Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2022/23, Blatt 7
Thomas Markwig — Umut Özcan

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 28.11.2022, 10:00

Aufgabe 28 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 25: Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.

(b) $(a_n)_{n\geq 2}$ mit $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

(c) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sqrt[n]{x^n+y^n}$ und $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{7+3\cdot a_n}{3+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 26: Es seien $s, S \in \mathbb{R}_{>0}$ zwei positive reelle Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < s < a_n < S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Ist die Aussage auch noch richtig mit $s = 0$?

Hinweis: betrachte zunächst den Fall, dass die Folge konstant ist.

Aufgabe 27: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeler Zahlen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Zeige, dann ist auch die Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{a, b\}$.

Hinweis: betrachte die Fälle $a = b$ und $a < b$ getrennt.

Aufgabe 28: Bestimme für folgenden Reihen, ob sie konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3\cdot n!}$.