

## Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 14.11.2022, 10:00

Aufgabe 20 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 17:** Ist  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  eine positive ganze Zahl, so definieren wir für  $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \equiv y :\iff x - y \text{ ist ein Vielfaches von } n.$$

- (a) Zeige, daß  $\equiv$  eine Äquivalenzrelation ist.
- (b) Zeige, es gibt genau die  $n$  paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$ .
- (c) Zeige, die Definitionen

$$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}$$

und

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{x \cdot y}$$

hängen nicht von den Repräsentanten der Äquivalenzrelationen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  ab. Man sagt, die Addition und die Multiplikation sind *wohldefiniert*.

- (d) Zeige, die Menge der Äquivalenzklassen  $\mathbb{Z}_n := \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}$  ist mit der Addition aus Teil (c) eine abelsche Gruppe.
- (e) Zeige, wenn  $n$  eine Primzahl ist und  $x$  nicht von  $n$  geteilt wird, dann ist die folgende Abbildung bijektiv

$$f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n : \bar{y} \mapsto \overline{x \cdot y}.$$

- (f) Zeige, wenn  $n$  eine Primzahl ist, dann ist  $\mathbb{Z}_n$  mit den Operationen aus Teil (c) ein Körper.

**Aufgabe 18:** Sei  $K$  ein Körper und  $x \in K$  mit  $x^2 = 1$ . Zeige, dann gilt  $x \in \{-1, 1\}$ .

**Aufgabe 19:** Sei  $K$  ein angeordneter Körper,  $x, y \in K$  mit  $0 \leq x, y$  und  $0 < n \in \mathbb{N}$ . Zeige, genau dann gilt  $x < y$ , wenn  $x^n < y^n$  gilt.

**Aufgabe 20:** Überprüfe für die folgenden Relationen zwischen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{N}$  jeweils, ob sie reflexiv, antisymmetrisch oder transitiv sind. Welche der Relationen ist eine Ordnungsrelation? Ist diese dann ggf. auch eine Totalordnung?

- (a)  $R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } y\}$ .
- (b)  $R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid T(x) \subseteq T(y)\}$ , wobei  $T(n)$  die Menge der Primteiler von  $n$  ist.