Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 05.12.2022, 10:00

Aufgabe 32 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 29:

(a) Zeige, daß die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{2}{3}$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist und leite daraus eine obere Schranke für den Grenzwert der Reihe ab.

(b) Zeige, die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monton wachsend und konvergent.

Hinweis zu Teil b., man kann die Bernoulli-Ungleichung an geeigneter Stelle verwenden.

Aufgabe 30: Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimme in Teil c. den Grenzwert:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{n^2-3n+1}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

Hinweis: in Teil c. schreibe $\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ als $\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$ für $A, B, C \in \mathbb{R}$ geeignet.

Aufgabe 31: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{K}$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(a) Zeige für $m > n$ gilt $\sum_{i=n+1}^{m} a_i \cdot b_i = s_m \cdot b_{m+1} - s_n \cdot b_{n+1} + \sum_{i=n+1}^{m} s_i \cdot (b_i - b_{i+1})$.

(b) Zeige, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot (b_n - b_{n+1})$ und $(s_n \cdot b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergent.

(c) Zeige, wenn $(n \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (a_n - a_{n+1})$ konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Aufgabe 32: Bestimme für die folgenden Potenzreichen den Konvergenzradius r und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls $(-r, r)$:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 4^n} \cdot t^n$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$.