

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 23. Januar 2023, 10:00

Aufgabe 52 braucht als Präsenzaufgabe nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 49:

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq 1$ und

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x^3 - 3a \cdot x + b.$$

Zeige, f hat höchstens eine Nullstelle im Intervall $[-a, a]$.

(b) Bestimme mit Hilfe des Mittelwertsatzes den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

Aufgabe 50: Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f''(x) + f'(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeige, dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Aufgabe 51: Es sei $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+n \cdot x^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, daß $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{R} gleichmäßig konvergiert und bestimme die Grenzfunktion.

(b) Zeige, daß $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und bestimme die Grenzfunktion.

(c) Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$? Konvergiert $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

Aufgabe 52:

(a) Berechne die folgenden Grenzwerte.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}{x \cdot \sin(x)}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \cdot \ln(1 - x)$, $x < 1$.

(b) Berechne das vierte Taylorpolynom $T_{f,0}^4$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$ für

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x^3 + 2x).$$

Hinweis: Mit etwas Überlegung braucht man hier keine Ableitung zu berechnen!