

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 12.12.2022, 10:00

Aufgabe 36 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 33:

(a) Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe über \mathbb{R} .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^n + 1)}{n} \cdot t^n.$$

und untersuche die Reihe auf Konvergenz in den Randpunkten.

(b) Zeige, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Aufgabe 34:

(a) Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes

$$\text{für } \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2$$

(b) Zeige, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

HINWEIS: Schaut euch den Beweis von Lemma 12.29 an.

(c) Zeige, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in \mathbb{K} haben denselben Konvergenzradius.

Aufgabe 35: Bestimme für die folgenden Mengen die Menge ihrer Häufungspunkte:

$$(a) A = \left\{ (-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$(b) B = \{x - y \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Aufgabe 36: Bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^3 - 2x^2}{(x+2) \cdot (x^2+1)}}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^5 - 9x^4 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}.$$