Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2022/23, Blatt 11

Umut Özcan

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 09.01.2023, 10:00

Aufgabe 44 sollte bearbeitet werden, wird aber nicht korrigiert.

Aufgabe 41: Zeige, eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Aufgabe 42: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $a < b$ und für alle d zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$ existiert. Ferner sei für alle $y \in \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(y)$ eine endliche Menge. Zeige, dann ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 43:

(a) Es sei $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass für alle $x, y \in (0, \infty)$ die Funktionalgleichung

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

gilt. Zeige, dann gilt $f(x) = c \cdot \ln(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $c = f(e)$.

Hinweis: zeige zunächst $f(y^q) = q \cdot f(y)$ für alle natürlichen Zahlen q und dann für alle rationalen.

(b) Beweise die folgende Gleichung

$$\tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Aufgabe 44: Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1 + |x|^n}.$$

(a) Zeige, die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und gib die Werte $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$ und $f(2)$ an.

(b) Skizziere den Graphen der Grenzfunktion f.

(c) Welche der folgenden Grenzwerte existieren?

(1) $\lim_{x\to 1} f(x)$ für $x \in (1, \infty)$.

(2) $\lim_{x\to 1} f(x)$ für $x \in (-1, 1)$.

(3) $\lim_{x\to 1} f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) An welchen Stellen $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig.

(e) Konvergiert die Funktionenfolge auch gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion?