

## Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 19.12.2022, 10:00

Aufgabe 40 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

### Aufgabe 37:

(a) Bestimme den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ .

(b) Zeige, die Funktion

$$f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x + 2}{x + 1}$$

hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein  $c \in [1, 2]$  mit  $f(c) = c$ .

**Aufgabe 38:** Sei  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Zeige, wenn es ein  $L \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt, so ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}$ .

### Aufgabe 39:

(a) Verwende die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^3}$  stetig in  $[0, 1]$  ist.

(b) Zeige, die Funktion  $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$  ist gleichmäßig stetig.

### Aufgabe 40:

(a) Bestimme eine reelle Zahl  $a$ , so daß die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 5x - 1, & \text{falls } x < a, \\ x + 7, & \text{falls } x \geq a. \end{cases}$$

(b) Löse die Gleichung  $\log_2(x) - \log_2(x - 6) = 3$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

(c) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ , so dass die Funktion

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

definiert ist. Muss  $g$  stetig sein? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.