

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 7. November 2022, 10:00

Aufgabe Nummer 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 13: Zeige, dass für jedes $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 14: Sei M eine Menge und $A := \{f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow M \text{ Abbildung}\}$.
Zeige, dass A gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$ ist.

Aufgabe 15: Es sei $M = P(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Wir definieren folgende Relation auf M :

$$A \sim B \iff \exists f : A \rightarrow B \text{ bijektiv}$$

für $A, B \in M$.

(a) Zeige, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{N} sind äquivalent zueinander:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 30, 41\}, & B &= \{6, \dots, 10\}, & C &= \{n \mid n > 5\}, \\ D &= \{n \mid n < 5\}, & E &= \mathbb{N}, & F &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}. \end{aligned}$$

(c) Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen gibt es? Versuche, eine mathematisch möglichst zufriedenstellende Antwort auf die Frage zu geben.

Aufgabe 16: Zeige, daß die Menge $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ mit der zweistelligen Operation

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in G$ eine abelsche Gruppe ist.