Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2022/23, Blatt 3
Thomas Markwig | Umut Özcan

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 31. Oktober 2022, 10:00

Die Aufgaben 12 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Bei Aufgabe 10 braucht nur eine der beiden Teilaufgaben bearbeitet zu werden.

Aufgabe 9: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Finde in (b) zudem ein Beispiel, wo die Inklusion eine echte Inklusion ist.

Aufgabe 10:

(a) Seien M, N zwei nicht-leere Mengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Formuliere die folgende Aussage zunächst in Quantorenschreibweise und beweise sie anschließend:
f ist genau dann surjektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen X und für alle Abbildungen $g : N \longrightarrow X$ und $h : N \longrightarrow X$ mit $g \circ f = h \circ f$ folgt, dass $g = h$ ist.

(b) Es seien M eine Menge und $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Zeige, es gibt keine surjektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$.

Hinweis zu Teil (b): betrachte die Menge der $x \in M$ für die $x \notin f(x)$ gilt.

Aufgabe 11: Beweise mittels vollständiger Induktion die Aussage

$$2^n > n^3$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 10$.

Aufgabe 12: Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \longmapsto 2x^3 - 4$.

(b) $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\} : \ n \longmapsto (-1)^n$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \ (x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.