cdot\sin(x)\Big|^y + \int^y 1\,dx - \int^y \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\cdot\int^y \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\cdot\sin(x)\Big|^y + \underbrace{\int^y 1\,dx}_{=x|^y} \Rightarrow \int^y \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos(y)\cdot\sin(y) + y\right)$$

E) Der Satz von Taylor

Korollar 20.14 (Restglied in Integralform)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ $n+1$-fach stetig diff.bar, $x, a \in I$.

Dann: $$f(x) - T^{n}_{f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n \, dy .$$

Beweis: Durch Induktion nach n:

$n=0$: $$f(x) - T^{0}_{f,a}(x) = f(x) - f(a) \underset{HDIR}{=} \int_a^x f'(y)\,dy = \int_a^x \frac{f^{(1)}(y)}{0!} \cdot (x-y)^0 \, dy \quad ✓$$

$n-1 \mapsto n$: Ind.

$$\Rightarrow f(x) - T^{n-1}_{f,a}(x) = \int_a^x \underbrace{\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}}_{=:u(y)} \cdot \underbrace{(x-y)^{n-1}}_{=:v'(y)} \, dy \underset{20.11}{=} u(y)\cdot v(y)\Big|_a^x - \int_a^x u'(y)\cdot v(y)\,dy$$

$$= \underbrace{\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} \cdot \underbrace{\frac{-(x-y)^n}{n}}_{=v(y)} \Bigg|_a^x}_{''} - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n-1)!} \cdot \frac{-(x-y)^n}{n} \, dy$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n \, dy$$

$$\Rightarrow f(x) - T^{n}_{f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n \, dy$$

◻

F) Die Substitutionsregel

Satz 20.15 (Substitutionsregel)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq I$.

Dann: $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx .$$

Beweis:

- φ stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ φ nimmt max & min auf $[a,b]$ an

$$\Rightarrow \exists\, c,d \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : \varphi(c) \le \varphi(x) \le \varphi(d)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(\varphi) = [\varphi(c), \varphi(d)] \subseteq I$$

$\underset{HDIR}{\Rightarrow}$ f besitzt auf $\operatorname{Im}(\varphi)$ eine Stammfkt. F

$$\underset{KR}{\Rightarrow} (F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)\, dx \underset{HDIR}{=} (F \circ \varphi)(x) \Big|_a^b$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \underset{HDIR}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\, dz$$

$\boxed{4}$

Bem. 20.16:

(a) Substitutionsregel $\hat{=}$ Umkehrung der Kettenregel

(b) Eselsbrücke:

Substituiere „z durch $\varphi(x)$" oder „$\varphi(x)$ durch z"!

- $z = \varphi(x) \longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = \varphi'(x) \rightsquigarrow dz = \varphi'(x) \cdot dx$

$$\rightsquigarrow \int f(z)\, dz = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

Bsp. 20.17

$$\int_a^b x \cdot \exp(x^2)\, dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\, dz = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\exp(z)}{2}\, dz$$

$z = \varphi(x) = x^2$

$dz = 2 \cdot x\, dx$

$f(z) = \dfrac{\exp(z)}{2}$

$$= \frac{\exp(z)}{2} \Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{\exp(b^2) - \exp(a^2)}{2}$$

Bsp. 20.18: Ziel: bestimme Stammfkt. von tan!

$$\int^y \tan(x)\,dx = \int^y \underbrace{-\frac{1}{\cos(x)}}_{\overset{\shortparallel}{f(\cos(x))}} \cdot \underbrace{(-\sin(x))\,dx}_{\varphi'(x)\,dx} \underset{\{}{=} \int^y f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$$

$z = \cos(x)$

$dz = \varphi'(x)\,dx = -\sin(x)\,dx$

$f(z) = -\frac{1}{z}$

$$= \int^{\varphi(y)} f(z)\,dz = \int^{\cos(y)} -\frac{1}{z}\,dz = -\ln(z)\Big|^{\cos(y)}$$

$$= -\ln(\cos(y)) \qquad \text{für } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Bsp. 20.19

Ziel: Bestimme Stammfkt. von $f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto \sqrt{1-z^2}$

$$F(y) = \int^y \sqrt{1-z^2}\,dz = \int^y f(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} \int^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$$

$z = \varphi(x) = \sin(x)$

$dz = \varphi'(x)\,dx = \cos(x)\,dx$

$\varphi^{-1}(y) = \arcsin(y)$

$$= \int^{\arcsin(y)} \sqrt{\underbrace{1-\sin^2(x)}_{=\cos^2(x)}}\cdot\cos(x)\,dx = \int^{\arcsin(y)} \underbrace{\sqrt{\cos^2(x)}}_{=\cos(x)}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$= \int^{\arcsin(y)} \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \cos(x)\cdot\sin(x)\right)\Big|^{\arcsin(y)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x + \sqrt{1-\sin^2(x)}\cdot\sin(x)\right)\Big|^{\arcsin(y)}$$

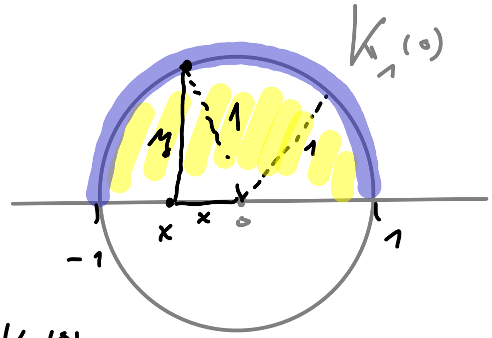
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\arcsin(y) - \sqrt{1-y^2}\cdot y\right)$$

Bsp. 20.20:

Berechne den Flächeninhalt des Kreises $K_1(0) = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1 \right\}$

Betrachte: $f : [-1, 1] \longmapsto \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \overset{!}{=}$ Flächeninhalt, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt



$= \frac{1}{2} \cdot$ Flächeninhalt von $K_1(0)$

$\Rightarrow$ Flächeninhalt des Kreises $K_1(0)$ $= 2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \underset{HDIR}{\overset{20.19}{=}} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\arcsin(y) + y \cdot \sqrt{1-y^2} \right) \Big|_{-1}^{1}$

$= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

Allgemeiner: $K_r(0) = \left\{ \binom{x}{y} \mid x^2+y^2 \le r^2 \right\}$ = Kreis vom Radius $r>0$

$\Rightarrow$ Flächeninhalt von $K_r(0)$ $= 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx \underset{SR}{=} \pi \cdot r^2$

G) Partialbruchzerlegung

Bem. 20.21

$0 \ne f, g \in \mathbb{R}[t]$ Polynome $\Rightarrow r := \frac{f}{g}$ rationale Funktion

$\underset{\text{Polynomdivision}}{\Rightarrow}$ $r = h + \frac{p}{q}$ mit $h, p, q \in \mathbb{R}[t]$ und $\deg(p) < \deg(q)$

$\Rightarrow \int r(x)\,dx = \underbrace{\int h(x)\,dx}_{\text{leicht}} + \underbrace{\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}_{\text{schwer}}$

Ansatz: $\frac{p}{q}$ = Summe von Termen der Form $\frac{A}{(t-a)^k}$ und $\frac{B \cdot t + C}{(t^2+b\cdot t+c)^\ell}$

wobei
- $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $4 \cdot b - a^2 > 0$
- $k \in \{1, \ldots, n\}$, wenn n = maximal mit $(t-a)^n$ bzw. $(t^2+b\cdot t+c)^n$ teilt q

Bsp. 20.22:

ⓒ Ziel:

$$\int_1^2 \frac{3x^5+3x^4+6x^2+x-2}{x^3+x^2}\,dx = ?$$

Ansatz:

① $f = 3t^5+3t^4+6t^2+t-2$, $g = q = t^3+t^2 = t^2\cdot(t+1)$

Polynomdivision

$$(3t^5+3t^4+6t^2+t-2) : (t^3+t^2) = 3t^2 \quad \text{Rest } r$$

$$\underline{3t^5+3t^4}$$

$$6t^2+t-2 =: r$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \underbrace{3t^2}_{h} + \frac{\overbrace{6t^2+t-2}^{=p}}{\underbrace{t^3+t^2}_{=q}}$$

② $q = t^3+t^2 = t^2\cdot(t+1)$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1}$$

$$\frac{6t^2+t-2}{t^2\cdot(t+1)} \overset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{A\cdot t\cdot(t+1) + B\cdot(t+1) + C\cdot t^2}{t^2\cdot(t+1)}$$

$$= \frac{(A+C)\cdot t^2 + (A+B)\cdot t + B}{t^2\cdot(t+1)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} A + C &= 6 \\ A + B &= 1 \\ B &= -2 \end{aligned}\right\} \underset{\text{LGS}}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} A &= 3 \\ B &= -2 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{3}{t} + \frac{-2}{t^2} + \frac{3}{t+1}$$

Damit:
$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int_1^2 h(x)\,dx + \int_1^2 \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

$$= \int_1^2 3x^2\,dx + \int_1^2 \frac{3}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{-2}{x^2}\,dx + \int_1^2 \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= x^3\Big|_1^2 + 3\cdot\ln(x)\Big|_1^2 + \frac{2}{x}\Big|_1^2 + 3\cdot\ln(x+1)\Big|_1^2$$

$$= (8-\cancel{1}) + (3\cdot\cancel{\ln(2)} - \underbrace{3\cdot\ln(1)}_{=0}) + (\cancel{1}-2) + (3\cdot\ln(3) - 3\cdot\cancel{\ln(2)})$$

$$= 6 + 3\cdot\ln(3)$$

ⓑ Ziel:
$$\int^y \frac{2x^3+x^2+1}{x^2\cdot(1+x^2)^2}\,dx = ?$$

Ansatz:
$$\frac{3t^3+t^2+1}{t^2\cdot(1+t^2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} + \frac{Et+F}{(1+t^2)^2}$$

$$\underset{HN}{=} \frac{(A+C)\cdot t^5 + (B+D)\cdot t^4 + (2A+C+E)\cdot t^3 + (2B+D+F)\cdot t^2 + A\cdot t + B}{t^2\cdot(1+t^2)^2}$$

Koeffizientenvgl.:
$$\left.\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D &= 0 \\ 2A + C + E &= 3 \\ 2B + D + F &= 1 \\ A &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned}\right\} \underset{LGS}{\Longrightarrow} \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 1 \\ C &= 0 \\ D &= -1 \\ E &= 2 \\ F &= 0 \end{aligned}$$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$

$z = \varphi(x) = 1+x^2$

$2x\,dx = \varphi'(x)\,dx = dz$

Damit:
$$\int^y \frac{2x^3+x^2+1}{x^2\cdot(1+x^2)^2}\,dx = \int^y \frac{1}{x}\,dx - \int^y \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int^y \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \ln(x)\Big|^y - \arctan(x)\Big|^y + \boxed{\int^{1+y^2} \frac{1}{z^2}\,dz} = -\frac{1}{z}\Big|^{1+y^2}$$

$$= \ln(y) - \arctan(y) - \frac{1}{1+y^2}$$

H) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration

Satz 20.23

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ glm. auf $[a,b]$.

Dann ist f stetig auf $[a,b]$ und für $y \in [a,b]$ gilt

$$\int_a^y f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^y f_n(x)\,dx,$$

d.h. der Grenzwert der Stammfkten ist ein Stammfkt. d. Grenzfkt.

Beweis:

- f_n stetig & $f_n \to f$ glm. $\overset{15.6}{\Longrightarrow}$ f stetig auf $[a,b]$

  $\Rightarrow$ f_n & f integrierbar auf $[a,y]$ $\forall y \in [a,b]$.

- Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^y f_n(x)\,dx = \int_a^y f(x)\,dx$

Sei $\varepsilon > 0$.

z.z.: $\exists\, n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \int_a^y f_n(x)\,dx - \int_a^y f(x)\,dx \right| < \varepsilon$

Vor. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ glm. $\Rightarrow$ $\exists\, n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon$ & $\forall x \in [a,b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \quad (*)$$

Sei nun $n \geq n_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \left| \int_a^y f_n(x)\,dx - \int_a^y f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^y f_n(x) - f(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^y \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}}\,dx \leq \int_a^y \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}\,dx = \frac{\varepsilon\cdot(y-a)}{2\cdot(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\boxed{\varepsilon}$

Bem. 20.24:

ⓐ Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwert
≙ Vertauschbarkeit zweier Grenzprozesse!

Denn:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^y f_n(x)\,dx}_{} \overset{?}{=} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^y f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\ \lim_{m\to\infty} ZS(f_n, Z_m, \alpha^m)$$

$$\int_a^y f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} ZS(f, Z_m, \alpha^m) = \lim_{m\to\infty}\ \lim_{n\to\infty} ZS(f_n, Z_m, \alpha^m)$$

ⓑ Wenn wir 20.23 für die f_n nur integrierbar statt stetig fordern, dann ist f nur noch integrierbar, aber die Formel für die Integrale bleibt richtig!

ⓒ Erinnerung an 18.27:

Vor.: $f_n \to f$ punktw., $f_n' \to g$ glm, f_n stetig diffbar.

Dann f diffbar mit $f' = g$

Beweis (neu):

- f_n ist Stammfkt. von f_n'

$$\overset{}{\underset{\text{HDIR}}{\Longrightarrow}} \quad f_n(y) - f_n(a) = \int_a^y f_n'(x)\,dx$$

$$\swarrow n\to\infty \qquad\qquad 20.23 \searrow n\to\infty$$

$$f(y) - f(a) \overset{!}{\Longrightarrow} \int_a^y g(x)\,dx \overset{\text{HDIR}}{=} \text{Stammfkt v. g}$$

$\Rightarrow f$ diffbar in y mit $f'(y) = g(y)$

I) Integration von Potenzreihen

Kor. 20.25

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit KR $r>0$.

Dann ist $f:(-r,r)\to\mathbb{R}: x\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ auf jedem Teilintervall $[a,b]\subseteq(-r,r)$ integrierbar und die Funktion $F:(-r,r)\longrightarrow\mathbb{R}: y\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\cdot y^{n+1}$ ist eine Stammfkt. von f, d.h. durch gliedweises Integrieren entsteht eine Stammfkt.

Bew:

- 15.4. $\Longrightarrow f_n:(-r,r)\to\mathbb{R}: x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k$ konv. glm. gegen f auf $[a,b]$ und f_n ist stetig

  $\Longrightarrow f$ stetig auf $[a,b]$ $\longrightarrow f$ integrierbar auf $[a,b]$

- $$\underset{\substack{\| \\ \text{ist Stammfkt.} \\ \text{von } f \text{ (in } y)}}{\int_0^y f(x)\,dx} \overset{20.23}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^y f_n(x)\,dx = \lim_{n\to 0}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot\int_0^y x^k\,dx$$

  $$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^y$$

  $$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot \frac{y^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\cdot y^{k+1} = F(y)$$

$\boxed{1}$

Bsp. 20.26:

ⓐ

$$\begin{tikzcd} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \arrow[r, "\text{gliedweise}", "\text{Integration}"'] \arrow[d, "\text{Fkt.}"] & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \arrow[d] \\ \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & \text{Stammfkt. von exp} \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\| \, !$$

$$\exp(x) - 1$$

ⓑ $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln(1+x)$ ist stetig diffbar

$\Longrightarrow \quad f' : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$

Beachte: f' ist auf $(-1, 1)$ durch die folgende Potenzreihe gegeben:

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$$

$$KR = 1$$

$$\xrightarrow[\text{Integr.}]{\text{gliedw.}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad \rightsquigarrow$$ definiert eine Stammfkt. von f' auf $(-1, 1)$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R} \; : \; \forall\, x \in (-1, 1) \; : \; f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = c$$

Setze $x = 0$ ein:

$$\Longrightarrow \quad c = \underset{\substack{\| \\ \ln(1)=0}}{f(0)} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1} = 0 - 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \ln(1+x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad \forall\, x \in (-1,1)$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, x \in (0, 2) \; : \; \ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}$$

(war für $x \in [1, 2]$ schon bekannt und gilt auch für $x = 2$) □

§ 21 Uneigentliche Integrale

A) Uneigentliche Integrale

Def. 21.1

ⓐ Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,y]$ für alle $y \in (a,b)$.
Falls $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \to b} \int_a^y f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert, heißt der GW ein uneigentliches Integral; es heißt konvergent, falls $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$.

ⓑ Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[y,b]$ für alle $y \in (a,b)$.
Falls $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \to a} \int_y^b f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert, heißt der GW ein uneigentliches Integral; es heißt konvergent, falls $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$.

ⓒ Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und für $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ gebe es ein $c \in (a,b)$, so dass $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergent sind, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ein konvergentes uneigentliches Integral.

Beachte: Additivität des Integrals $\Rightarrow$ unabhängig von c !!!

Bsp. 21.2

ⓐ $$\int_0^\infty \exp(-x)\,dx = \lim_{y \to \infty} \int_0^y \exp(-x)\,dx = \lim_{y \to \infty} -e^{-x}\Big|_0^y = \lim_{y \to \infty} \underset{\overset{\|}{1}}{-e^{-y} + e^0}$$

ist konvergent !!!

ⓑ Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$.

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y x^{-a}\,dx = \lim_{y\to\infty} \frac{x^{-a+1}}{-a+1}\Big|_1^y$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{y^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \begin{cases} \infty & , a<1 \\ -\dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1}{a-1} & , a>1 \end{cases}$$

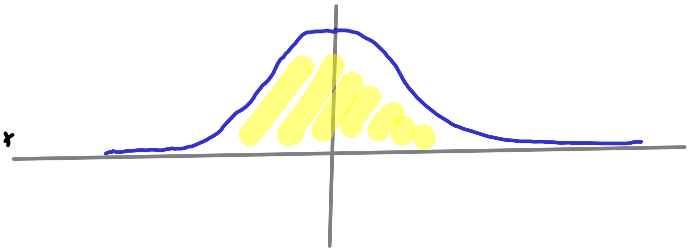
ⓒ

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{y\to 1} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{y\to 1} -2\cdot\sqrt{1-x}\Big|_0^y$$

$$= \lim_{y\to 1} -2\cdot\sqrt{1-y} + 2\cdot\sqrt{1} = 2$$ (ist konvergent)

ⓓ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$



$$= \lim_{y\to-\infty} \int_y^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{y\to-\infty} \arctan(x)\Big|_y^0 + \lim_{y\to\infty} \arctan(x)\Big|_0^y$$

$$= \lim_{y\to-\infty} -\arctan(y) + \lim_{y\to\infty} \arctan(y)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Bem. 21.3

Linearität, Monotonie, Additivität, Δ-Ungleichung gelten jeweils auch für (konvergente) uneigentliche Integrale.

B) Integrabilitätskriterium für Reihen

Lemma 21.4 (Monotoniekriterium für uneigentliche Integrale)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar auf $[a,y]$ für alle $y \in (a,b)$.

Wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $\int_a^y f(x)\,dx \leq s$ für alle $y \in (a,b)$,

dann ist $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

Beweis:

Setze: $F : [a,b) \to \mathbb{R} : y \longmapsto \int_a^y f(x)\,dx$ ist monoton wachsend, da $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b)$

Zeige: $\lim\limits_{y \to b} F(y)$ existiert in $\mathbb{R}$

Wähle eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a,b)$, die monoton wachsend ist und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

$\Rightarrow (F(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $F(a_n) \leq s \;\; \forall n$

$\Rightarrow \exists\, I \in \mathbb{R} : \quad F(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I.$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon : \;\; \forall n \geq n_\varepsilon : \;\; \underset{\substack{\| \\ I - F(a_n)}}{|F(a_n) - I|} < \varepsilon \qquad (\ast)$$

z.z.: $\lim\limits_{y\to b} F(y) = I$

Sei $\varepsilon > 0$.

1. Fall: $b \in \mathbb{R}$.

z.z.: $\exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall y \in [a,b)$ mit $|y-b| < \delta_\varepsilon : \underset{\overset{\shortparallel}{|F(y)-I|}}{}\overset{I-F(y)}{} < \varepsilon$

Setze: $\delta_\varepsilon := b - a_{n_\varepsilon} > 0$.

Sei $y \in [a,b)$ mit $\underset{\substack{\shortparallel \\ b-y}}{|y-b|} < \delta_\varepsilon = b - a_{n_\varepsilon}$

$\Rightarrow a_{n_\varepsilon} < y$

$\Rightarrow |F(y)-I| = I - F(y) \leq I - F(a_{n_\varepsilon}) \underset{(*)}{<} \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to b} F(y) = I$

2. Fall: $b = \infty$

z.z.: $\exists\, S_\varepsilon : \forall y \in [a,\infty)$ mit $y > S_\varepsilon : |F(y) - I| < \varepsilon$

Setze: $S_\varepsilon := a_{n_\varepsilon}$. Sei nun $y \in [a,\infty)$ mit $y > \underset{\substack{\shortparallel \\ a_{n_\varepsilon}}}{S_\varepsilon}$

$\Rightarrow |F(y)-I| = I - F(y) \leq I - F(a_{n_\varepsilon}) \underset{(*)}{<} \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to b} F(y) = I$ $\square$

Satz 21.5:

Sei $a \in \mathbb{N}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei monoton fallend und auf $[a, c]$ integrierbar $\forall c \in [a, \infty)$.

Dann sind gleichwertig:

ⓐ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ist konvergent.

ⓑ $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ ist konvergent.

Zudem gilt dann: $\sum_{n=a+1}^\infty f(n) \leq \int_a^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{n=a}^\infty f(n)$

Beweis:

Beachte: für $m \in \mathbb{N}$ mit $m > a$ setze: $Z_m := (a, a+1, a+2, \dots, m)$ ist Zerlegung von $[a, m]$

f monoton fallend

$$\Rightarrow \sum_{n=a+1}^{m} f(n) = US(f, Z^m) \leq \int_a^m f(x)\,dx \leq OS(f, Z_m) = \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \quad (*)$$

ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ:

$$S_m := \sum_{n=a}^{m} f(n) = f(a) + \sum_{n=a+1}^{m} f(n) \leq f(a) + \int_a^m f(x)\,dx$$

$$\wedge$$

$$f(a) + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

$\Rightarrow (S_m)_{m \geq a}$ ist monoton wachsend & beschränkt

$\Rightarrow (S_m)_{m \geq a}$ konvergent

ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ: Sei $y \in (a, \infty) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : y \leq m$

$$\Rightarrow \int_a^y f(x)\,dx \leq \int_a^m f(x)\,dx \underset{(*)}{\leq} \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \leq \sum_{n=a}^{\infty} f(n) \underset{21.4.}{\Longrightarrow} \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent}$$

Zudem:

- $$\sum_{n=a+1}^{m} f(n) \le \int_a^m f(x)\,dx \le \int_a^\infty f(x)\,dx$$

$$\Big\downarrow m\to\infty$$

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} f(n) \le \int_a^\infty f(x)\,dx$$

- $$\int_a^m f(x)\,dx \le \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \le \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$$

$$\Big\downarrow m\to\infty$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$$

$\square$

Bsp. 21.6:

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$.

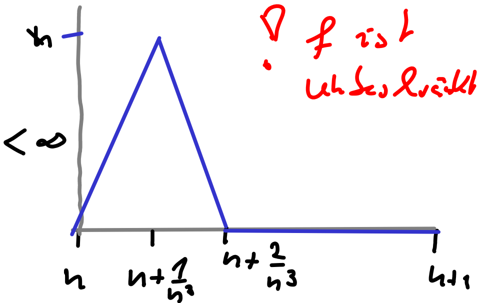
$$\underset{21.2}{\Longrightarrow} \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{a-1} \quad \text{ist konvergent}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \quad \text{ist konvergent}$$

Bem. 21.7

$f:[a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent $\not\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

z.B.: $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgendem Graphen auf $[n, n+1]$



! f ist unbeschränkt!

$$\Longrightarrow \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot n \cdot \frac{2}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

ist konvergent, aber $\lim_{n\to\infty} f\left(n+\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$