

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 16. Januar 2023, 10:00

Aufgabe 48 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Für Aufgabe 47 braucht man die Vorlesungen von Woche 11.

Aufgabe 45: Für $n \in \{0, 1, 2\}$ sei

$$f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} x^n \cdot (\cos(\frac{1}{x}) - 1), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Welche der Funktionen sind stetig in $a = 0$, differenzierbar in $a = 0$, stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$?

Aufgabe 46: [Logarithmische Ableitung]

Für eine auf U differenzierbare Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ohne Nullstellen nennen wir $L(f) := \frac{f'}{f}$ die logarithmische Ableitung von f .

Zeige die folgenden Rechenregeln für die logarithmische Ableitung:

- (a) $L(f_1 \cdot \dots \cdot f_n) = L(f_1) + \dots + L(f_n)$.
- (b) $L\left(\frac{f}{g}\right) = L(f) - L(g)$.
- (c) $L(\exp(f(x))) = f'(x)$.

Aufgabe 47: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$. Zeige, die Funktion

$$f : \left(-\frac{d}{c}, \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

ist entweder konstant oder streng monoton.

Aufgabe 48:

- (a) Bestimme für die folgenden Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ den Definitionsbereich U und berechne ihre Ableitung:

(1) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^5}\right)$.

(2) $f(x) = \tan(\cos(x^2 + 1))$.

- (b) Entscheide und beweise, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot |x|$ differenzierbar ist.