Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 30. Januar 2023, 10:00

Aufgabe 56 braucht als Präsenzaufgabe nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 53: Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + \sin(x) \cdot \cos(x)$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot \exp(\sin(x)).$$

Kann man mittels der Regel von de l'Hôpital den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ bestimmen? Wenn ja, berechne ihn; wenn nein, begründe, weshalb es nicht geht.

Aufgabe 54: Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare (nicht notwendig stetige) Funktion. Zeige, die Funktion

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^y f(x)\, dx$$

ist Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $y, z \in [a, b]$ gilt

$$|F(y) - F(z)| \leq L \cdot |y - z|.$$

Aufgabe 55:

(a) Wir betrachten die Funktion:

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, aber keine Stammfunktion besitzt.

(b) Zeige mit Hilfe Riemannscher Zwischensummen, für jedes $a \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^a = \frac{1}{a+1}.$$

Aufgabe 56: Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(a) $\int_{1\frac{1}{4}}^{0} \sqrt{8x+2}\, dx$.

(b) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$.

(c) $\int \sin(x) \cdot e^x\, dx$.

(d) $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(2x)\, dx$.

(e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sqrt{\sin(x)}\right) \cdot \cos(x)\, dx$.

(f) $\int \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx$.