KAPITEL II: Mehrdimensionale Analysis

§ 22 Topologische Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen

A) Metrische Räume

Def. 22.1

Eine Abbildung $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Metrik auf M

$:\Longleftrightarrow$ ① $d(x,y) = 0 \iff x = y$ "Definitheit"

② $\forall\, x,y \in M:\ d(x,y) = d(y,x)$ "Symmetrie"

③ $\forall\, x,y,z \in M:\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ "Δ-Ungleichung"

Wir nennen (M,d) dann einen metrischen Raum

Bsp. 22.2: (diskrete Metrik)

Sei M eine beliebige Menge.

$$\Longrightarrow\ d: M \times M \to \mathbb{R}:\ x \longmapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Bem. 22.3:

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Dann heißt $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm auf V, wenn:

① $\|x\| = 0 \iff x = 0$ "Positive Definitheit"

② $\forall x \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}:\ \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ "Homogenität"

③ $\forall\, x,y \in V:\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "Δ-Ugl."

Lemma 22.4:

Sei $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und $M \subseteq V$.

Dann ist $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}:\ (x,y) \mapsto \|x - y\|$ eine Metrik auf M.

Beweis: ① $0 = d(x,y) = \|x - y\| \iff x - y = 0 \iff x = y$

② $d(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)\cdot(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y,x)$

③ $d(x,z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z)$. $\square$

Konvention:

- Betrachte jede Teilmenge eines normierten Raumes mit dieser induzierten Metrik als metrischen Raum.
- Betrachte jede Teilmenge eines metrischen Raumes als metrischen Raum bzg. der Einschränkung der Metrik auf die Teilmenge

Bsp. 22.5:

(a) Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(b) Summennorm auf $\mathbb{R}^n$;

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto |x_1| + \dots + |x_n|$$

(c) Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$,

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

(d) $n = 1$: $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2 \equiv |\cdot|$ auf $\mathbb{R}$

(e) Betrachte $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2} : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \longmapsto \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\, dx}$$

die $\mathcal{L}^2$-Norm.

(f) Betrachte $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$\|\cdot\|_\infty : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \longmapsto \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

die Maximumsnorm auf $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

B) Metrische Räume sind hausdorffsch.

Def. 22.6

Sei M ein metrischer Raum, $a \in M$ und $\varepsilon > 0$.

Wir nennen $\mathcal{U}_\varepsilon(a) := \{x \in M \mid d(x,a) < \varepsilon\}$

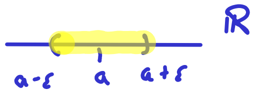
die ε-Umgebung von a.

Bsp. 22.7: Sei V ein normierter Raum, $a \in V$, $\varepsilon > 0$.

Dann: $\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid \|x-a\| < \varepsilon\}$.

z.B.: $V = \mathbb{R}$, $\|\cdot\| = |\cdot|$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon$

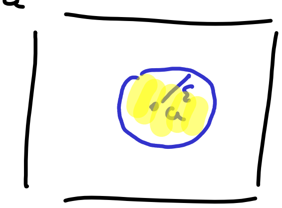
wie in 13.2



z.B.: $V = \mathbb{R}^2 \mathrel{\hat{=}} \mathbb{C}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2 \mathrel{\hat{=}} |\cdot|$ über $\mathbb{C}$

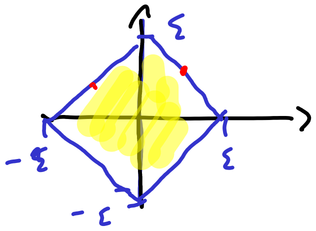
$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x-a| < \varepsilon\}$ wie in 13.2

= Kreis um a mit Radius ε

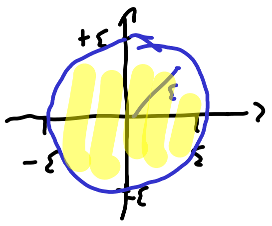


$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

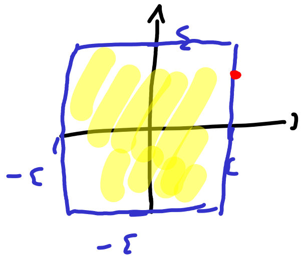
z.B. $V = \mathbb{R}^2$



$\mathcal{U}_\varepsilon(0)$ bzgl. $\|\cdot\|_1$



$\mathcal{U}_\varepsilon(0)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$

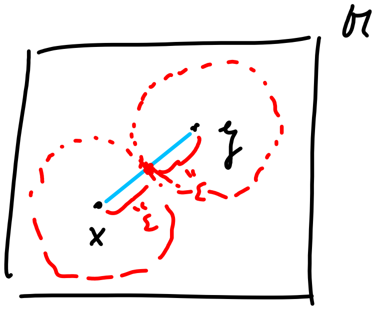


$\mathcal{U}_\varepsilon(0)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Prop. 22.8: (Metrische Räume sind hausdorffsch.)

Sei M ein metrischer Raum, $x, y \in M$ mit $x \neq y$.

Dann: $\exists\, \varepsilon > 0 : \; \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(y) = \emptyset$.



Beweis:

Setze: $\varepsilon := \frac{d(x,y)}{2} > 0$ weil $x \neq y$

Ang.: $\exists\, z \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(y)$.

$$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{2\cdot\varepsilon}}{d(x,y)} \le \underbrace{d(x,z)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(z,y)}_{<\varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad ↯$$

Also: $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(y) = \emptyset$. $\square$

c) Offene und abgeschlossene Mengen

Def. 22.9

Sei M ein metrischer Raum, $\mathcal{U}, A, O \subseteq M$, $a \in \mathcal{U}$.

ⓐ a heißt innerer Punkt von $\mathcal{U}$ $:\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$

ⓑ O heißt offen in M $:\Leftrightarrow$ jeder Punkt von O ist ein innerer Punkt von O.

ⓒ A heißt abgeschlossen in M $:\Leftrightarrow$ $M \setminus A$ ist offen in M.

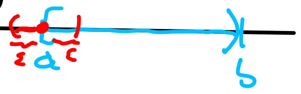
Beispiel 22.10

ⓐ $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$: (a,b) ist offen in $\mathbb{R}$

ⓑ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $[a,b]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$

ⓒ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $[a,b)$ ist weder offen, noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$

denn: a ist kein innerer Punkt von $[a,b)$



b 〃 〃 〃 〃 von

ⓓ $\forall\, a \in \mathbb{R}$: $[a, \infty)$ und $(-\infty, a]$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

ⓔ Sei M ein beliebiger metrischer Raum.

$\Longrightarrow$ M und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen in M

ⓕ Sei M ein metr. Raum, $\mathcal{U} \subseteq W \subseteq M$ und $a \in \mathcal{U}$.

Wenn a innerer Pkt von $\mathcal{U}$, dann ist a innerer Pkt. von W.

Denn: $\exists\ \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U} \subseteq W$.

ⓖ $\mathbb{Q}$ ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Denn: jede reelle Zahl und jede Umgebung dieser Zahl enthält sowohl rationale, als auch irrationale Zahlen.

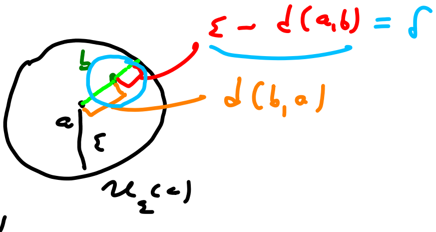
Lemma 22.11:

Sei M ein metr. Raum, $a \in M$ und $\varepsilon > 0$.

Dann: $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ ist offen in M.

Beweis:

Sei $b \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$. Setze: $\delta := \varepsilon - d(a,b) > 0$



Zeige: $\mathcal{U}_\delta(b) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(a)$, d.h. b inn. Pkt. von $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$

Sei $x \in \mathcal{U}_\delta(b) \Longrightarrow d(x,a) \le \underbrace{d(x,b)}_{<\delta} + d(b,a) < \delta + d(b,a)$

$\|$

$(\varepsilon - d(a,b)) + d(b,a) = \varepsilon$

$x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$ $\Longleftarrow$

$\boxtimes$

Prop. 22.12:

Sei M ein metrischer Raum.

ⓐ Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen in M.

ⓑ Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen in M.

ⓒ Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen in M.

ⓓ Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen in M.

<u>Beweis:</u> ⓐ Seien $O_1, \dots, O_n$ offen in M, und $a \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$

$\Rightarrow \quad a \in O_i \quad \Rightarrow \quad \exists\, \varepsilon_i > 0 : \; \mathcal{U}_{\varepsilon_i}(a) \subseteq O_i$

Setze: $\quad \varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_{\varepsilon}(a) \subseteq \mathcal{U}_{\varepsilon_i}(a) \subseteq O_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_{\varepsilon}(a) \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_n \quad \Rightarrow$ a ist inn. Pkt. von $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$

$\Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ ist offen in M

ⓑ Sei O_i offen in M, $i \in I$, und $a \in \bigcup_{i \in I} O_i$.

$$\Rightarrow \quad \exists\, j \in I : \; a \in O_j \; \underset{O_j \text{ offen}}{\Longrightarrow} \; \exists\, \varepsilon > 0 : \; \mathcal{U}_{\varepsilon}(a) \subseteq \underset{\displaystyle\bigcup_{i \in I} O_i}{\underset{\cap\!\shortmid}{O_j}}$$

$\Rightarrow$ a ist inn. Pkt. von $\bigcup_{i \in I} O_i$

$\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} O_i$ ist offen in M.

ⓒ Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq M$ abgeschlossen in M

$\Rightarrow \quad M \setminus A_i$ ist offen in M für $i = 1, \dots, n$

$$\underset{ⓐ}{\Rightarrow} \quad \underset{\displaystyle M \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)}{\underset{\shortparallel}{\bigcup_{i=1}^{n} (M \setminus A_i)}} \text{ ist offen in } M \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ ist abgeschl. in } M.$$

ⓓ Seien $A_i \subseteq M$ abgeschlossen für $i \in I$.

$\Rightarrow \quad M \setminus A_i$ ist offen in $M \quad \forall i \in I$

$$\underset{ⓑ}{\Rightarrow} \quad \underset{\displaystyle M \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)}{\underset{\shortparallel}{\bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i)}} \text{ ist offen in } M \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ist abgeschlossen in } M.$$

$\square$

Bsp. 20.13:

$\mathcal{U}_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ist offen in $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

$\Longrightarrow \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{U}_n = \bigcap_{n \geq 1} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$

denn 0 ist kein inn. Pkt. von $\{0\}$.

Korollar 22.13 Sei Ω ein metrischer Raum, $\mathcal{U} \subseteq \Omega$.

ⓐ $\overline{\mathcal{U}} := \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \subseteq A \\ A \text{ abgeschl. in } \Omega}} A$ = die kleinste abgeschlossene Teilmenge von Ω, die $\mathcal{U}$ enthält

≙: Abschluss von $\mathcal{U}$ in Ω

ⓑ $\mathring{\mathcal{U}} := \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{O} \text{ offen in } \Omega}} \mathcal{O}$ = die größte offene Teilmenge von Ω, die in $\mathcal{U}$ enthalten ist

≙: das Innere von $\mathcal{U}$

Beweis:

ⓐ $\overline{\mathcal{U}}$ ist nach Prop. 22.10 abgeschlossen in Ω und nach Def. ist $\overline{\mathcal{U}}$ in jeder abg. TM von Ω enthalten, die auch $\mathcal{U}$ enthält

ⓑ analog. □

D) Häufungspunkte und Randpunkte

Def. 22.15: Sei M ein metrischer Raum, $\mathcal{U} \subseteq M$, $a \in M$.

ⓐ a heißt Häufungspunkt von $\mathcal{U}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \mathcal{U} \setminus \{a\} : 0 < d(x,a) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap (\mathcal{U} \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

Notation: $HP(\mathcal{U}) := \{ x \in M \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } \mathcal{U} \}$

ⓑ a heißt Randpunkt von $\mathcal{U}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \text{ und } \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap (M \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset$$

Notation: $\partial \mathcal{U} := \{ x \in M \mid x \text{ ist Randpunkt von } \mathcal{U} \}$ = Rand von $\mathcal{U}$

Beispiel 22.16:

ⓐ $M = \mathbb{R}^2$, d = diskrete Metrik, d.h. $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(0) = \{ x \in M \mid d(x,0) < 1 \} = \{0\}$ offen in M

Was ist der Rand von $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(0)$?

Sei $x \in \partial \mathcal{U}_1(0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \mathcal{U})$

$$\underset{\varepsilon = 1}{\Rightarrow} \underbrace{\underbrace{\mathcal{U}_1}_{= \{x\}}(x) \cap \{0\} \neq \emptyset}_{\Downarrow \; x = 0} \neq \underbrace{\underbrace{\mathcal{U}_1}_{= \{x\}}(x) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})}_{\Downarrow \; x \neq 0}$$

↯

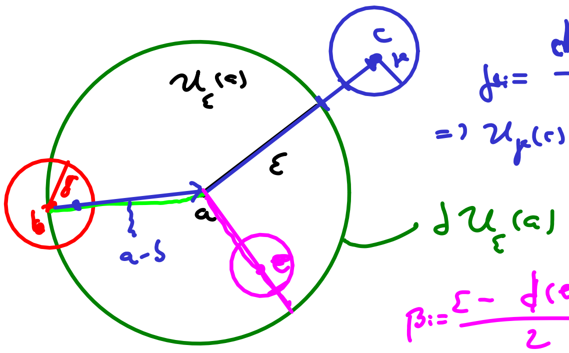
Also: $\partial \mathcal{U} = \emptyset$

Beachte: $\boxed{\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) = 1 \} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \neq \emptyset = \partial \mathcal{U}_1(0)}$

ⓑ Sei V ein normierter Raum, $a \in V$ und $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \quad \partial\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid \underset{\substack{\shortparallel \\ \|x-a\|}}{d(x,a)} = \varepsilon\}$$

z.B.: $V = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$



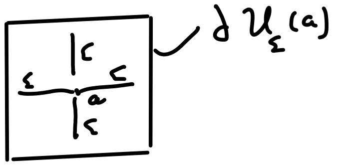
$\mu := \dfrac{d(c,a)-\varepsilon}{2} > 0$

$\Rightarrow \mathcal{U}_\mu(c) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \emptyset$

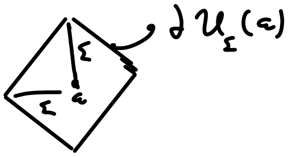
$\beta := \dfrac{\varepsilon - d(e,a)}{2} > 0 \Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ \emptyset}}{\mathcal{U}_\beta(e) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a))}$

- $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a) \Rightarrow \mathcal{U}_\delta(b) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a)) \neq \emptyset$
- $b + (a-b)\cdot\dfrac{\delta}{2\cdot\varepsilon} \in \mathcal{U}_\delta(b) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(a) \neq \emptyset$

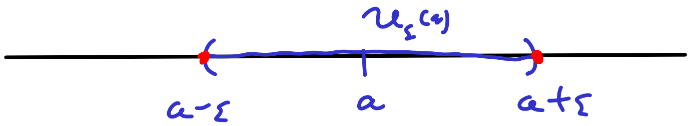
z.B.: $V = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$



z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$



z.B.: $V = \mathbb{R}$, $\|\cdot\| = |\cdot|$ $\Rightarrow \partial\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{a+\varepsilon, a-\varepsilon\}$



Prop. 22.17

Sei M ein metrischer Raum, $\mathcal{U} \subseteq M$.

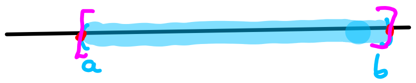
ⓐ $\mathring{\mathcal{U}}$ = Menge der inneren Punkt

ⓑ $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \partial\mathcal{U}$

ⓒ $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup HP(\mathcal{U})$

Bsp. 22.18:

ⓐ Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$



$$\Rightarrow \quad \partial(a,b) = \underline{\{a,b\}}\,, \qquad \overline{(a,b)} = \underline{[a,b]}$$

ⓑ Sei V ein normierter Raum, $a \in V$ und $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(a)} = \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cup \partial\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid \underset{\|x-a\|}{\underset{\shortparallel}{d(x,a)}} \le \varepsilon\}$$

$$\mathring{\mathcal{U}}_\varepsilon(a) = \mathcal{U}_\varepsilon(a)$$

$$\Rightarrow \quad V \setminus \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(a)} = \{x \in V \mid d(x,a) > \varepsilon\}$$

$$V \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in V \mid d(x,a) \ge \varepsilon\}$$

ⓒ $\underline{M = \mathbb{R},\ d(\cdot,\cdot) = |\cdot - \cdot|}$:

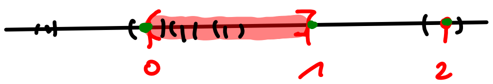
$$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

ⓓ $\underline{M = \mathbb{R},\ d(\cdot,\cdot) = |\cdot - \cdot|}$:

$$\mathcal{U} = (0,1] \cup \{2\}$$



$$\Rightarrow \quad \partial\mathcal{U} = \{0, 1, 2\} \quad \not)\!(\!$$

$$\not\cap \qquad \not\cup$$

$$HP(\mathcal{U}) = [0, 1]$$

$$\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \partial\mathcal{U} = [0,1] \cup \{2\} = \mathcal{U} \cup HP$$

Beweis von 22.17:

ⓐ Es gilt: $\mathring{\mathcal{U}} = \bigcup_{\substack{O \subseteq \mathcal{U} \\ O \text{ offen in } M}} O$ = größte offene Teilmenge von $\mathcal{U}$

Setze: $O := \{ x \in M \mid x \text{ ist innerer Pkt von } \mathcal{U} \} \subseteq \mathcal{U}$

Zeige: O ist offen

Sei $a \in O \Rightarrow a$ ist innerer Pkt von $\mathcal{U} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$

Da $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ offen ist, gilt: $b \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) \Rightarrow b$ ist innerer Pkt von $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \Rightarrow b$ ist innerer Pkt von $\mathcal{U} \Rightarrow b \in O$

$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq O \Rightarrow O$ ist offen in M

Also: $O \subseteq \mathring{\mathcal{U}}$, weil $\mathring{\mathcal{U}}$ = größte offene TM von $\mathcal{U}$

Zeige: $\mathring{\mathcal{U}} \subseteq O$, d.h. alle Punkte in $\mathring{\mathcal{U}}$ sind innere Punkte von $\mathcal{U}$

$\mathring{\mathcal{U}}$ ist als Vereinigung offener Mengen offen

$\Rightarrow$ ($b \in \mathring{\mathcal{U}} \Rightarrow b$ ist innerer Pkt von $\mathring{\mathcal{U}}$

$\Rightarrow b$ ist " " " $\mathcal{U} \Rightarrow b \in O$)

ⓑ Setze: $A := \mathcal{U} \cup \partial \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \subseteq A$

Zeige: A ist abgeschlossen in M, d.h. $M \setminus A$ ist offen

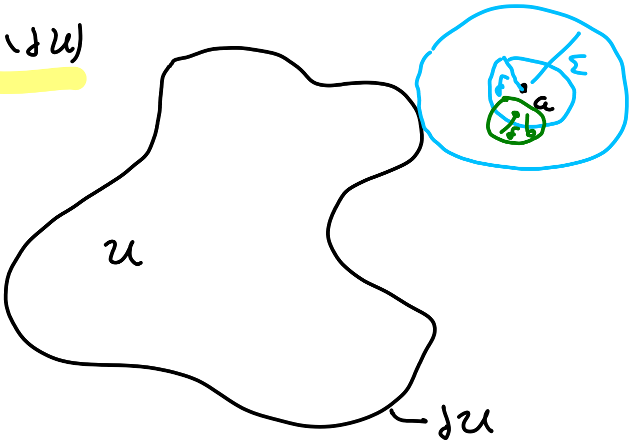
$$M \setminus A = M \setminus (\mathcal{U} \cup \partial \mathcal{U}) = (M \setminus \mathcal{U}) \cap (M \setminus \partial \mathcal{U})$$

Sei $a \in M \setminus A = (M \setminus \mathcal{U}) \cap (M \setminus \partial \mathcal{U})$

$\Rightarrow a \notin \partial \mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U} = \emptyset$

oder $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap (M \setminus \mathcal{U}) = \emptyset$



Beachte: $a \in (M \setminus \mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U} = \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus \mathcal{U}$

Setze: $\delta := \frac{\varepsilon}{2} > 0$ und $b \in \mathcal{U}_\delta(a)$

$\Rightarrow \mathcal{U}_\delta(b) \subseteq \mathcal{U}_{2\delta}(a) = \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus \mathcal{U} \quad \Rightarrow \mathcal{U}_\delta(b) \cap \mathcal{U} = \emptyset$

$\Rightarrow \quad b \notin \partial\mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad b \notin \partial\mathcal{U} \cup \mathcal{U} = A \quad \Rightarrow b \in M\setminus A$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_\delta(a) \subseteq M\setminus A \qquad \Rightarrow \quad M\setminus A$ offen in M

$\Rightarrow \quad A$ abgeschlossen in M

Also: $\overline{\mathcal{U}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{U}\subseteq\tilde{A} \\ \tilde{A} \text{ abgeschl.} \\ \text{in } M}} \tilde{A} \subseteq A$

Sei nun also B eine abgeschlossene Menge in M mit $\mathcal{U} \subseteq B$.

Zeige: $\underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{U}\cup\partial\mathcal{U}}}{A} \subseteq B$, d.h. $\partial\mathcal{U} \subseteq B$, d.h. $\partial\mathcal{U} \cap (M\setminus B) = \emptyset$

Sei $a \in M\setminus B$.

Da B abgeschlossen ist, gilt: $M\setminus B$ ist offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon>0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq M\setminus B$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad a \notin \partial\mathcal{U}$

$\Rightarrow \quad \partial\mathcal{U} \cap (M\setminus B) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B$

Also: $A \subseteq \bigcap_{\substack{\mathcal{U}\subseteq B \\ B \text{ abgeschl.} \\ \text{in } M}} B = \overline{\mathcal{U}}$.

Damit: $\underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{U}\cup\partial\mathcal{U}}}{A} = \overline{\mathcal{U}}$

ⓒ Für $a \in M\setminus\mathcal{U}$ gilt:

$a \in HP(\mathcal{U}) \iff \forall \varepsilon>0: \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \iff a \in \partial\mathcal{U}$

Also: $\boxed{HP(\mathcal{U})\setminus\mathcal{U} = \partial\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}}$

$\underset{(b)}{\Rightarrow} \quad \overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup (\partial\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cup (HP(\mathcal{U})\setminus\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cup HP(\mathcal{U})$

□

D) Kompakte Mengen in metrischen Räumen

Def. 22.19:

Sei M ein metrischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq M$.

ⓐ $\mathcal{U}$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists r > 0$ und $a \in M$: $\forall x \in \mathcal{U} : d(x,a) < r$

$\Leftrightarrow$ $\exists r > 0$ und $a \in M$: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_r(a)$

ⓑ Eine Familie $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ offener Mengen heißt eine offene Überdeckung von $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{U} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

ⓒ $\mathcal{U}$ heißt kompakt $:\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{U}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}_{i_1}, \dots, \mathcal{U}_{i_n}$ mit $i_1, \dots, i_n \in I$.

Beispiel 22.20:

ⓐ Intervalle mit endlichen Intervallgrenzen sind beschränkt.

ⓑ Jede ε-Umgebung in einem metr. Raum ist beschränkt.

ⓒ Endliche Teilmengen eines metr. Raumes sind kompakt.

ⓓ Das offene Intervall $(0,1)$ ist nicht kompakt,

denn: $(0,1) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, 1)$ hat keine endliche Teilüberdeckung.

Satz 22.21

In einem metr. Raum sind kompakte Mengen immer beschränkt und abgeschlossen.

Beweis: Sei $A \subseteq M$ kompakt.

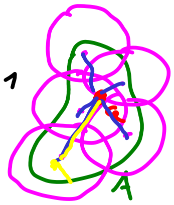
Zeige: A ist beschränkt.

Es gilt: $A \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_1(x)$ $\overset{A \text{ kompakt}}{\Longrightarrow}$ $\exists x_1, \dots, x_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_1(x_i)$

Wähle $a \in A$ fest. Setze: $r := \max\{d(x,a_i) \mid i=1,\dots,n\} + 1$

Sei $x \in A \Rightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\} : x \in \mathcal{U}_1(x_i)$

$\Rightarrow d(x,a) \leq d(x,x_i) + d(x_i,a) \leq 1 + d(x_i,a) \leq r$



Zu zeigen: A ist abgeschlossen, d.h. $M \setminus A$ ist offen.

Sei $a \in M \setminus A$. Z.z.: $\exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus A$

Prop. 22.8 (M ist hausdorffsch)

$$\Rightarrow \forall\, x \in A : \exists\, \varepsilon_x > 0 : \mathcal{U}_{\varepsilon_x}(x) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_x}(a) = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_{\varepsilon_x}(x)$$

$$\underset{A \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists\, x_1, \dots, x_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$$

Setze: $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\} > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap A \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \right)}_{= \emptyset} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus A$$

Damit: $M \setminus A$ offen, d.h. A abgeschlossen in M. ☒

F) Folgen in metrischen Räumen

Def. 22.22 Sei M ein metrischer Raum.

ⓐ Eine Folge in M ist eine Abb. $\alpha : \mathbb{N} \to M$. Notation: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \alpha(n)$.

ⓑ $a \in M$ heißt Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : d(a_n, a) < \varepsilon$.

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \longrightarrow a$.

ⓒ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent $:\Leftrightarrow \exists\, a \in M : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent $:\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent

ⓓ $M =$ normierter Raum: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ⓔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > m \geq n_\varepsilon : d(a_n, a_m) < \varepsilon$

ⓕ $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots \Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ⓖ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow \exists\, r > 0 \wedge a \in M : \forall n \in \mathbb{N} : d(a_n, a) < r$

Proposition 22.23:

Sei M ein metrischer Raum, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ & $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in M.

ⓐ $a_n \longrightarrow a \iff d(a_n, a) \longrightarrow 0$

ⓑ Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

ⓒ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

ⓓ Cauchy-Folgen (und konvergente Folgen) sind beschränkt.

ⓔ $a_n \to a \Rightarrow$ jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a

ⓕ M normierter Raum $\wedge\ a_n \to a \ \wedge\ b_n \to b$

$\Rightarrow a_n \pm b_n \longrightarrow a \pm b \ \wedge\ \lambda \cdot a_n \longrightarrow \lambda \cdot a$

ⓖ $a_n \to a \ \wedge\ b_n \to b \Longrightarrow d(a_n, b_n) \longrightarrow d(a, b)$

Beweis: Wörtlich wie in 1-dim. Analysis mit $d(x,y)$ bzw. $\|x-y\|$ statt $|x-y|$.

z.B. ⓒ: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge in $\cancel{\mathbb{R}}\,M$ $\Rightarrow \exists\, a \in \cancel{\mathbb{R}}\,M : a_n \longrightarrow a$

Sei nun $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow \exists N_{\varepsilon/2} : \forall n \geq N_{\varepsilon/2} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze: $n_\varepsilon := N_{\varepsilon/2}$. Seien $n > m \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist CF.

$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) <$

Bsp. 22.24: $a_n = \begin{pmatrix} \frac{\cos(n)}{2^n} \\ \frac{\sin(n)}{2^n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $d(\cdot,\cdot) = \|\cdot - \cdot\|_2$

Zeige: $a_n \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d(a_n, a) = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\cos(n)}{2^n} \\ \frac{\sin(n)}{2^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\cos(n)}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{\sin(n)}{2^n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2(n) + \sin^2(n)}{2^{2n}}} = \sqrt{\frac{1}{2^{2n}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

∎

Lemma 22.25 (Folgenkriterium für Häufungspunkte)

Sei M ein metrischer Raum, $\mathcal{U} \subseteq M$ und $a \in M$.

Dann: $a \in HP(\mathcal{U}) \iff \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{a\} : a_n \longrightarrow a$

Beweis: wörtlich wie in Prop. 13.4. ∎

Beispiel 22.26: $\mathbb{R}$ als metr. Raum mit $d(\cdot,\cdot) = |\cdot - \cdot|$, $\mathcal{U} = (0,1] \cup \{2\}$

$\Longrightarrow HP(\mathcal{U}) = [0,1]$

Satz 22.27:

Sei M ein metr. Raum und $\mathcal{U} \subseteq M$.

Dann: $\overline{\mathcal{U}} = \{a \in M \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} : a_n \longrightarrow a\}$

= Menge der Grenzwerte von Folgen in $\mathcal{U}$.

Beweis:

"$\supseteq$" Sei a GW einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}$.

1. Fall: $a \in \mathcal{U} \Longrightarrow a \in \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \Rightarrow a \in \overline{\mathcal{U}}$

2. Fall: $a \notin \mathcal{U} \Longrightarrow a_n \neq a \;\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{a\}$

mit $a_n \longrightarrow a \underset{22.25}{\Longrightarrow} a \in HP(\mathcal{U}) \underset{22.17}{\subseteq} \overline{\mathcal{U}} \Rightarrow a \in \overline{\mathcal{U}}$

"$\subseteq$" Sei $a \in \overline{\mathcal{U}} \underset{22.17}{=} \mathcal{U} \cup HP(\mathcal{U})$

1. Fall: $a \in \mathcal{U} \Rightarrow \underset{n}{a} := \underset{\overset{\Uparrow}{\mathcal{U}}}{a} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n = a \longrightarrow a$
$\Downarrow$
$a \in$ r.S.

2. Fall: $a \notin \mathcal{U} \Rightarrow a \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U} \underset{22.17}{\subseteq} HP(\mathcal{U}) \Rightarrow a$ ist HP von $\mathcal{U}$

$\underset{22.25}{\Longrightarrow} \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U} \setminus \{a\} \subseteq \mathcal{U}$ mit $a_n \longrightarrow a$

$\Rightarrow a \in$ r.S. □

Bsp. 22.28:
$M = \mathbb{R}$ metr. Raum mit $d(\cdot,\cdot) = |\cdot - \cdot|$, $\mathcal{U} = (0,1] \cup \{2\}$

$\Rightarrow \overline{\mathcal{U}} = [0,1] \cup \{2\}$

Kor. 22.29: (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit)
Sei M ein metrischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq M$.

Dann: $\mathcal{U}$ ist abgeschlossen in M

$\Leftrightarrow \forall$ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ mit $a_n \to a \in M$ gilt: $a \in \mathcal{U}$

Beweis:
"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{U}$ abgeschlossen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$: $a_n \to a \in M$.

$\underset{22.17}{\Longrightarrow} a \in \overline{\mathcal{U}} \overset{ÜA}{\underset{\underset{\mathcal{U} \text{ abgeschl.}}{\Uparrow}}{=}} \mathcal{U}$

"$\Leftarrow$" 22.27 $\Rightarrow \overline{\mathcal{U}} = \{a \in M \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \to a\} \underset{Vor.}{\subseteq} \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}$, also abgeschlossen in M. □

G) Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz 22.30 (Bolzano-Weierstraß)

Sei M ein metrischer Raum und $A \subseteq M$.

Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

ⓐ A ist kompakt.

ⓑ Jede Folge in A hat eine konvergente TF mit GW in A.

Beweis:

ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ:

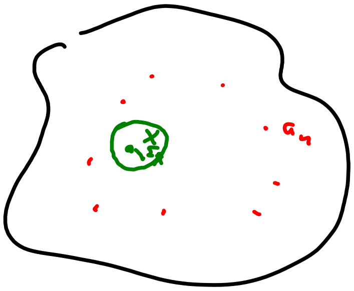
Ang.: $\exists$ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, die keine konvergente TF hat

Setze: $\mathcal{U} := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$.

$\underset{22.25}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ hat keinen Häufungspunkt

Sei $x \in A$ $\Rightarrow$ x ist kein HP von $\mathcal{U}$

$\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon_x > 0$: $U_{\varepsilon_x}(x) \cap \mathcal{U} \subseteq \{x\}$



Damit: $A \subseteq \bigcup_{x\in A} U_{\varepsilon_x}(x)$ ← offene Überdeckung von A

$\underset{A \text{ kompakt}}{\Rightarrow}$ $\exists\, x_1, \dots, x_n \in A$: $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$

$$\Rightarrow \underset{\{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}}{\underset{\|}{\mathcal{U}}} = \mathcal{U} \cap A \subseteq \mathcal{U} \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \overbrace{\left(\mathcal{U} \cap U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)\right)}^{\subseteq \{x_i\}}}_{\subseteq \{x_1, \dots, x_n\}}$$

$\Rightarrow$ $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ hat eine konstante TF

↯ $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ hat keine konv. TF

Also: jede Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A hat eine konvergente TF

$$(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underbrace{c_{n_k}}_{\substack{\cap \\ A}} \overset{????}{\in} A \text{, weil } A \text{ abgeschlossen}$$

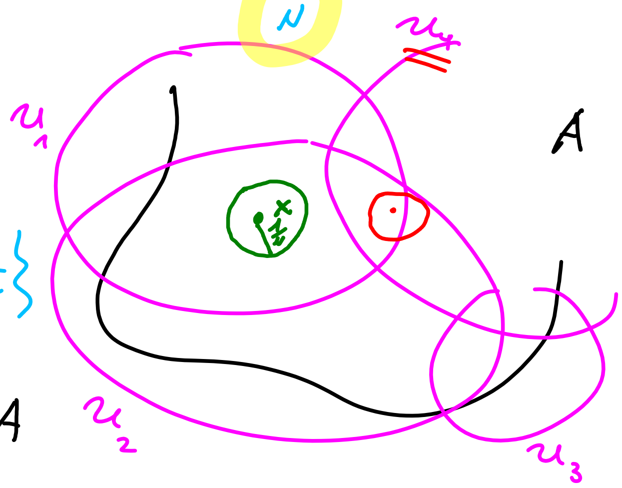
A abgeschlossen

ⓑ ⟹ ⓒ:

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A.

z.z.: $(U_i)_{i\in I}$ hat eine endl. Teilüberdeckung von A.

(*) Zeige: $\exists N\in\mathbb{N}_{\geq 1} : \forall x\in A \ \exists i\in I : U_{\frac{1}{N}}(x)\subseteq U_i$



Definiere für $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$X_n := \{x\in A \mid \exists i\in I : U_{\frac{1}{n}}(x)\subseteq U_i\}$$

$$\Rightarrow X_1\subseteq X_2\subseteq X_3\subseteq \dots\dots \subseteq A$$

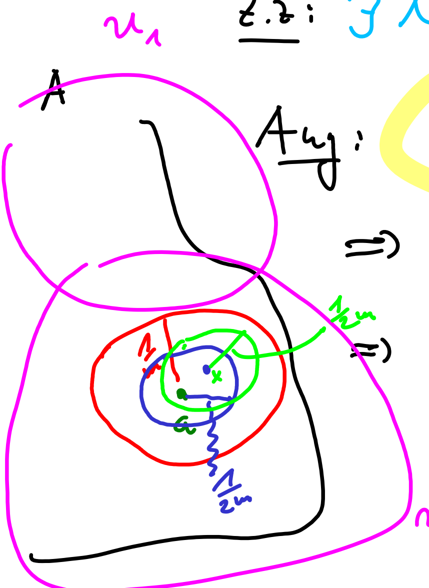
$\Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, denn: $x\in A \Rightarrow \exists i\in I : x\in U_i$

$\Rightarrow \exists n : U_{\frac{1}{n}}(x)\subseteq U_i$

U_i offen

$\Rightarrow x\in X_n$.

z.z.: $\exists N\geq 1 : A = X_N$.



Ang: $\forall n\geq 1 : A\neq X_n$, d.h. $X_n \subsetneq A$

$\Rightarrow a_n\in A\setminus X_n \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ ist Folge in A

$\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ hat eine konvergente TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\underset{\substack{\cap \\ A \\ \parallel \\ \bigcup_{n\geq 1} X_n}}{a} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$

$\Rightarrow \exists m\geq 1 : a\in X_m$

$\Rightarrow \exists i\in I : U_{\frac{1}{m}}(a)\subseteq U_i$

Sei: $x \in \mathcal{U}_{\frac{1}{2m}}(a) \Rightarrow \mathcal{U}_{\frac{1}{2m}}(x) \subseteq \mathcal{U}_{\frac{1}{m}}(a) \subseteq \mathcal{U}_i$

$y \in \mathcal{U}_{\frac{1}{2m}}(x) \Rightarrow d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a)$
$< \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{\frac{1}{2m}}(a) \subseteq X_{2m} \subseteq X_n \quad \forall n \geq 2m$

$\Rightarrow \forall n \geq 2m: \quad d(a_n, a) \geq \frac{1}{2m}$

$a_n \notin X_n \Rightarrow a_n \notin \mathcal{U}_{\frac{1}{2m}}(a)$

↯ $a_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} a$

Also: $\exists N \geq 1: \quad A = X_N \quad \Rightarrow \circledast$

Ang: $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ hat keine endl. Teilüberdeckung von A

Ziel: konstruieren rekursiv zwei Folgen $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A, so dass

① $x_n \notin \mathcal{U}_{i_0} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}$

② $\forall m < n: \quad \mathcal{U}_{\frac{1}{N}}(x_m) \in \mathcal{U}_{i_0} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}$.

Wähle i_0 beliebig in I $\Rightarrow A \notin \mathcal{U}_{i_0} \Rightarrow \exists x_0 \in A \setminus \mathcal{U}_{i_0}$

$\Rightarrow$ ① & ② sind für $n=0$ erfüllt.

Seien $i_0, \dots, i_{n-1}$ und $x_0, \dots, x_{n-1}$ mit ① & ② gefunden sind.

$\overset{A = X_N}{\Rightarrow} \exists i_n \in I: \mathcal{U}_{\frac{1}{N}}(x_{n-1}) \subseteq \mathcal{U}_{i_n} \subseteq \underbrace{\mathcal{U}_{i_0} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}}_{\not\supseteq A \text{ n. Vsv.}} \Rightarrow$ ②

$\Rightarrow \exists x_n \in A \setminus (\mathcal{U}_{i_0} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}) \Rightarrow$ ①

Damit gilt für $0 \leq m < n$:

$$x_n \underset{②}{\notin} U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_n} \supseteq U_{\frac{1}{N}}(x_m)$$

$$\Rightarrow \quad d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{N}$$

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält keine TF, die eine CF ist

$\underset{22.23}{\Rightarrow}$ " " " " , " konvergent ist

↯ UV. ⑤

Also: $(U_i)_{i\in I}$ hat eine endl. Teilüberdeckung von A

$\Rightarrow$ A ist kompakt. □

Bsp. 22.31:

$[a,b]$ sind kompakt in $\mathbb{R}$.

Denn:

$[a,b]$ ist beschränkt $\underset{11.26}{\overset{BW}{\Longrightarrow}}$ jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \underset{22.27}{\in}$ Abschluss von $[a,b]$ in $\mathbb{R} \overset{\uparrow}{=} [a,b]$

$[a,b]$ abgeschlossen

$\underset{22.30}{\overset{BW}{\Longrightarrow}}$ $[a,b]$ ist kompakt. □

Korollar 22.32:

Ist M kompakt und A abgeschlossen in M, dann ist A kompakt.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge in M

$\underset{22.30}{\overset{M\ \text{kompakt}}{\Longrightarrow}}$ $\exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \in M \underset{A\ \text{abg.}}{\overset{22.27}{\Longrightarrow}} a \in A \underset{22.30\ BW}{\Longrightarrow} A$ kompakt. □

H) Äquivalente Normen

Def. 22.33

Seien $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ zwei Normen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V.

Dann: $|\cdot|$ heißt äquivalent zu $\|\cdot\|$

$:\Longleftrightarrow$ $\exists\ r, s > 0 \ :\ \forall x \in V$ gilt: $s \cdot |x| \leq \|x\| \leq r \cdot |x|$

Bemerkung 22.34:

Die Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Reflexivität: $r = s = 1$

Symmetrie: $\forall x :$ $s \cdot |x| \leq \|x\| \leq r \cdot |x| \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r} \cdot \|x\| \leq |x| \leq \frac{1}{s} \cdot \|x\|$

Transitivität: $\forall x$:

$$\left.\begin{array}{l} s \cdot |x| \leq \|x\| \leq r \cdot |x| \\ s' \cdot \|x\| \leq |||x||| \leq r' \cdot \|x| \end{array}\right\} \Longrightarrow s \cdot s' \cdot |x| \leq s' \cdot \|x\| \leq |||x||| \leq r' \cdot \|x\| \leq r \cdot r' \cdot |x|$$

$\boxed{S}$

Bemerkung 22.35:

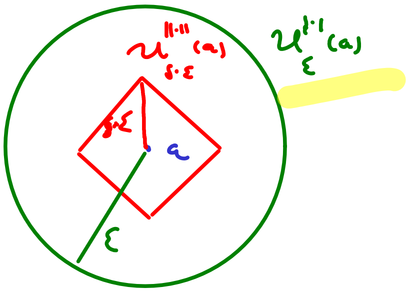
Seien $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ zwei äquivalente Normen auf V,

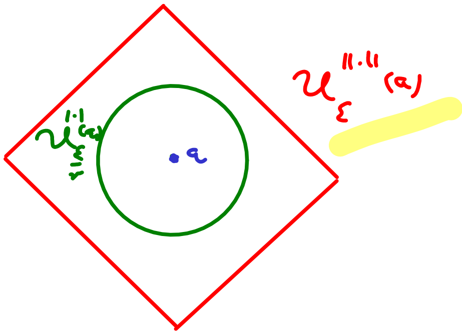
d.h. $\exists\ r, s > 0 \ :\ \forall x \in V :\ s \cdot |x| \leq \|x\| \leq r \cdot |x|$

Notation:

- $\mathcal{U}^{|\cdot|}_{\varepsilon}(a) = \{x \in V \mid |x - a| < \varepsilon\}$ = ε-Umgebung von a bez. $|\cdot|$
- $\mathcal{U}^{\|\cdot\|}_{\varepsilon}(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$ = ε-Umgebung von a bez. $\|\cdot\|$

Dann: $\mathcal{U}^{\|\cdot\|}_{s \cdot \varepsilon}(a) \subseteq \mathcal{U}^{|\cdot|}_{\varepsilon}(a)$ und $\mathcal{U}^{|\cdot|}_{\frac{\varepsilon}{r}}(a) \subseteq \mathcal{U}^{\|\cdot\|}_{\varepsilon}(a)$





Konsequenz: $\mathcal{U} \subseteq V$, $A \subseteq V$, $a \in V$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in V

Eigenschaften bzgl. $\lvert\cdot\rvert$		Eigenschaften bzgl. $\lVert\cdot\rVert$
a ist innerer Punkt von $\mathcal{U}$.	$\Longleftrightarrow$	a ist innerer Punkt von $\mathcal{U}$.
a ist Randpunkt von $\mathcal{U}$.	$\Longleftrightarrow$	a ist Randpunkt von $\mathcal{U}$.
a ist Häufungspunkt von $\mathcal{U}$.	$\Longleftrightarrow$	a ist Häufungspunkt von $\mathcal{U}$.
$\mathcal{U}$ ist beschränkt.	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{U}$ ist beschränkt.
$\mathcal{U}$ ist offen in V.	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{U}$ ist offen in V.
A ist abgeschlossen in V.	$\Longleftrightarrow$	A ist abgeschlossen in V.
A ist kompakt.	$\Longleftrightarrow$	A ist kompakt.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.	$\Longleftrightarrow$	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.	$\Longleftrightarrow$	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Bem. 22.36

Lemma 22.41 $\Longrightarrow$ jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zu $\lVert\cdot\rVert_\infty$

$\underset{22.34}{\Longrightarrow}$ je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

$\Longrightarrow$ es ist egal, welche Norm wir auf $\mathbb{R}^n$ verwenden

ABER: bis zum Beweis von 22.41 betrachten wir den $\mathbb{R}^n$ nur mit der Maximumsnorm $\lVert\cdot\rVert_\infty$.

I) Der Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$

Def. 22.37

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$ mit $a_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$.

Dann heißt $(a_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ die i-te Komponentenfolge von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Prop. 22.38

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^n$.

Dann, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = c \iff \forall i = 1, \dots, n: \lim\limits_{k\to\infty} a_{ki} = c_i$.

Beweis:

"$\Longrightarrow$" $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = c$ bzgl. der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$

$$\begin{tikzcd} \Rightarrow \quad 0 \arrow[d, "k\to\infty"] & \le |a_{ki} - c_i| \arrow[dd, "k\to\infty"] & \le \max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} \{|a_{kj} - c_j|\} = \|a_k - c\|_\infty \arrow[d, "k\to\infty"] \\ 0 \arrow[dr, Rightarrow] & & 0 \arrow[dl, Rightarrow] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{ki} = c_i$

"$\Longleftarrow$" $\forall i: \lim\limits_{k\to\infty} a_{ki} = c_i \Rightarrow \forall i: \lim\limits_{k\to\infty} |a_{ki} - c_i| = 0$

$\Rightarrow \overset{\|a_k - c\|_\infty}{\overset{\shortparallel}{\max}} \{|a_{k1} - c_1|, \dots, |a_{kn} - c_n|\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = c$ ☒

Bsp. 22.39:

$n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} \frac{2n^3+1}{n^3+n} \\ (1+\frac{1}{n})^n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{1} = 2$

$\xrightarrow{n\to\infty} e$

Satz von Bolzano-Weierstraß 22.40

Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis durch Induktion nach n:

$\underline{n=1}$: 11.26

$\underline{n-1 \mapsto n}$: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$

Setze: $a_k = \begin{pmatrix} a_k' \\ a_{kn} \end{pmatrix}$ mit $a_k' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\text{Vor.} \Rightarrow \exists\, r>0 : \forall k \in \mathbb{N} : \|a_k\|_\infty \le r$$

$$\|a_k\|_\infty = \max\{|a_{ki}| \mid i = 1, \dots, n\}$$

$$\max\{|a_{ki}| \mid i = 1, \dots, n\} \ge \max\{|a_{k1}|, \dots, |a_{kn-1}|\} = \|a_k'\|_\infty \text{ im } \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\max\{|a_{ki}| \mid i = 1, \dots, n\} \ge |a_{kn}|$$

$\Rightarrow$ $(a_k')_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}^{n-1}$ bez. $\|\cdot\|_\infty$ und

$(a_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ " " in $\mathbb{R}$ bez. $|\cdot|$

$\underset{\text{Ind.}}{\Rightarrow}$ $\exists$ konv. TF $(a'_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $a'_{k_\ell} \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{\ell\to\infty} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} =: c'$

$\underline{\text{und}}$ $(a_{k_\ell n})_{\ell\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$

$\underset{11.26}{\overset{\text{BW}}{\Rightarrow}}$ $\exists$ konv. TF $(a_{k_{\ell_j} n})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $a_{k_{\ell_j} n} \xrightarrow{j\to\infty} c_n \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \max\{|a_{k_{\ell_j} 1} - c_1|, \dots, |a_{k_{\ell_j} n-1} - c_{n-1}|, |a_{k_{\ell_j} n} - c_n|\} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\max\{|a_{k_{\ell_j} 1} - c_1|, \dots, |a_{k_{\ell_j} n} - c_n|\} = \|a_{k_{\ell_j}} - c\|_\infty \qquad \Rightarrow \lim_{j\to\infty} a_{k_{\ell_j}} = c$$

$\square$

7) Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Lemma 22.41

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Dann: $\exists\, r, s > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $s \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq r \cdot \|x\|_\infty$.

Beweis:

Sei $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Setze: $r := \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$.

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \|x\| = \Big\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \Big\| \leq \sum_{i=1}^n \| x_i \cdot e_i \| = \sum_{i=1}^n \overbrace{|x_i|}^{\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} = \|x\|_\infty \,\Downarrow} \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \boxed{\|x\|_\infty} \cdot \|e_i\|$$

$$\| \quad r \cdot \|x\|_\infty$$

Angenommen: $\nexists\, s > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : s \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|$

Sei $k \geq 1$ beliebig $\Rightarrow \exists\, x_k \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} \cdot \|x_k\|_\infty > \|x_k\|$

Setze: $y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|y_k\|_\infty = \frac{\|x_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty} = 1 \quad \forall k$

$\Downarrow$

$(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Downarrow$ BW 22.40

$\exists$ TF $(y_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$y_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} a$ bzw. $\|\cdot\|_\infty$

$\Updownarrow$

$\|y_{k_j} - a\|_\infty \xrightarrow{j \to \infty} 0$

Zudem: $0 \leq \|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_\infty} < \frac{1}{k}$

$k \to \infty$: $0 \downarrow 0$, $\frac{1}{k} \downarrow 0$ $\Rightarrow$ $\|y_k\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$ ⊛

$$\Leftarrow \quad 0 \leq \|a\| \leq \|a - y_{k_j}\| + \|y_{k_j}\|$$

$$\leq r \cdot \underbrace{\|a - y_{k_j}\|_\infty}_{\downarrow j \to \infty \;\; r \cdot 0 = 0} + \underbrace{\|y_{k_j}\|}_{\downarrow j \to \infty \text{ wegen ⊛} \;\; 0} \xrightarrow{j \to \infty} 0$$

$$\Longrightarrow \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 1 = \|y_{k_j}\|_\infty \leq \|y_{k_j} - a\|_\infty + \overset{0}{\overset{\|}{\widehat{\|a\|_\infty}}} = \|y_{k_j} - a\|_\infty \xrightarrow{j \to \infty} 0 \quad ↯$$

$\boxed{\xi}$

Bsp. 22.42:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \qquad \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\cdot \|x\|_\infty$$

Kor. 22.43:

Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Beweis:

Äquivalenz von Normen ist eine ÄRel. 22.34 + Lemma 22.41. ∎

AB JETZT: Egal, welche Norm wir auf $\mathbb{R}^n$ verwenden!

K) Der Satz von Heine-Borel

Satz von Heine-Borel 22.44

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dann: A ist kompakt $\Longleftrightarrow$ A ist abgeschlossen & beschränkt.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Satz 22.21

"$\Leftarrow$" Sei A abgeschlossen & beschränkt.

Sei zudem $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A

$\Rightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\underset{BW}{\overset{22.40}{\Longrightarrow}} \exists$ TF $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}: a_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} a$

$\underset{A \text{ abg.}}{\overset{22.29}{\Longrightarrow}} a \in A \underset{\substack{BW\\22.30}}{\Longrightarrow} A$ ist kompakt. ∎

Bsp. 22.45:

ⓐ $\overline{U_\varepsilon(0)} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \le \varepsilon \}$ ist abgeschlossen & beschränkt, also kompakt!

ⓑ Quader: $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} a_i \le x_i \le b_i \\ \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$ ist eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

Denn:

- klar: Q ist beschränkt
- sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in Q mit $x_k \longrightarrow x$

$$\overset{22.18}{\Longrightarrow} \underset{\substack{\cap \\ [a_i, b_i]}}{x_{ki}} \longrightarrow x_i \Longrightarrow x_i \in [a_i, b_i] \Longrightarrow x \in Q$$

$\Longrightarrow$ Q ist abgeschlossen. $\square$

ⓒ Abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ sind genau die kompakten Intervalle!

ⓓ $S^{n-1} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1 \}$ = $n-1$-dim Einheitssphäre ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Kor. 22.46

Sei $\underset{\neq \emptyset}{A} \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann: $\inf(A) = \min(A)$ und $\sup(A) = \max(A)$.

Beweis: $\emptyset \neq A$ kompakt $\Longrightarrow {}^{\emptyset \neq}A$ beschränkt $\Longrightarrow \exists \inf(A)$ & $\sup(A)$

$$\underset{11.22}{\Longrightarrow} \left. \begin{array}{l} \exists \text{ Folge } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } A \text{ mit } a_k \longrightarrow \inf(A) \\ \exists \quad \text{"} \quad (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } A \quad \text{"} \quad b_k \longrightarrow \sup(A) \end{array} \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } A \\ \text{abgeschlossen}}}{\in} A \quad \square$$

L) Vollständige metrische Räume

Def. 22.47

ⓐ Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

ⓑ Ein normierter Raum heißt Banachraum, wenn er als metr. Raum vollständig ist.

ⓒ Ein euklidischer Raum heißt Hilbertraum, wenn er bzgl. der euklidischen Norm ein Banachraum ist.

Satz 22.48 (Cauchykriterium)

Jede Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^n$ konvergiert.

Beweis:

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine CF im $\mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall k > l \geq n_\varepsilon : \quad d(a_k, a_l) < \varepsilon$$

$$d(a_k, a_l) = \|a_k - a_l\|_2 \geq |a_{ki} - a_{li}| \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \forall i : \quad (a_{ki})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine CF in } \mathbb{R}$$

$$\overset{\text{CK}}{\underset{11.30}{\Rightarrow}} \quad (a_{ki})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent, d.h. } \exists a_i \in \mathbb{R} : a_{ki} \xrightarrow{k\to\infty} a_i$$

$$\underset{22.38}{\Rightarrow} \quad a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

□

Korr. 22.49:

$\mathbb{R}^n$ ist bzgl. jeder Norm ein Banachraum und bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ein Hilbertraum.

M) Reihen in Banachräumen

Def. 22.50:

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V.

ⓐ · $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt n-te Partialsumme von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

· $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die durch $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definierte Reihe.

· Die Reihe heißt konvergent, wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist als Folge.

· Notation: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet die Reihe und ihren Grenzwert.

ⓑ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ konvergent ist.

Prop. 22.51

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe im Banachraum $(V, \|\cdot\|)$.

Dann: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent und $\forall k : \left\|\sum_{n=k}^{\infty} a_n\right\| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \|a_n\|$.

Beweis:

Wörtlich wie Lemma 12.17 mit $|\cdot|$ ersetzt durch $\|\cdot\|$!

Konkret:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$\overset{\text{C.K. für } \sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|}{\implies} \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \right| < \varepsilon$$

$$\implies \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \underset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \right| < \varepsilon$$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| = \|s_m - s_n\| \implies (s_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist C.F.} \overset{V \text{ Banachraum}}{\implies} (s_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergent.}$$

□

§ 23 Stetigkeit in metrischen und normierten Räumen

Generalvoraussetzung

In diesem Abschnitt wollen wir folgendes voraussetzen:

- (M, d) und (M', d') sind metrische Räume.
- V ist ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_V$.
- W " " " " " $\|\cdot\|_W$.
- Die Metrik zu $\|\cdot\| = \|\cdot\|_V$ bezeichnen wir mit $d = d_V$.
- $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ betrachten wir mit einer beliebigen Norm.

A) Grenzwerte in metrischen und normierten Räumen

Def. 23.1

Sei $\mathcal{U} \subseteq M$, $a \in M$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{U}$ und $f : \mathcal{U} \to M'$.

Dann: $y \in M'$ heißt Grenzwert von f in a

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U} \text{ mit } 0 < d(x,a) < \delta_\varepsilon \text{ gilt } d'(f(x), y) < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : f\left(\mathcal{U}_{\delta_\varepsilon}(a) \cap (\mathcal{U} \setminus \{a\})\right) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(y)$$

Notation: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$ oder $f(x) \longrightarrow y$ für $x \to a$

Wir sagen auch $f(x)$ konvergiert gegen y für x gegen a.

Prop. 23.2 (Folgenkriterium für GWe von Abbildungen)

Sei $\mathcal{U} \subseteq M$, $a \in M$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{U}$ und $f : \mathcal{U} \to M'$.

Dann sind gleichwertig:

ⓐ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$

ⓑ $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = y$.

Beweis: wörtlich wie in Prop. 13.7, wenn wir die Betragsdifferenz durch d bzw. d' ersetzen. $\blacksquare$

Bem. 23.3

Der Grenzwert einer Abbildung $f: \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\cap}}{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ hängt nicht von den Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ab.

Lemma 23.4

Sei $\mathcal{U} \subseteq \Omega$, $a \in \Omega$ ein HP von $\mathcal{U}$ und $f: \mathcal{U} \longrightarrow \Omega$!

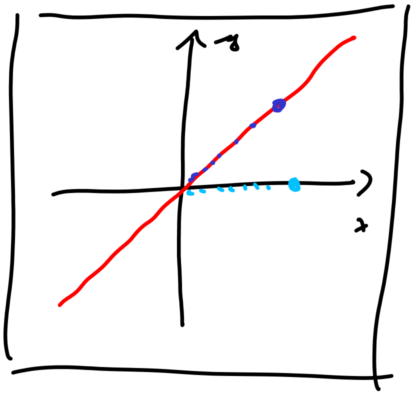
Dann, der GW von f in a ist eindeutig bestimmt!

Beweis Wie in Prop. 23.10. □

Bsp. 23.5

Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\binom{0}{0}\right\}$ und $a = \binom{0}{0} \in HP(\mathcal{U})$.

ⓐ · $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}: \binom{x}{y} \longmapsto \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$



· $a_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \binom{0}{0} = a$

$$\Rightarrow f(a_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

$\neq$

· $b_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \binom{0}{0} = a$

$$\Rightarrow f(b_n) = \frac{0 \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = 0 \longrightarrow 0$$

Also: $\lim\limits_{\binom{x}{y} \to a} f(x,y)$ existiert nicht!!!

Beachte: $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0 = \lim\limits_{y \to 0} f(0,y)$

Es reicht nicht, sich auf den Koordinatenachsen dem Punkt $\binom{0}{0}$ zu nähern, damit der GW existiert!!!

ⓑ $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} ; \binom{x}{y} \longmapsto \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow \left| g(x,y) - 0 \right| = \frac{\overbrace{|x|}^{\le \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \overbrace{|y|}^{\le \sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} = \sqrt{x^2+y^2} = \left\| \binom{x}{y} \right\|_2$$

Damit: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \binom{0}{0} = a$

$$\Rightarrow \| a_n \|_2 = \| a_n - a \|_2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow | g(a_n) - 0 | \le \| a_n \|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\binom{x}{y} \to a} f(x,y) = 0$$

Proposition 23.6 (Grenzwertsätze für Abb. in normierten Räumen)

Sei $\mathcal{U} \subseteq M$, $a \in M$ ein HP von $\mathcal{U}$, $c \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathcal{U} \longrightarrow V$.

Wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existieren, dann gelten:

ⓐ $\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f)(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

ⓑ $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

ⓓ $V = \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

ⓔ $V = \mathbb{R} \wedge \lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0 \Rightarrow a \in HP(\{ x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0 \})$

und $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{f} \right)(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Beweis:

Wie in Prop. 13.10

$\boxtimes$

B) Stetigkeit in metrischen und normierten Räumen

Def. 23.7

Sei $f: M \longrightarrow M'$ eine Abbildung und $a \in M$.

Dann: f heißt stetig in a

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in M$ mit $d(x,a) < \delta_\varepsilon$ gilt: $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : f(U_{\delta_\varepsilon}(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$.

Zudem:

f heißt stetig (auf M), wenn f stetig in jedem Punkt von M ist.

Lemma 23.8

Sei $f: M \longrightarrow M'$ und $a \in HP(M)$.

Dann: f ist stetig in a $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Beweis

folgt unmittelbar aus den Def. für GW & Stetigkeit. ⊠

Beispiel 23.9

ⓐ Sei M ein beliebiger metr. Raum und $c \in M$ fest gegeben.

$\Longrightarrow d(\cdot, c): M \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d(x,c)$ ist stetig auf M.

Denn:

Sei $a \in M$ und $\varepsilon > 0$. Setze: $\delta_\varepsilon := \varepsilon > 0$.

Sei dann $x \in M$ mit $d(x,a) < \delta_\varepsilon = \varepsilon$.

$\Longrightarrow$

- $d(x,c) - d(a,c) \leq d(x,a)$

  $\Uparrow$

  $d(x,c) \leq d(x,a) + d(a,c)$

  $\Uparrow$ Δ-Ungl

- $d(a,c) - d(x,c) \leq d(x,a)$

  $\Uparrow \quad \|$

  $d(a,c) \leq d(a,x) + d(x,c)$

$$|d(x,c) - d(a,c)| \leq d(x,a) < \delta_\varepsilon = \varepsilon$$

$\Downarrow$

$d(\cdot,c)$ ist stetig in a. ⊠

ⓑ Sei V ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_V$.

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig

Beweis: Wende ⓒ mit $c = 0$ an !?

ⓒ Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig bzw. $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis:

$\|\cdot\|$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow \exists\, r > 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\| \leq r \cdot \|x\|_\infty$.

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{r} > 0$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - a\|_\infty < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \big| \|x\| - \|a\| \big| \leq \|x - a\| \leq r \cdot \underbrace{\|x - a\|_\infty}_{< \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{r}} < r \cdot \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ ist stetig in a bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. ☒

Satz 23.10 (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Sei $f : M \longrightarrow M'$ und $a \in M$.

Dann: f ist stetig in a

$\Leftrightarrow$ $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$.

Beweis:

geht wörtlich wie in Satz 14.5. ☒

Bem. 23.11:

Stetigkeit von Abb. von $\overset{\mathbb{R}^k}{\overset{\cup}{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist unabhängig von der gewählten Normen, weil die Konvergenz von Folgen unabhängig davon ist.

Bsp. 23.12:

$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_i$, die Projektion auf i-te Komponente, ist stetig auf $\mathbb{R}^n$

Denn:

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k \to \infty} a_k = a$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \pi_i(a_k) \arrow[d, equal] & \pi_i(a) \arrow[d, equal] \\ a_{ki} \arrow[r] & a_i \end{tikzcd} \qquad \square$$

C) Einfache Eigenschaften stetiger Funktionen

Prop. 23.13

Seien $f : M \to V$ und $g : M \to V$ stetig in $a \in M$ und sei $c \in \mathbb{R}$.

ⓐ $c \cdot f$, $f + g$ und $f - g$ sind stetig in a.

ⓑ $V = \mathbb{R} \Rightarrow f \cdot g$ ist stetig in a.

ⓒ $V = \mathbb{R} \wedge g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} : M \setminus \{x \in M \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig in a.

Beweis:

Mit Hilfe des Folgenkriteriums wörtlich wie in 14.7. $\square$

Bsp. 23.14 (Polynomfunktionen und rationale Funktionen)

Seien $t_1, \dots, t_n$ Veränderliche und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Dann:

- $t := (t_1, \dots, t_n)$ und $t^\alpha := t_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\alpha_n}$
- $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ heißt der Grad des Monoms t^α
- $p = \sum_{|\alpha|=0}^{d} a_\alpha \cdot t^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ 0 \le |\alpha| \le d}} a_\alpha \cdot t_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\alpha_n}$ mit $a_\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Polynom in $t_1, \dots, t_n$
- $\deg(p) := \sup\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ heißt Grad von p , $\deg(0) \overset{!}{=} -\infty$
- $\mathbb{R}[t] = \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n] := \{p \mid p \text{ Polynom in } t_1, \dots, t_n \text{ mit Koeffizienten in } \mathbb{R}\}$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow p(x) := \sum_{|\alpha|=0}^{d} a_\alpha \cdot \underbrace{x^\alpha}_{= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}$ für $p = \sum_{|\alpha|=0}^{d} a_\alpha \cdot t^\alpha$ $\leftarrow$ Multiindexnotation

Seien $p, q \in \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$ mit $q \neq 0$.

Dann heißt $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto p(x)$ eine Polynomfunktion

und $\frac{p}{q} : \mathbb{R}^n \setminus \{x \mid q(x) = 0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion.

Bemerkung: 23.13 $\Rightarrow$ p & $\frac{p}{q}$ stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Prop. 23.15

Seien (M, d), (M', d') & (M'', d'') metrische Räume und sei:
$f : M \to M'$ stetig in $a \in M$ und $g : M' \longrightarrow M''$ stetig in $f(a) \in M'$.
Dann ist $g \circ f$ stetig in a.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

$$\Rightarrow (g \circ f)(a_n) = g\Big(\underbrace{f(a_n)}_{\substack{\downarrow \text{ da } f \text{ stetig in } a \\ f(a)}}\Big) \xrightarrow[\text{g stetig in } f(a)]{} g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

$\underset{\substack{\text{Folgenkrit.} \\ 23.10}}{\Rightarrow}$ $g \circ f$ ist stetig in a. $\square$

Beispiel 23.16:

- $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \binom{x}{y} \mapsto x^2 + y^2$ ist stetig als Polynomfkt.
- $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \sqrt{z}$ ist stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$\}$ $\overset{23.15}{\Rightarrow}$

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \binom{x}{y} \longmapsto \underset{\left\|\binom{x}{y}\right\|_2}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{x^2 + y^2}}}} \text{ ist stetig}$$

Prop. 23.17

Sei $f : M \longrightarrow M'$ eine Abbildung.

Dann sind Ä:

ⓐ f ist stetig auf M.

ⓑ $\forall\, O \subseteq M'$ offen gilt: $f^{-1}(O)$ ist offen in M

ⓒ $\forall\, A \subseteq M'$ abgeschlossen gilt: $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in M.

Beweis:

ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ: Sei f stetig und $\mathcal{O} \subseteq M'$ offen und $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$

z.z.: a ist ein innerer Punkt von $f^{-1}(\mathcal{O})$,
d.h. $\exists$ offene Umgebung von a, die in $f^{-1}(\mathcal{O})$ liegt.

$\mathcal{O}$ offen in M' und $f(a) \in \mathcal{O} \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(f(a)) \subseteq \mathcal{O}$

$$\underset{\substack{f \text{ stetig} \\ \text{in } a}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \quad f\big(\mathcal{U}_{\delta_\varepsilon}(a)\big) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(a)) \subseteq \mathcal{O}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}_{\delta_\varepsilon}(a) \subseteq f^{-1}\Big(f\big(\mathcal{U}_{\delta_\varepsilon}(a)\big)\Big) \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$$

Also: $f^{-1}(\mathcal{O})$ ist offen.

ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ: Sei $a \in M$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(f(a)) \text{ ist offen in } M' \underset{\text{Vor. ⓑ}}{\Longrightarrow} \underbrace{f^{-1}\big(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a))\big)}_{\substack{\ni \\ a}} \text{ offen in } M$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \quad \mathcal{U}_\delta(a) \subseteq \underbrace{f^{-1}\big(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a))\big)}$$

$$\Rightarrow \quad f\big(\mathcal{U}_\delta(a)\big) \subseteq f\Big(f^{-1}\big(\mathcal{U}_\varepsilon(f(a))\big)\Big) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(a))$$

$\Rightarrow$ f ist stetig in a $\Longrightarrow$ f stetig auf M. .

ⓑ ⇒ ⓒ: Sei $A \subseteq M'$ abgeschlossen

$$\Rightarrow M' \setminus A \text{ ist offen } \underset{\text{Vor.ⓑ}}{\Longrightarrow} f^{-1}(M' \setminus A) \text{ offen in } M$$

$$\| $$

$$f^{-1}(M') \setminus f^{-1}(A) = M \setminus f^{-1}(A)$$

$\Rightarrow f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in M

ⓒ ⇒ ⓑ: Sei $O \subseteq M'$ offen

$$\Rightarrow M' \setminus O \text{ abgeschlossen } \underset{\text{Vor.ⓒ}}{\Longrightarrow} f^{-1}(M' \setminus O) \text{ abgeschlossen in } M$$

$$f^{-1}(M') \setminus f^{-1}(O) = M \setminus f^{-1}(O)$$

$\Rightarrow f^{-1}(O)$ ist offen in M.

$\boxed{S}$

D) Stetigkeit von Abbildungen nach $\mathbb{R}^m$

Def. 23.18:

Sei $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ eine Abbildung.

Dann heißt $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ die i-te Komponentenfunktion von f.

Satz 23.19:

Sei $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $a \in M$.

ⓐ $\lim_{x \to a} f(x) = y \iff \forall i = 1, \dots, n : \lim_{x \to a} f_i(x) = y_i$

ⓑ f stetig in $a \iff \forall i = 1, \dots, n : f_i$ stetig in a.

Beweis:

ⓐ Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $a_n \neq a$ $\forall n$.

$$\Rightarrow \left(f(a_n) \longrightarrow y \underset{22.36}{\iff} \forall i = 1, .., n : f_i(a_n) \longrightarrow y_i \right)$$

$\Rightarrow$ ⓐ mit Folgenkrit. für GWe.

ⓑ analog.

$\boxed{S}$

Bsp. 23.20

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \binom{x}{y} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{xy}{x^2+y^2} \\ x^3+5xy \end{pmatrix}$ ist stetig,

weil die Komponentenfkt. als rationale Fkt. bzw. als Polynomfkt. stetig sind !

(b) $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \longmapsto A \cdot x$ ist ein linearer Abb.

mit Komponentenfunkt. $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$

(ist ein Polynomfkt.)

$\Longrightarrow$ f_A ist stetig !

Bsp. 23.21:

- $Mat_n(\mathbb{R}) = \{ A \mid A = n \times n\text{-Matrix über } \mathbb{R} \} \hat{=} \mathbb{R}^{n^2}$
- $\det : Mat_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : (a_{ij}) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

  ist eine Polynomfunktion und damit stetig
- $\det^{-1}(0) = \det^{-1}(\{0\}) = \{ A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0 \}$

  ist abgeschlossen nach 23.17
- $Gl_n(\mathbb{R}) = \{ A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0 \} = Mat_n(\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(0)$

  ist offen in $Mat_n(\mathbb{R})$
- $Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Mat_n(\mathbb{R}) \hat{=} \mathbb{R}^{n^2} : A \longmapsto A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$

  hat rationale Fkt. als Komponentenfkt., ist also stetig !

Bem. 23.22:

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abb. und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Definiere: $F_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n)$

ⓐ f stetig in $y \Rightarrow F_i$ stetig in y_i $(\forall i = 1, \dots, n)$

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_k \longrightarrow y_i$:

$$\Rightarrow \underset{\hat{a}_k :=}{} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ a_k \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \underset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} \underset{F_i(a_k)}{\underset{\|}{f(\hat{a}_k)}} \longrightarrow \underset{F_i(y_i)}{\underset{\|}{f(y)}}$$

ⓑ $\forall i = 1, \dots, n : F_i$ stetig in $y_i \not\Rightarrow f$ stetig in y

Bsp. 23.5 $\Rightarrow f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

ist nicht stetig in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

weil $\lim\limits_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} f\binom{x}{y}$ nicht existiert!

Aber: $\left.\begin{array}{l} F_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 0 \\ F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \longmapsto 0 \end{array}\right\}$ sind stetig in 0

Sage: f stetig $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ f getrennt stetig

E) Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Satz 23.23

Ist M kompakt und $f : M \to M'$ stetig, dann ist $f(M)$ kompakt.

Beweis:

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(M)$

$\Rightarrow \exists\, a_n \in M : f(a_n) = b_n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge in M

$\underset{\substack{BW\\22.30}}{\Rightarrow} \exists$ TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a \in M$

$\underset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} \underset{\substack{\parallel\\ b_{n_k}}}{f(a_{n_k})} \xrightarrow[k\to\infty]{} f(a) \in f(M) \underset{\substack{BW\\22.30}}{\Rightarrow} f(M)$ kompakt.

☐

Kor. 23.24

Sei $f: M \to \mathbb{R}$ stetig und M kompakt.

Dann: $\exists\, c,d \in M : \forall x \in M : f(c) \le f(x) \le f(d)$

Beweis:

$23.23 \Rightarrow f(M)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$

$\underset{22.46}{\Rightarrow}$ Min & Max wird in $f(M)$ angenommen. ☐

Korollar 23.25 (Umkehrsatz für inj. Abb. auf Kompakta)

Sei $f: M \to M'$ stetig und injektiv und sei M kompakt.

Dann: $f^{-1}: f(M) \to M$ ist stetig.

Beweis:

- f injektiv $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: f(M) \to M$
- z.z.: f^{-1} ist stetig, d.h. $\forall A \subseteq M$ abg. gilt: $(f^{-1})^{-1}(A) \subseteq f(M)$ ist abgeschlossen

Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen $\Rightarrow (f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$

Direkt: A ist abgeschlossen in M und M kompakt

$\underset{22.32}{\Rightarrow}$ A kompakt $\underset{23.23}{\Rightarrow}$ $f(A)$ ist kompakt

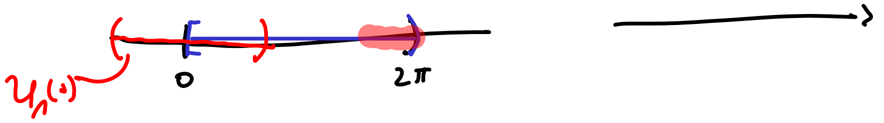
$\underset{22.21}{\Rightarrow}$ $f(A)$ ist abgeschlossen in M' und damit auch in $f(M)$

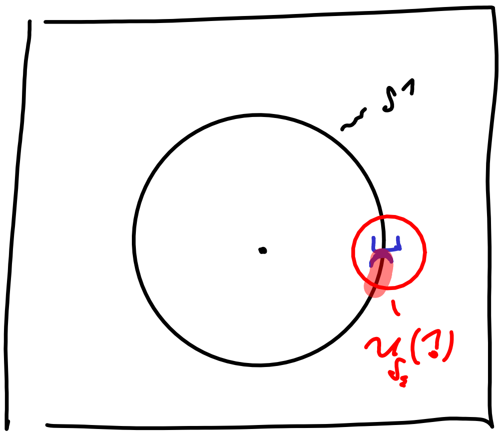
$\boxed{}$

Bsp. 23.26

$f: [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

ist stetig und injektiv





$\Rightarrow f^{-1}: \operatorname{Im}(f) \longrightarrow [0, 2\pi)$

$\phantom{\Rightarrow f^{-1}: }\ \ \, \|$

$\phantom{\Rightarrow f^{-1}: }\ \ S^1$

ist nicht stetig

denn: Ang. f^{-1} ist stetig in $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für $\varepsilon = 1$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$: $f^{-1}\left(U_{\delta_\varepsilon}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \subseteq U_1\left(f^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = U_1(0)$

↯

$\boxed{}$

F) Gleichmäßige Stetigkeit

Def. 23.27

Eine Abbildung $f: M \to M'$ heißt gleichmäßig stetig auf M

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x, y \in M$ mit $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ gilt $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x \in M$ gilt $f(U_{\delta_\varepsilon}(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$

Bem. 23.28

f stetig auf M $\Leftrightarrow$ $\forall a \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{\varepsilon, a} > 0: f(U_{\delta_{\varepsilon,a}}(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$

$\Uparrow$

f glm. stetig auf M $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall a \in M: f(U_{\delta_\varepsilon}(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$

Satz 23.29:

Sei $f: M \to M'$ stetig und M kompakt.

Dann: f ist glm. stetig auf M.

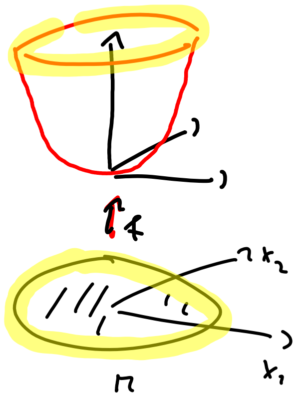
Beweis:

wörtlich wie in Satz 14.28. $\square$

Beispiel 23.30

(Betrachte den $\mathbb{R}^2$ mit $\|\cdot\|_\infty$.)

Setze: $M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$ = abgeschl. Kreisscheibe vom Radius 1 um den Ursprung



und $f: M \to \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2$ stetig

Beachte: M abgeschl. & beschränkt, also kompakt!

$\Rightarrow$ f ist glm. stetig auf M.

D.h. Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \underset{\substack{\| \\ \max\{|x_1-y_1|,\, |x_2-y_2|\}}}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty} < \delta_\varepsilon$$

$$\text{gilt: } \underset{\substack{\| \\ |x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2|}}{|f(x) - f(y)|} < \varepsilon$$

Bestimme δ_ε: Zeige: $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{4}$ tut's !!!

Sei $\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$.

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| = |x_1+y_1| \cdot |x_1-y_1| + |x_2+y_2| \cdot |x_2-y_2|$$

$$\leq (|x_1| + |y_1|) \cdot |x_1-y_1| + (|x_2|+|y_2|) \cdot |x_2-y_2|$$

$$\leq 2 \cdot |x_1-y_1| + 2 \cdot |x_2-y_2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Nebenrechnung:

- $|x_1| = \sqrt{x_1^2} \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq \sqrt{1} = 1$
- $|x_2| = \sqrt{x_2^2} \leq \text{- - - - - -} \leq 1$
- $|y_1| = \text{- - - - - - - - - -} \leq 1$
- $|y_2| \text{ - - - - - - - - - -} \leq 1$

G) Lipschitz-Stetigkeit

Def. 23.31

Eine Abbildung $f: M \to M'$ heißt Lipschitz-stetig

$:\Leftrightarrow \exists q > 0 : \forall x, y \in M$ gilt: $d'(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$

q heißt dann auch Lipschitzkonstante für f.

Bsp. 23.32:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto a \cdot x$ eine lineare Abb., dann gilt

$|f(x) - f(y)| = |ax - ay| = |a| \cdot |x - y|$ und f ist Lipschitz-stetig mit $q = |a|$

wenn $a \neq 0$

Prop. 23.33:

$f: M \to M'$ Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f ist glm. stetig auf M

Beweis: Sei $q > 0$ eine Lipschitzkonstante für f.

Sei $\varepsilon > 0$. Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{q} > 0$.

Sei $x, y \in M$ mit $d(x,y) < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{q}$.

$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x,y) < q \cdot \delta_\varepsilon = q \cdot \frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon$.

□

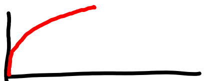
Bsp. 23.34: (glm. stetig $\not\Rightarrow$ Lipschitz-stetig)

Aus 1 $\Rightarrow$ $\sqrt{\cdot}: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist glm. stetig, aber nicht Lipschitz-stetig

Denn: Ang. doch $\Rightarrow \exists q > 0$ Lipschitzkonstante. Wähle $x \in (0, \infty)$: $\sqrt{x} < \frac{1}{q}$

$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot |x - 0| > q \cdot |x - 0|$ ↯

□



H) Lokal Lipschitz-stetige Abbildungen

Def. 23.36

Eine Abb. $f : M \longrightarrow M'$ heißt lokal Lipschitz-stetig

$:\Longleftrightarrow \forall a \in M \ \exists \delta > 0 : f_|$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathcal{U}_\delta(a)$

Bsp. 23.27

$\sqrt{\cdot} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist nicht Lipschitz-stetig, aber lokal Lipschitz-stetig

Bew.: Sei $a \in (0, \infty)$. Setze: $\delta := \frac{a}{2} > 0$.

Sei $x, y \in \mathcal{U}_\delta(a) = (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2})$.

$$\underset{MWS}{\Longrightarrow} \exists c \in (\tfrac{a}{2}, \tfrac{3a}{2}) : \quad f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y)$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \cdot \underbrace{\max\left\{ |f'(z)| \ \Big| \ z \in [\tfrac{a}{2}, \tfrac{3a}{2}] \right\}}_{=: q} = q \cdot |x - y|$$

$\Longrightarrow f$ ist lokal Lipschitz-stetig.

$\square$

Prop. 23.38:

Sei $f : M \longrightarrow M'$ lokal Lipschitz-stetig und M sei kompakt.

Dann ist f Lipschitz-stetig.

Beweis:

Ang.: f ist nicht Lipschitz-stetig.

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, y_n \in M : \quad \boxed{d'(f(x_n), f(y_n)) > n \cdot d(x_n, y_n)} \ (*)$$

M kompakt $\underset{\substack{BW \\ 22.30}}{\Longrightarrow} \exists$ TF $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x \in M$.

$$\underset{\substack{BW \\ 22.30}}{\Longrightarrow} \exists \text{ TF } (y_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}} \text{ mit } y_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell \to \infty} y \in M$$

Zeige: $x = y$.

Betrachte: $M \to \mathbb{R} : z \longmapsto d'(f(z), f(x))$ ist stetig auf M

$$\underset{23.24}{\Longrightarrow} \quad \exists\, \tilde{z} : \forall z \in M : \quad d'(f(z), f(x)) \le d'(f(\tilde{z}), f(x)) =: C$$

$$\Longrightarrow \quad \forall z, z' \in M : \quad d'(f(z), f(z')) \le \underbrace{d'(f(z), f(x))}_{\le C} + \underbrace{d'(f(x), f(z'))}_{\le C} \le 2 \cdot C$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le d(x,y) \le d(x, x_{n_{k_\ell}}) + \underbrace{d(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}})}_{\overset{(*)}{\wedge}} + d(y_{n_{k_\ell}}, y)$$

$$< \underset{\substack{\downarrow\, \ell \to \infty \\ 0}}{d(x, x_{n_{k_\ell}})} + \underbrace{\frac{1}{n_{k_\ell}} \cdot d'(f(x_{n_{k_\ell}}), f(y_{n_{k_\ell}}))}_{\le \underbrace{\frac{1}{n_{k_\ell}} \cdot 2 \cdot C}_{\substack{\downarrow\, \ell \to \infty \\ 0}}} + \underset{\substack{\downarrow\, \ell \to \infty \\ 0}}{d(y_{n_{k_\ell}}, y)}$$

$$\Longrightarrow \quad d(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Damit: Vor. $\Longrightarrow$ f ist lokal Lipschitz-stetig (in x)

$\Longrightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ und $q > 0$ mit: $\forall z, z' \in U_\delta(x)$:

$$d'(f(z), f(z')) \le q \cdot d(z, z')$$

Wähle ℓ so groß, daß $n_{k_\ell} > q$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c} q \cdot d(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}}) \\ \rotatebox{90}{$\le$} \\ d'(f(x_{n_{k_\ell}}), f(y_{n_{k_\ell}})) \end{array} < n_{k_\ell} \cdot d(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}}) \overset{(*)}{<} d'(f(x_{n_{k_\ell}}), f(y_{n_{k_\ell}}))$$

↯

□

I) Konvergenz von Folgen von Abbildungen

Def. 23.39

ⓐ Sei $f_n : M \to M'$ eine Abbildung, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen.

ⓑ Eine Folge von Abbildungen $f_n : M \to M'$, $n \in \mathbb{N}$, heißt punktweise konvergent, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in M$ existiert.

Dann heißt $f : M \to M' : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ die Grenzfunktion von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f

Damit gilt: $\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{\varepsilon,x} : \forall n \geq n_{\varepsilon,x}$ gilt: $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

ⓒ Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall x \in M \ \forall n \geq n_\varepsilon$ gilt: $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Bem. 23.40

$f_n \longrightarrow f$ glmäßig $\Longrightarrow$ $f_n \longrightarrow f$ punktweise

Satz 23.41

Sei $f_n : M \longrightarrow M'$ stetig, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ glm. auf M.

Dann ist auch f stetig auf M.

Beweis:

wörtlich wie in Satz 15.6. □

Bem. 23.41:

Sei M kompakt und $\mathcal{C}(M, \mathbb{R}) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.

Dann ist $\mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ ein normierter Raum mittels

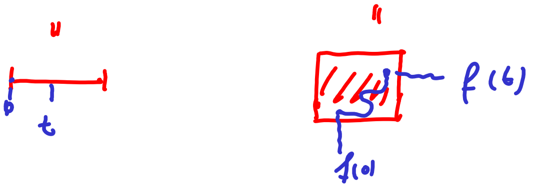
$$\|f\|_\infty := \max\{ |f(x)| \mid x \in M \}.$$

Es gilt sogar, dass $(\mathcal{C}(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.

Beachte: $f_n \to f$ glm. $\Longleftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$

Bemerkung 23.42: (Peano-Kurve)

Warnung! $\exists f : [0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$ stetig und surjektiv ist



7) Der Satz von Arzelà-Ascoli

Def. 23.44

Sei $K \subseteq \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ eine Menge stetiger Funktionen von M nach $\mathbb{R}$.

Dann heißt K gleichstetig oder gleichgradig stetig

$:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall f \in K \wedge \forall x,y \in M$ mit $d(x,y) < \delta_\varepsilon$ gilt: $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Beachte: die Funkt. in K sind alle glm. stetig und δ_ε hängt nicht mal von der gewählten Fkt. ab!

Satz von Arzelà-Ascoli 23.45

Sei M kompakt und $K \subseteq \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$.

Dann sind $\Leftrightarrow$:

ⓐ K ist kompakt bzg. $\|\cdot\|_\infty$.

ⓑ K ist abgeschlossen in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$, beschränkt und gleichstetig.

Beweis:

ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ: Sei K kompakt bzg. $\|\cdot\|_\infty$

$\underset{22.21}{\Longrightarrow}$ K abgeschlossen und beschränkt in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$

Zeige noch: K ist gleichstetig!

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Beweis: $K \subseteq \bigcup_{f\in K} \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}(f)$ ist eine offene Überdeckung

$\underset{\substack{* \\ K \text{ kompakt}}}{\Longrightarrow}$ $\exists f_1,\dots,f_n \in K: \boxed{K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i)}$ (*)

Zudem: M kompakt $\overset{23.39}{\Longrightarrow}$ f_i ist glm. stetig auf M

$$\Rightarrow \exists \delta_i > 0 \ \forall x,y \in M \text{ mit } d(x,y) < \delta_i : \underset{\substack{\shortparallel \\ |f_i(x)-f_i(y)|}}{d'(f_i(x), f_i(y))} < \frac{\varepsilon}{3}$$ (**)

Setze: $\delta_\varepsilon := \min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$.

Sei nun $f \in K$ und $x,y \in M$ mit $d(x,y) < \delta_\varepsilon$.

$\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $\exists i \in \{1,\dots,n\}: f \in \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i)$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \overset{\Delta}{\leq} \underbrace{|f(x)-f_i(x)|}_{\wedge\!|} + |f_i(x)-f_i(y)| + \underbrace{|f_i(y)-f(y)|}_{\wedge\!|}$$

$$\leq \underbrace{\|f-f_i\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_i(x)-f_i(y)|}_{\overset{(**)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_i-f\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

Also: K ist gleichstetig.

(b) $\Rightarrow$ (a): etwas später

□

Lemma 23.46: (Satz von Arzelà-Ascoli)

Sei M kompakt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$.

Zudem gelte:

① $\forall x \in M: (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt

② $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichstetig.

Dann gilt: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$.

Beweis von 23.45 ⓑ ⇒ ⓐ:

Sei also K abgeschlossen in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$, beschränkt & gleichstetig.

Z.z.: K ist kompakt.

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K.

K beschränkt $\Rightarrow \exists\, C>0 : \forall f\in K : \|f\|_\infty \leq C$

$\underset{f_n\in K}{\Rightarrow} \forall x\in M,\ n\in\mathbb{N} : |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq C$

$\Rightarrow$ ① in 23.46 ist für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt

K gleichstetig $\Rightarrow \{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ist gleichstetig

$\Rightarrow$ ② in 23.46 ist für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt

Damit: 23.45 $\Rightarrow \exists$ TF $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \xrightarrow[\text{bzgl. } \|\cdot\|_\infty]{} f \in \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$

$\underset{K \text{ abgeschl.}}{\Rightarrow} f\in K \underset{\substack{\text{BW}\\ 22.30}}{\Rightarrow} K$ ist kompakt.

$\boxed{\xi}$

Bem. 23.47

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ mit M kompakt.

① $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ glm. $\Rightarrow \{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ gleichstetig

② $\left.\begin{array}{l}\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\} \text{ gleichstetig}\\ + (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pktweise beschränkt}\end{array}\right\} \underset{\text{AA}}{\Rightarrow} \exists$ TF $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \longrightarrow f$ glm.

$\boxed{\xi}$

Lemma 23.46:

Sei M kompakt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$.

Zudem gelte:

① $\forall x\in M$: $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

② $\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ist gleichstetig.

Dann : $\exists$ TF $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \underset{\mathcal{C}(M,\mathbb{R})}{\underset{\cap}{f}}$ bez. $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis:

ÜA: M kompakt $\Rightarrow$ $\exists\, \overset{\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}}{\overset{\|}{A}} \subseteq M$ abzählbar und dicht in M

Ziel: Konstruiere Teilfolgen $(g_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $i\in\mathbb{N}$,

so dass : · $\forall i$: $(g_{i+1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist TF von $(g_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$

· $\exists$ $\lim\limits_{k\to\infty} g_{i,k}(x_0), \dots, \lim\limits_{k\to\infty} g_{i,k}(x_i) \in \mathbb{R}$

Dazu:

- $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\overset{BW}{\Rightarrow}$ $\exists$ konvergente TF $(f_{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$

  $\Rightarrow$ $g_{0,k} := f_{n_k}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{k\to\infty} g_{0,k}(x_0)$

- $(g_{0,k}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\overset{BW}{\Rightarrow}$ $\exists$ konvergente TF $(g_{0,k_\ell}(x_1))_{\ell\in\mathbb{N}}$

  $\Rightarrow$ $g_{1,\ell} := g_{0,k_\ell}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{k\to\infty} g_{1,k}(x_0)$, $\lim\limits_{\ell\to\infty} g_{1,k}(x_1)$

- fahre rekursiv so fort!

Damit:

$$\begin{array}{ccccc} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & g_{0,3} & \cdots \\ g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} & \cdots \\ g_{2,0} & g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} & \cdots \\ g_{3,0} & g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Setze: $h_n := g_{n,n}$ $\Rightarrow$ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist TF von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Zudem: $(h_n(x_k))_{n\geq k}$ ist TF von $(g_{k,n}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_k) \in \mathbb{R} \quad \forall k\in\mathbb{N}$ (*)

Zeige: $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge,

d.h. $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n>m\geq n_\varepsilon : \|h_n-h_m\|_\infty<\varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$.

① $\Rightarrow$ $\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ gleichstetig

$\Rightarrow$ $\exists \delta>0 : \forall h\in\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\} \wedge \forall x,y\in M$ mit $d(x,y)<\delta$

gilt: $|h(x)-h(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (**)

M kompakt und $M \subseteq \bigcup\limits_{x\in M} U_{\frac{\delta}{2}}(x)$ ist eine offene Überdeckung

$\Rightarrow$ $\exists y_1,\ldots,y_s\in M$: $M \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{s} U_{\frac{\delta}{2}}(y_i)$ (***)

A liegt dicht in M $\Rightarrow$ $\forall i\in\{1,\ldots,s\}$ $\exists x_{k_i}\in U_{\frac{\delta}{2}}(y_i)$ (****)

Nach Konstruktion ist $(h_n(x_{k_i}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\forall i=1,\dots,s$

$\Rightarrow \forall i=1,\dots,s: \ (h_n(x_{k_i}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine CF

$\Rightarrow \exists n_i : \forall n > m \geq n_i : \ |h_n(x_{k_i}) - h_m(x_{k_i})| < \frac{\varepsilon}{3}$

Setze: $\quad n_\varepsilon := \max\{n_1,\dots,n_s\}$

$\Rightarrow \forall n > m \geq n_\varepsilon, \ \forall i=1,\dots,s: \ |h_n(x_{k_i}) - h_m(x_{k_i})| < \frac{\varepsilon}{3}$ (*****)

Sei nun $n > m \geq n_\varepsilon$ und sei $x \in M$ beliebig

$\overset{(***)}{\Rightarrow} \exists i \in \{1,\dots,s\} : \ x \in U_{\frac{\delta}{2}}(y_i)$

$\Rightarrow d(x,x_{k_i}) \leq \underbrace{d(x,y_i)}_{<\frac{\delta}{2}} + \underbrace{d(y_i,x_{k_i})}_{\overset{(****)}{<}\frac{\delta}{2}} < \delta$ (******)

Damit: $|h_n(x) - h_m(x)| \leq \underbrace{|h_n(x) - h_n(x_{k_i})|}_{\overset{(**)+(******)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|h_n(x_{k_i}) - h_m(x_{k_i})|}_{\overset{(*****)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|h_m(x_{k_i}) - h_m(x)|}_{\overset{(**)+(******)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$

$\underset{\substack{n_\varepsilon \text{ unabhängig} \\ \text{von } x}}{\Longrightarrow}$ $\quad \|h_n - h_m\|_\infty = \max\{|h_n(x) - h_m(x)| \mid x \in M\} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine CF.

23.42 $\Longrightarrow \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ ist vollständig bez. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent bez. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow \exists f: M \to \mathbb{R}$ s.d. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{stetig}}}{h_n} \xrightarrow{n\to\infty} \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{C}(M,\mathbb{R})}}{f}$ glm.

stetig $\longrightarrow \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$

$\boxed{1}$

Beweis von Bem. 23.42

Beh: $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, wobei M kompakt

Z.z.: jede CF konvergiert.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CF in $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ und $x\in M$.

Sei $\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ $\exists\, n_\varepsilon : \forall n>m\geq n_\varepsilon :$

$$\|f_n-f_m\|_\infty < \varepsilon$$
$$\|f_n-f_m\|_\infty = \max\{|f_n(\tilde{x})-f_m(\tilde{x})| \mid \tilde{x}\in M\} \geq |f_n(x)-f_m(x)|$$

$\Rightarrow$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine CF in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert!

Definiere: $f: M\longrightarrow\mathbb{R} : x\longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Beachte: Sei $\varepsilon>0$ gegeben

$\Rightarrow$ $\exists\, n_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n>m\geq n_{\frac{\varepsilon}{2}} :$ $|f_n(x)-f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty}$$

$$|f(x)-f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\forall x\in M\ \forall m\geq n_{\frac{\varepsilon}{2}} :$ $|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall m\geq n_{\frac{\varepsilon}{2}} :$ $\|f-f_m\|_\infty = \max\{|f(x)-f_m(x)| \mid x\in M\} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $f_m \longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, d.h. glm.

$\square$

K) Stetige lineare Operatoren

Satz 23.48

Für eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ sind gleichwertig:

ⓐ f ist Lipschitz-stetig auf V.

ⓑ f ist gleichmäßig stetig auf V.

ⓒ f ist stetig auf V.

ⓓ f ist stetig in 0.

ⓔ $\exists\, r > 0 \;:\; \forall x \in V \;:\; \|f(x)\|_W \leq r \cdot \|x\|_V$.

Wir nennen f dann einen stetigen oder beschränkten Operator.

Beweis:

ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ: 23.33

ⓑ $\Rightarrow$ ⓒ: 23.2k

ⓒ $\Rightarrow$ ⓓ: Def.

ⓓ $\Rightarrow$ ⓔ: Sei f stetig in 0. Setze: $\varepsilon := 1$

$$\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \;:\; \forall x \in V \text{ mit } \underset{\|x\|_V}{\underset{\shortparallel}{\|x - 0\|_V}} < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } \boxed{\underset{\|f(x)\|_W}{\underset{\shortparallel}{\|f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}\|_W}} < 1 \quad (*)}$$

$$\text{Setze: } \boxed{r = \frac{2}{\delta_\varepsilon} > 0}. \text{ Sei } 0 \neq x \in V \Longrightarrow y := \frac{x \cdot \delta_\varepsilon}{2 \cdot \|x\|_V} \Rightarrow \boxed{\|y\|_V < \delta_\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \|f(x)\|_W = \left\| f\left(\frac{2 \cdot \|x\|_V}{\delta_\varepsilon} \cdot \underbrace{\frac{\delta_\varepsilon \cdot x}{2 \cdot \|x\|_V}}_{} \right) \right\|_W \overset{=y}{} = \frac{2 \cdot \|x\|_V}{\delta_\varepsilon} \cdot \|f(y)\|_W \underset{(*)}{<} \frac{2 \cdot \|x\|_V}{\delta_\varepsilon} \cdot 1 = r \cdot \|x\|_V$$

ⓔ ⇒ ⓒ: Seien $x, y \in V$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_W = \|f(x-y)\|_W \le r \cdot \|x-y\|_V$$

⇒ f Lipschitz-stetig mit Konstante r. $\square$

Bsp. 23.49:

$V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ist normiert mit der L_2-Norm aus Bsp. 22.5,

d.h. $\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}$, $\langle f, g\rangle_{L_2} = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx$

$I : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$, Integraloperator, ist linear

Sei $f \in V$

$$\Rightarrow |I(f)| = \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 1 \cdot f(x)\,dx \right| = |\langle 1, f \rangle_{L_2}|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-} \\ \text{Schwarz-} \\ \text{Ugl.}}}{\le} \underbrace{\overbrace{\|1\|_{L_2}}^{=:r}}_{\overset{\|}{1}} \cdot \|f\|_{L_2} = r \cdot \|f\|_{L_2}$$

⇒ I ist stetig auf $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

b) Die Operatornorm

Satz 23.50:

$L(V, W) := \{ f : V \to W \mid f \text{ ist linear und stetig} \}$ ist ein normierter Raum vermittels der Operatornorm

$$\|\cdot\| : L(V, W) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \sup_{0 \ne x \in V} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} .$$

Beweis:

Beachte: $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in L(V,W) \Rightarrow a \cdot f + b \cdot g$ ist stetig und linear $\Rightarrow L(V,W)$ ist Untervektorraum von $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$

Zeige noch: $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $L(V,W)$

- Sei $f \in L(V,W) \rightarrow \|f\| = \sup\limits_{0 \neq x \in V} \underbrace{\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}}_{\geq 0} \geq 0$

  Sei nun $\|f\| = 0 \Rightarrow \|f(x)\|_W = 0 \quad \forall x \in V$

  $\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \|\cdot\|$ ist definit.

- Sei $f \in L(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

  $$\Rightarrow \|\lambda \cdot f\| = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|\lambda \cdot f(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{|\lambda| \cdot \|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = |\lambda| \cdot \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}$$

  $$= |\lambda| \cdot \|f\|$$

- Seien $f, g \in L(V,W)$.

  $$\Rightarrow \|f+g\| = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\overbrace{\|f(x) + g(x)\|_W}^{\leq \|f(x)\|_W + \|g(x)\|_W}}{\|x\|_V} \leq \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|f(x)\|_W + \|g(x)\|_W}{\|x\|_V}$$

  $$\leq \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} + \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|g(x)\|_W}{\|x\|_V} = \|f\| + \|g\|$$

$\square$

Korollar 23.51

ⓐ $f \in L(V,W)$ und $x \in V \Rightarrow \|f(x)\|_W \leq \|f\| \cdot \|x\|_V$

ⓑ $f, g \in L(V,V) \Rightarrow \|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ (submultiplikativ)

Beweis: ⓐ Def.

ⓑ Sei $x \in V \Rightarrow \|(f \circ g)(x)\|_V = \|f(g(x))\|_V \overset{ⓐ}{\leq} \|f\| \cdot \|g(x)\|_V \overset{ⓐ}{\leq} \|f\| \cdot \|g\| \cdot \|x\|_V$

$$\Rightarrow \|f \circ g\| = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|(f \circ g)(x)\|_V}{\|x\|_V} \leq \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|f\| \cdot \|g\| \cdot \cancel{\|x\|_V}}{\cancel{\|x\|_V}} = \|f\| \cdot \|g\|$$

$\square$

Bsp. 23.52

$V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normiert mit L_2-Norm und

$I : V \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ ist stetig

Zeig: $\|I\| \leq 1$

$$23.49 \Rightarrow |I(f)| \leq \overset{= \int_0^1 1\,dx = 1}{\|1\|_{L_2}} \cdot \|f\|_{L_2} \leq 1 \cdot \|f\|_{L_2} \quad \forall f \in V$$

$$\Rightarrow \|I\| = \sup_{0 \neq f \in V} \frac{|I(f)|}{\|f\|_{L_2}} \leq 1$$

Zeige: $\|I\| \geq 1$

$$|I(1)| = \int_0^1 1\,dx = 1 = 1 \cdot \|1\|_{L_2}$$

$$\Rightarrow \|I\| = \sup_{0 \neq f \in V} \frac{|I(f)|}{\|f\|_{L_2}} \geq 1$$

Also: $\|I\| = 1$.

Bsp. 23.53

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

denn: $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \Rightarrow \exists A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\underset{=: f_A(x)}{f(x)} = A \cdot x \quad \Rightarrow$ f ist Polynomfkt., also stetig!

Bem. 23.54:

$A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und $\|\cdot\|_1$ Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_2$ Norm auf $\mathbb{R}^m$ $\longrightarrow$ $\|A\| := \|f_A\|$

Dies definiert auf $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ eine Norm, die submultipl. ist.

M) $L(V,W)$ als Banachraum

Satz 23.55

W Banachraum $\Longrightarrow$ $L(V,W)$ Banachraum bzgl. Operatornorm

Beweis:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(V,W)$.

Zeige: $\forall x \in V$: $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine C.F.

Sei $x \in V$ und $\varepsilon > 0$. $\Longrightarrow \exists\, n_\varepsilon : \forall n > m \geq n_\varepsilon : \|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|_V}$

Sei $n > m \geq n_\varepsilon$ $\Longrightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_W = \|(f_n - f_m)(x)\|_W \leq \|f_n - f_m\| \cdot \underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon}}{\|x\|_V}$

$\Longrightarrow$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist C.F.

Damit: W Banachraum $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in V$

Setze: $f : V \longrightarrow W : x \longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Zeige: f ist linear

Seien $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lim_{n\to\infty} \lambda \cdot f_n(x) + \mu \cdot f_n(y)$$

$$= \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

Zeige: f ist stetig

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist C.F. $\Longrightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge

  $\Longrightarrow \exists\, C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq C$

- Sei $x \in V$ mit $\|x\|_V = 1$ $\Longrightarrow$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

  $\Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \|f(x) - f_n(x)\|_W \leq 1$

- Damit gilt für $x \in U$ mit $\| x \| = 1$:

$$\| f(x) \|_W \leq \underbrace{\| f(x) - f_n(x) \|}_{\leq 1} + \underbrace{\| f_n(x) \|_W}_{\leq \| f_n \| \cdot \| x \|_V = \| f_n \| \leq C} \leq 1 + C$$

- Damit ist

$$\| f \| = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\| f(x) \|_W}{\| x \|_V} = \sup_{0 \neq x \in V} \left\| \frac{1}{\| x \|_V} \cdot f(x) \right\|_W$$

$$= \sup_{0 \neq x \in V} \overbrace{\left\| f\left(\underbrace{\frac{x}{\| x \|_V}}_{\text{hat Norm } 1} \right) \right\|_W}^{\leq 1 + C} \leq 1 + C$$

$\Longrightarrow$ f ist beschränkter Operator, also stetig

Also: $f \in L(V, W)$

Zeige: $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ bzgl. $\| \cdot \|$

Sei $\varepsilon > 0$.

$\Longrightarrow \exists\, n_\varepsilon : \forall n > m \geq n_\varepsilon : \| f_n - f_m \| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $0 \neq x \in V$

$$\Longrightarrow \| (f_n - f_m)(x) \|_W \leq \| f_n - f_m \| \cdot \| x \|_V < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \| x \|_V$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$\| (f - f_m)(x) \|_W \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \| x \|_V$$

$$\Longrightarrow \frac{\| f - f_m(x) \|_W}{\| x \|_V} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, 0 \neq x \in V$$

$$\Longrightarrow \| f - f_m \| = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\| (f - f_m)(x) \|_W}{\| x \|_V} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \forall\, m \geq n_\varepsilon$$

$\Longrightarrow f_m \xrightarrow[m \to \infty]{} f$ bzgl. $\| \cdot \|$. $\square$

N) Die Neumannsche Reihe

Prop. 23.56

Sei V ein Banachraum und $f \in L(V,V)$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \| f^{\ell} \|$ konvergent, wobei $\| \cdot \|$ die Operatornorm auf $L(V,V)$ bezeichnet.

Dann gelten:

① $id_V - f$ ist bijektiv mit $(id_V - f)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{\ell}$

② $\| f \| < 1 \implies \| (id_V - f)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| f \|}$.

Beweis:

① 23.55 $\implies$ $L(V,V)$ ist ein Banachraum und $\sum_{k=0}^{\infty} f^k$ ist nach Vor. absolut konvergent

$\underset{23.51}{\implies}$ $g := \sum_{k=0}^{\infty} f^k$ existiert in $L(V,V)$

$\sum_{k=0}^{\infty} \| f^k \|$ konvergent $\implies \lim_{k \to \infty} \| f^k \| = 0$

$\implies \lim_{k \to \infty} f^k = 0 \in L(V,V)$

$$\implies (id_V - f) \circ \sum_{k=0}^{n} f^k = \sum_{k=0}^{n} id_V \circ f^k - \sum_{k=0}^{n} f \circ f^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f^k - \sum_{k=0}^{n} f^{k+1} = id_V - \boxed{f^{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\xrightarrow{n \to \infty} (id_V - f) \circ \sum_{k=0}^{\infty} f$

$\xrightarrow{n \to \infty} id_V$

$$\left.\begin{array}{l} \implies (id_V - f) \circ \sum_{n=0}^{\infty} f^k = id_V \\ \text{Analog: } \sum_{k=0}^{\infty} f^k \circ (id_V - f) = id_V \end{array}\right\} \implies ①$$

② Sei $\|f\| < 1$

Beachte:

$$\begin{tikzcd}
\left\| \sum_{k=0}^{n} f^k \right\| \arrow[d, "n \to \infty"] & \underset{\Delta\text{-Ugl.}}{\le} & \sum_{k=0}^{n} \|f^k\| & \underset{23.51}{\le} & \sum_{k=0}^{n} \|f\|^k \arrow[d, "n \to \infty"] \\
\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f^k \right\| \underset{①}{=} \|(id_V - f)^{-1}\| & & & & \sum_{k=0}^{\infty} \|f\|^k = \frac{1}{1-\|f\|}
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ ②

$\square$

§ 24 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Generalvoraussetzung:

- Betrachte in §24 $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{R}^m$ stets als normierte Räume bezgl. der euklid. Norm.
- Stets sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen; insbesondere: $HP(\mathcal{U}) \supseteq \mathcal{U}$.

A) Totale Differenzierbarkeit

Motivation 24.1: Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, $a \in HP(\mathcal{U})$.

Dann: f heißt differenzierbar in a

$$:\overset{\text{Def.}}{\underset{17.3}{\Longleftrightarrow}} \exists \lim_{x\to a} \mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

$$\underset{17.6}{\Longleftrightarrow} \exists \underset{\substack{\shortparallel \\ f'(a)}}{c} \in \mathbb{R} \wedge \rho: \mathcal{U} \to \mathbb{R} : f(x) = f(a) + c\cdot(x-a) + \rho(x) \wedge \lim_{x\to a} \frac{\rho(x)}{|x-a|} = 0$$

Definition 24.2:

ⓐ $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ heißt total differenzierbar in $a \in \mathcal{U}$

$:\Longleftrightarrow \exists A \in \mathrm{Mat}(m\times n, \mathbb{R})$ und $\exists \rho: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, so dass

$$f(x) = f(a) + A\circ(x-a) + \rho(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} \frac{\rho(x)}{\|x-a\|_2} = 0.$$

Notation: $Df(a) := A$ heißt die Ableitung von f in a.

ⓑ f heißt total differenzierbar auf $\mathcal{U}$ $:\Longleftrightarrow \forall a \in \mathcal{U}$ ist f total diff.bar in a.

Bem. 24.3:

$$\left.\begin{array}{l} 24.1 \\ 17.6 \\ 24.2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f: \underset{}{\overset{\mathbb{R}}{\overset{\cup\!\shortmid}{\mathcal{U}}}} \to \mathbb{R} \text{ ist diff.bar in } a \\ \Longleftrightarrow \quad f \text{ total diff.bar in } a \end{array}\right)$$

Lemma 24.4

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ total diff.bar in $a \in \mathcal{U}$ und $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Dann: $$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot x) - f(a)}{t} = \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(m\times n, \mathbb{R})}}{Df(a)} \circ \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{x} \in \mathbb{R}^m$$

Insbesondere: $Df(a)$ ist eindeutig festgelegt durch f & a.

Beweis:

Seien $A \in \mathrm{Mat}(m\times n, \mathbb{R})$ und $\varrho : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ wie in 24.2.

Beacht: $\mathcal{U}$ offen & $a \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ betrachte nur $t \in \mathbb{R}$ so, dass $a + t\cdot x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

Damit:
$$\frac{f(a+t\cdot x) - f(a)}{t} = \frac{A\circ(\cancel{a} + \cancel{t}\cdot x - \cancel{a}) + \varrho(a+t\cdot x)}{\cancel{t}}$$

$$= A\circ x + \frac{\varrho(a+t\cdot x)}{t} = \underbrace{A\circ x \pm \underbrace{\frac{\varrho(a+t\cdot x)}{\|a+t\cdot x - a\|_2}}_{\substack{\downarrow t\to 0\\ 0}} \cdot \|x\|_2}_{\substack{\downarrow t\to 0\\ A\circ x \,=\, Df(a)\circ x}}$$

Wende die Formel auf $x = e_j = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow j \in \mathbb{R}^n$:

$$\Rightarrow \quad A\circ e_j = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_j) - f(a)}{t}$$

$\|$

j-te Spalte von A

hängt nicht von A ab, sondern nur von f & a

$\Rightarrow$ A hängt nur von f & a ab!

$\square$

Bsp. 24.5:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} \longmapsto 3\cdot x_1 + x_1\cdot x_2 - 2\cdot x_2 + 1$, $a = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$

Finde: $Df(a) = A \in \mathrm{Mat}(1\times 2, \mathbb{R})$, hat zwei Spalten!

- 1. Spalte $= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t\cdot e_1) - f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$

  $= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3\cdot t}{t} = 3$

- 2. Spalte $= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t\cdot e_2) - f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$

  $= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-2\cdot t}{t} = -2$

Also: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$

Setze:
$$\begin{aligned} \varrho(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2) - f(0,0) - A \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 3x_1 + x_1 \cdot x_2 - 2x_2 - \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 3x_1 + x_2 \cdot x_2 - 2x_2 - 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Damit:
$$\lim_{(x_1,x_2) \to (0,0)} \frac{\varrho(x_1, x_2)}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2} = \lim_{(x_1,x_2) \to (0,0)} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \underset{23.5}{=} 0$$

$\Rightarrow$ f ist in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ total diff.bar!

B) Partielle Differenzierbarkeit

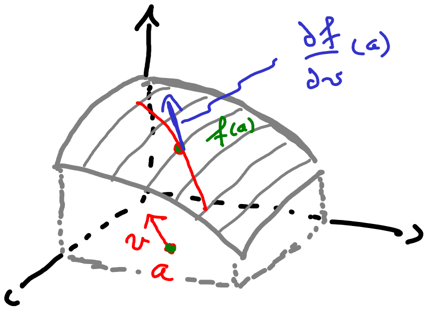
Def. 24.6

ⓐ Sei $f: U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$.

Dann heißt $\frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t}$ die Richtungsableitung von f in a in Richtung v, wenn der Grenzwert existiert.

Speziell: $v = e_i$, partielle Ableitung nach x_i

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = \partial_i f(a) = D_i f(a)$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t}$$



ⓑ Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ und $a \in U$.

Dann: f heißt partiell differenzierbar in a

$:\Longleftrightarrow$ $\forall\, i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n \quad \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$

Notation:
$$Jf(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$ heißt Jacobi-Matrix von f in a.

Zudem: f heißt partiell differenzierbar auf $\mathcal{U}$

$:\Longleftrightarrow \forall a \in \mathcal{U}$: f partiell diff.bar in a

Dann: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt partielle Ableitung von f.

Bem. 24.7

Sei $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$.

$\Longrightarrow \quad g : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(a + t \cdot v)$

Dann: f ist in a diff.bar in Richtung v

$\Longleftrightarrow$ g ist diff.bar in 0

D.h.: Richtungsableitungen reduzieren sich auf 1-dim. Ableitungen!

Kor. 24.8

Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ total diff.bar in $a \in \mathcal{U}$.

Dann ist f partiell diff.bar in a mit $Df(a) = Jf(a)$.

Bew:

$$\underset{24.4}{\overset{f \text{ total diff.bar in } a}{\Longrightarrow}} \quad j\text{-te Spalte von } Df(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_j) - f(a)}{t}$$

$$\underset{23.19}{\Longrightarrow} \quad \forall i = 1, \dots, n : \exists \lim_{t \to 0} \frac{f_i(a + t \cdot e_j) - f_i(a)}{t} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

$$\Longrightarrow \quad Df(a) = Jf(a)$$

$\boxed{\text{S}}$

Bsp. 24.9: (partiell diffbar $\not\Rightarrow$ total diffbar)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2^3}{x_1^2 + x_2^6} & , (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , (x_1, x_2) = \underset{\overset{\shortparallel}{a}}{(0,0)} \end{cases}$$

Sei $\overset{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{v}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1$.

Zeige: $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$

1. Fall: $v_1 = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\overbrace{f(a + t \cdot v)}^{\substack{f(0,t)=0 \\ \shortparallel}} - \overset{\substack{0 \\ \shortparallel}}{f(a)}}{t} = 0$

2. Fall: $v_1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^4 \cdot v_1 \cdot v_2^3}{t^2 \cdot v_1^2 + t^6 \cdot v_2^6} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^2 \cdot v_1 \cdot v_2^3}{v_1^2 + t^4 \cdot v_2^6} = 0$

Also: die Richtungsableitung von f in Richtung v existiert im Punkt $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle v !

Insb.: f ist partiell diffbar in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Jf(a) = (0 \;\; 0)$

Ang: f total diffbar in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \rho(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \overset{=0}{\overbrace{f(0,0)}} - \overbrace{(0,0) \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}^{=0}$$

$$= f(x_1, x_2) = \frac{x_1 \cdot x_2^3}{x_1^2 + x_2^6}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x_1,x_2) \to (0,0)} \frac{\rho(x_1, x_2)}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2} = \lim_{(x_1,x_2) \to (0,0)} \frac{x_1 \cdot x_2^3}{(x_1^2 + x_2^6) \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Denn: $a_n = \begin{pmatrix} 1/n^3 \\ 1/n \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

aber: $\dfrac{\rho\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)}{\left\| \begin{pmatrix} 1/n^3 \\ 1/n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2} = \dfrac{\cancel{1/n^6}}{2 \cdot \cancel{\frac{1}{n^6}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^2}}} = \dfrac{\overset{\overset{\infty}{\nearrow}}{n}}{2 \cdot \underset{\overset{\downarrow}{1}}{\sqrt{\frac{1}{n^4} + 1}}} \to \infty$

Also: f ist nicht total diffbar in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beachte: f ist nicht mal stetig in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn: $f(a_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} \neq \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0,0)}$

c) Stetige Differenzierbarkeit

Def. 24.10

$f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar auf $\mathcal{U}$

$:\Longleftrightarrow$ f ist partiell diff.bar auf $\mathcal{U}$ und

alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ sind stetig

Notation: $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) := \{f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m \mid f \text{ ist stetig diffbar auf } \mathcal{U}\}$

Satz 24.11

$f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ stetig diff.bar auf $\mathcal{U}$ $\Longrightarrow$ f total diffbar auf $\mathcal{U}$

Beweis:

Seien $f_1,\dots,f_m$ die Komponentenfkt. von f und $a\in\mathcal{U}$.

Beachte: $\exists\ \varepsilon>0:\ \mathcal{U}_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(a)\subseteq\mathcal{U}$

Betrachte nur noch $x\in\mathcal{U}_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(a)$ im Beweis.

Dann:
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} f_i(x_1,\dots,x_j,a_{j+1},\dots,a_n)-f_i(x_1,\dots,x_{j-1},a_j,\dots,a_n)\\ &= f_i(x)-f_i(a)\end{aligned}\right\}(*)$$

Zudem: $\mathcal{U}_\varepsilon(a_j)=(a_j-\varepsilon,a_j+\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{R}:\ z\longmapsto f_i(x_1,\dots,x_{j-1},z,a_{j+1},\dots,a_n)$

ist differenzierbar in a_j, weil f partiell diffbar auf $\mathcal{U}$

$\underset{18.7}{\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}}$ $\forall_{j=1,\dots,n}\ \exists\ c_j$ zwischen x_j und a_j, d.h. $|c_j-a_j|\le\underset{\substack{\wedge\\ \varepsilon}}{|x_j-a_j|}$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_{j-1},c_j,a_{j+1},\dots,a_n)\cdot(x_j-a_j)\\ &=\sum_{j=1}^{n} f(x_1,\dots,x_j,a_{j+1},\dots,a_n)-f(x_1,\dots,x_{j-1},a_j,a_{j+1},\dots,a_n)\end{aligned}\right\}(**)$$

$$\underline{\underline{\overset{(*)}{=}}}\ f_i(x)-f_i(a)$$

Damit: $\varrho_i(x) := f_i(x) - f_i(a) - Jf_i(a) \circ (x-a)$

$$\underset{(**)}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_{j-1},c_j,a_{j+1},\dots,a_n) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)}_{=: r_j(x)} \cdot (x_j - a_j)$$

$$= \langle r(x), x-a \rangle \text{, wobei: } r(x) = \begin{pmatrix} r_1(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{|\varrho_i(x)|}{\|x-a\|_2} = \frac{|\langle r(x), x-a \rangle|}{\|x-a\|_2} \underset{\substack{\text{Cauchy-} \\ \text{Schwartz} \\ \text{A16.8}}}{\leq} \frac{\|r(x)\|_2 \cdot \|\cancel{x-a}\|_2}{\|\cancel{x-a}\|_2} = \|r(x)\|_2$$

Dabei: $r_j(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underset{\substack{\downarrow \\ a_1}}{x_1},\dots,\underset{\substack{\downarrow \\ a_{j-1}}}{x_{j-1}},\underset{\substack{\downarrow \\ a_j}}{c_j},a_{j+1},\dots,a_n) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \xrightarrow[x \to a]{\substack{\text{weil } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ stetig in a} \\ \downarrow}} 0$

$$\Rightarrow \|r(x)\|_2 \xrightarrow[x\to a]{} 0 \qquad \Rightarrow \frac{|\varrho_i(x)|}{\|x-a\|_2} \xrightarrow{x\to a} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\varrho_i(x)}{\|x-a\|_2} \xrightarrow{x\to a} 0$$

Damit: $\varrho(x) := f(x) - f(a) - Jf(a) \circ (x-a) = \begin{pmatrix} \varrho_1(x) \\ \vdots \\ \varrho_m(x) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\varrho(x)}{\|x-a\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ f ist total diff.bar in a

$\square$

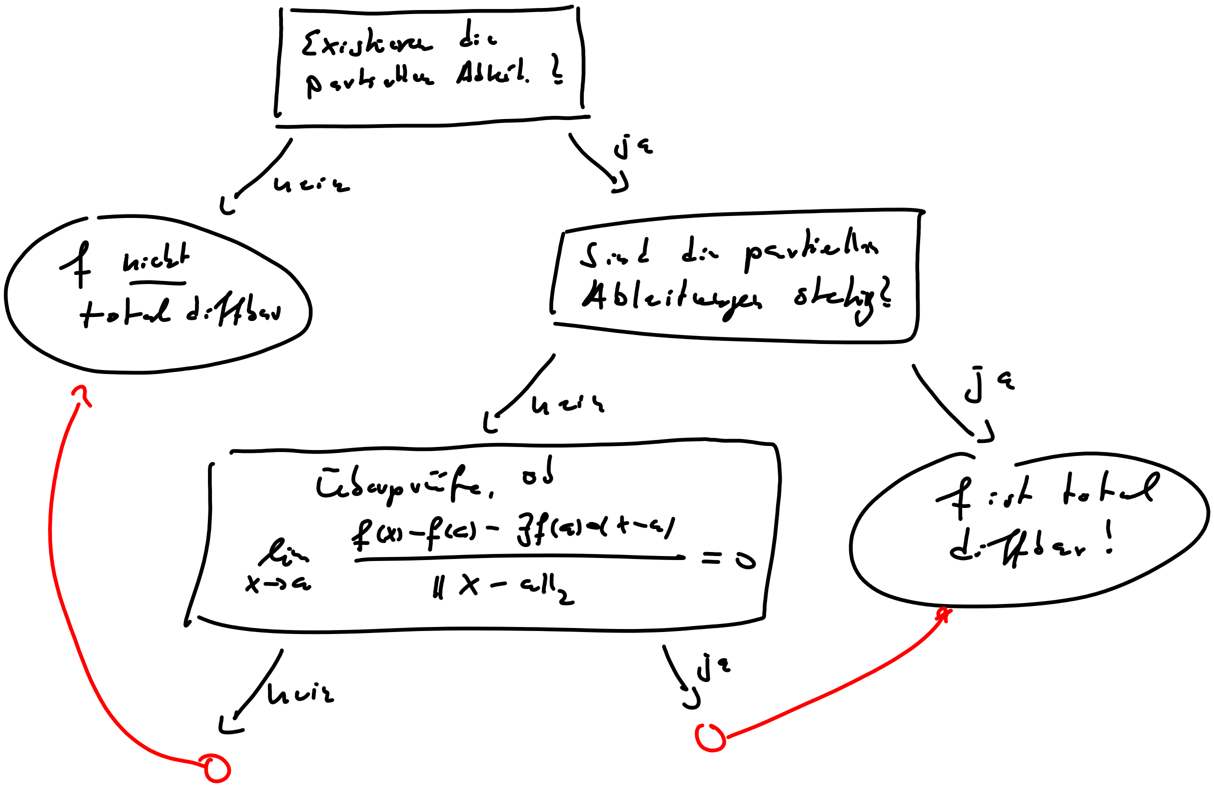
Bsp. 24.12: (total diff.bar $\not\Rightarrow$ stetig diff.bar)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \|x\|_2^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\|x\|_2}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist total diff.bar auf $\mathbb{R}^2$, aber nicht stetig diff.bar

Bem. 24.13

ⓐ Wie überprüfe ich, ob eine Abb. total diffbar ist?



ⓑ Möchte man nur die totale Diffbarkeit in $a \in U$ testen, so reicht in 24.11 die partielle Diffbarkeit auf einer kleinen Umgebung von a und die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in a aus!

D) Erste einfache Eigenschaften diffbarer Abbildungen

Prop. 24.14

$f : U \to \mathbb{R}^m$ total diffbar in a $\Rightarrow$ f stetig in a

Beweis:

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\substack{\downarrow x\to a \\ f(a)}} + \overbrace{Df(a)\circ\underbrace{(x-a)}_{\substack{\downarrow x\to a \\ 0}}}^{\xrightarrow{x\to a} Df(a)\circ 0 = 0} + \underbrace{\boxed{\frac{\varrho(x)}{\|x-a\|_2}}}_{\substack{\searrow x\to a \\ 0}} \underbrace{\|x-a\|_2}_{\substack{\downarrow x\to a \\ 0}} \xrightarrow{x\to a} f(a)$$

Bsp. 24.15

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; \overset{x}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \dfrac{x_1 \cdot x_2}{\|x\|_2} & , \text{ wenn } x \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ wenn } x = (0,0) \end{cases}$$

Zeige: f ist partiell diff.bar in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\overset{=0}{\overbrace{f(a + t \cdot e_i)}} - \overset{=0}{\overbrace{f(a)}}}{t} = 0$$

Zeige: f ist nicht total diffbar in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ang. doch $\Rightarrow Df(a) = Jf(a) = (0 \;\; 0)$

$$\Rightarrow \varrho(x) = \underbrace{-f(a)}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \underbrace{Jf(a) \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + f(x) = f(x)$$

und

$$\frac{\varrho(x)}{\|x - a\|_2} = \frac{f(x)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \xrightarrow[x \to a]{} \text{ existiert nicht nach } 23.5 ⓐ$$

Also: f nicht total diffbar in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ABER: 23.5 ⓑ $\Rightarrow$ f ist stetig in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bem. 24.16

$f : U \to \mathbb{R}^m$ total diff.bar auf U

$\Rightarrow$ $Df : U \longrightarrow \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}) : a \longmapsto Df(a)$

ist die Ableitungsabbildung von f

Kor. 24.17

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

Dann: f ist stetig diff'bar auf $\mathcal{U}$

$\iff$ f ist total diff'bar auf $\mathcal{U}$ und

Df ist stetig auf $\mathcal{U}$

Beweis: (Betrachte $\overset{\overset{\mathbb{R}^{m \cdot n}}{\cong}}{\text{Mat}(m\times n, \mathbb{R})}$ mit beliebiger Norm.)

"$\Rightarrow$" f stetig diff'bar auf $\mathcal{U}$ $\overset{24.11}{\Longrightarrow}$ f total diff'bar auf $\mathcal{U}$

$\iff$ $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ist stetig $\forall\, i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$

$\uparrow$ Komponentenfkt. von Df $\Rightarrow$ Df ist stetig auf $\mathcal{U}$

"$\Leftarrow$" f total diff'bar auf $\mathcal{U}$ $\underset{24.8}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $\forall\, i,j$

und $Df = Jf = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ ist stetig nach Vor.

$\Rightarrow$ Komponentenfkt. $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sind stetig $\Rightarrow$ f ist stetig diff'bar auf $\mathcal{U}$ □

E) Linearität der Ableitung

Prop. 24.18

Sei $A \in \text{Mat}(m\times n, \mathbb{R})$ und $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto A\circ x$.

Dann ist f_A total diff'bar auf $\mathbb{R}^n$ mit $Df(a) = A$ $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Setze $Df(a) = A$ und $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m ; x \mapsto 0$.

$\Rightarrow$ $f_A(x) = A\circ x = A\circ a + A\circ(x-a) + g(x)$

und $\dfrac{g(x)}{\|x-a\|_2} = 0 \xrightarrow[x\to a]{} 0$ $\Rightarrow$ Beh. □

Bsp. 24.19:

$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x_i = (0 \dots \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1} \dots 0) \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist total diff.bar

mit $D\pi_i(a) = (0 \dots 1 \dots 0)$

Prop. 24.20 (Linearität der Ableitung)

Seien $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ total diff.bar in $a \in \mathcal{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dann: $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ ist total diff.bar in a mit

$$D(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \cdot Df(a) + \mu \cdot Dg(a).$$

Beweis:

Setze: $\cdot\ \rho_f(x) := f(x) - f(a) - Df(a) \circ (x-a)$

$\cdot\ \rho_g(x) := g(x) - g(a) - Dg(a) \circ (x-a)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\rho_f(x)}{\|x-a\|_2} = \lim_{x \to a} \frac{\rho_g(x)}{\|x-a\|_2} = 0$$

Setze: $\rho_{\lambda f + \mu g}(x) := (\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda \cdot f + \mu g)(a) - (\lambda \cdot Df(a) + \mu \cdot Dg(a)) \circ (x-a$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{\lambda f + \mu g}(x)}{\|x-a\|_2} = \lambda \cdot \frac{(f(x) - f(a) - Df(a) \circ (x-a))}{\|x-a\|_2} + \mu \cdot \frac{(g(x) - g(a) - Dg(a) \circ (x-a)}{\|x-a\|_2}$$

$$= \lambda \cdot \underset{\substack{\downarrow x \to a \\ 0}}{\frac{\rho_f(x)}{\|x-a\|_2}} + \mu \cdot \underset{\substack{\downarrow x \to a \\ 0}}{\frac{\rho_g(x)}{\|x-a\|_2}} \xrightarrow{x \to a} \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0}$$

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

F) Die Produktregel

Prop. 24.21 (Produktregel)

Seien $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ total diffbar in a.

Dann ist $f \cdot g$ total diffbar in a mit

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(1\times n,\mathbb{R})}}{D(f\cdot g)(a)} = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{f(a)} \cdot \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(1\times n,\mathbb{R})}}{Dg(a)} \overset{}{+} \underset{〃}{Df(a)} \cdot \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{g(a)}$$

Beweis:

Setze:

- $A := Df(a)$, $B := Dg(a)$
- $\rho_f(x) = f(x) - f(a) - A \circ (x-a)$ $\quad (*)$
- $\rho_g(x) = g(x) - g(a) - B \circ (x-a)$ $\quad (**)$
- Dann: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\rho_f(x)}{\|x-a\|_2} = 0 = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\rho_g(x)}{\|x-a\|_2}$ $\quad (***)$
- $\tilde{x} := x - a$, $A \circ \tilde{x} = f_A(\tilde{x})$, $B \circ \tilde{x} = f_B(\tilde{x})$

Setze: $\rho_{f\cdot g}(x) = (f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a) - (f(a)\cdot \overset{B}{\overset{\shortparallel}{Dg(a)}} + \overset{A}{\overset{\shortparallel}{Df(a)}} \cdot g(a)) \circ (x-a)$

$$= (\underset{\substack{\shortparallel \\ (*)}}{f(x) - f(a)}) \cdot g(x) + f(a)\cdot(\underset{\substack{\shortparallel \\ (**)}}{g(x) - g(a)}) - f(a)\cdot B\tilde{x} - A\tilde{x} \cdot g(a)$$

$$= (\rho_f(x) + A\tilde{x}) \cdot g(x) + f(a)\cdot(\rho_g(x) + \cancel{B\tilde{x}}) - \cancel{f(a)\cdot B\tilde{x}} - A\tilde{x}\cdot g(a)$$

$$= \rho_f(x)\cdot g(x) + f(a)\cdot \rho_g(x) + A\tilde{x}\cdot(\underset{\substack{\shortparallel \\ (**)}}{g(x) - g(a)})$$

$$= \rho_f(x)\cdot g(x) + f(a)\cdot \rho_g(x) + \underset{\shortparallel}{A\tilde{x}}\cdot(\rho_g(x) + B\tilde{x})$$

$$= \rho_f(x)\cdot g(x) + f(a)\cdot \rho_g(x) + f_A(\tilde{x})\cdot \rho_g(x) + f_A(\tilde{x})\cdot f_B(\tilde{x})$$

$$\Longrightarrow \frac{\rho_{f\cdot g}(x)}{\|x-a\|_2} = \underset{\substack{(***)\downarrow x\to a \\ 0}}{\frac{\rho_f(x)}{\|x-a\|_2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \text{ g stetig} \\ g(a)}}{g(x)} + \underset{\substack{\downarrow \\ f(a)}}{f(a)} \cdot \underset{\substack{\downarrow (***) \\ 0}}{\frac{\rho_g(x)}{\|x-a\|_2}} + \underset{\substack{\downarrow f_A \text{ stetig} \\ f_A(0)}}{f_A(\tilde{x})} \cdot \underset{\substack{\downarrow (***) \\ 0}}{\frac{\rho_g(x)}{\|x-a\|_2}} + \underset{\substack{(?)\downarrow x\to a \\ 0}}{\frac{f_A(\tilde{x})\cdot f_B(\tilde{x})}{\|x-a\|_2}}$$

$$0 \cdot g(a) + f(a)\cdot 0 + f_A(0)\cdot 0 + 0 = 0$$

$$\xrightarrow[x\to a]{\hspace{8em}} 0 \implies \text{Beh. !}$$

Zeige B: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_A(x-a)\cdot f_B(x-a)}{\|x-a\|_2} = 0$

Dazu: $0 \le \left|\dfrac{f_A(x-a)\cdot f_B(x-a)}{\|x-a\|_2}\right| = \dfrac{|f_A(x-a)|\cdot|f_B(x-a)|}{\|x-a\|_2}$

$$\le \frac{\|f_A\|\cdot\cancel{\|x-a\|_2}\cdot\|f_B\|\cdot\|x-a\|_2}{\cancel{\|x-a\|_2}} = \underline{\|f_A\|}\cdot\underline{\|f_B\|}\cdot\|x-a\|_2$$

$$\downarrow x\to a$$

$$\|f_A\|\cdot\|f_B\|\cdot 0 = 0$$

$\square$

Bsp. 24.22

ⓐ Sei $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: x\mapsto \sum\limits_{|\alpha|=0}^{d} a_\alpha\cdot x^\alpha$ eine Polynomfunktion

$\underset{\substack{24.20\\24.21\\24.19}}{\Rightarrow}$ p ist total diffbar auf $\mathbb{R}^n$ mit $\dfrac{\partial p}{\partial x_j}(x) = \sum\limits_{|\alpha|=1}^{d} a_\alpha\cdot \alpha_j\cdot x^{\alpha-e_j}$

ⓑ Normquadrat: $N^2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: x\mapsto\|x\|_2^2 = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$

ist als Polynomfkt. total diffbar mit

$$DN^2(a) = (2a_1, 2a_2, \dots, 2\cdot a_n)$$

G) Die Kettenregel

Prop. 24.23

Sei $f:U\to\mathbb{R}^m$ total diffbar in $a\in U$ mit $f(U)\subseteq V \underset{\text{offen}}{\subseteq}\mathbb{R}^m$,

und $g:V\to\mathbb{R}^\ell$ total diffbar an $f(a)$.

Dann ist $g\circ f: U\to\mathbb{R}^\ell$ total diffbar in a

mit $$\underbrace{D(g\circ f)(a)}_{\in Mat(\ell\times n,\mathbb{R})} = \underbrace{\overbrace{Dg(f(a))}^{\in Mat(\ell\times m,\mathbb{R})}}_{\substack{\text{äußere}\\\text{Ableitung}}} \circ \underbrace{\overbrace{Df(a)}^{\in Mat(m\times n,\mathbb{R})}}_{\substack{\text{innere}\\\text{Ableitung}}}$$

Beweis

Setze:

- $A := Df(a) \in \mathrm{Mat}(m\times n, \mathbb{R})$
- $B := Dg(f(a)) \in \mathrm{Mat}(k\times m, \mathbb{R})$
- $\rho_f(x) := f(x) - f(a) - A\circ(x-a)$ $\quad (*)$
- $\rho_g(y) := g(y) - g(f(a)) - B\circ(y - f(a))$ $\quad (**)$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\rho_f(x)}{\|x-a\|_2} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{y\to f(a)} \dfrac{\rho_g(y)}{\|y-f(a)\|_2} = 0$ $\quad (***)$

Setze: $\rho_{g\circ f}(x) := (g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) - B\circ A\circ(x-a)$

$$= g(f(x)) - g(f(a)) - B\circ A\circ(x-a)$$

$$\overset{(**)}{=} \rho_g(f(x)) + B\circ(f(x)-f(a)) - B\circ A\circ(x-a)$$

$$= \rho_g(f(x)) + B\circ\big(f(x)-f(a) - A\circ(x-a)\big)$$

$$\overset{(*)}{=} \rho_g(f(x)) + B\circ\rho_f(x)$$

$$= \rho_g(f(x)) + f_B(\rho_f(x))$$

Damit:

$$\frac{\rho_{g\circ f}(x)}{\|x-a\|_2} = \frac{\rho_g(f(x))}{\|x-a\|_2} + \frac{f_B(\rho_f(x))}{\|x-a\|_2}$$

$$= \underbrace{\frac{\rho_g(f(x))}{\|x-a\|_2}}_{\substack{\triangleright \;\downarrow\, x\to a \\ 0}} + \underbrace{f_B}_{\substack{f_B \\ \text{stetig}}\downarrow}\Bigg(\underbrace{\frac{\rho_f(x)}{\|x-a\|_2}}_{x\to a \,\downarrow\, (***)}\Bigg) \xrightarrow{x\to a} 0$$

$$f_B(\;0\;) = 0$$

$$\Vert$$

Beh

Zeige noch ?: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varrho_g(f(x))}{\|x-a\|_2} = 0$

Dazu: $\sigma : V \longrightarrow \mathbb{R}^k : y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\varrho_g(y)}{\|y-f(a)\|_2}, & \text{wenn } y \neq f(a) \\ 0, & \text{wenn } y = f(a) \end{cases}$

$\Longrightarrow$ σ ist stetig in $y = f(a)$, wegen $(***)$

$\overset{\text{Def.} + (**)}{\Longrightarrow}$ $\forall y \in V: \quad \varrho_g(y) = \sigma(y)\cdot\|y-f(a)\|_2$ $(****)$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{\varrho_g(f(x))}{\|x-a\|_2}\right\|_2 \overset{(****)}{=} \|\sigma(f(x))\|_2 \cdot \frac{\|f(x)-f(a)\|_2}{\|x-a\|_2}$$

$$= \|\sigma(f(x))\|_2 \cdot \frac{\|\varrho_f(x) + A\circ(x-a)\|_2}{\|x-a\|_2}$$

$$\leq \|\sigma(f(x))\|_2 \cdot \frac{\|\varrho_f(x)\|_2 + \|\overbrace{A\cdot(x-a)}^{=f_A(x-a)}\|_2}{\|x-a\|_2}$$

$$\leq \|\sigma(f(x))\|_2 \cdot \left(\frac{\|\varrho_f(x)\|_2}{\|x-a\|_2} + \frac{\|f_A\|\cdot\cancel{\|x-a\|_2}}{\cancel{\|x-a\|_2}}\right)$$

$$= \|\sigma(\underbrace{f(x)}_{\substack{\downarrow x\to a \\ f(a)}})\|_2 \cdot \left(\left\|\underbrace{\frac{\varrho_f(x)}{\|x-a\|_2}}_{\substack{(***)\ \downarrow x\to a \\ 0}}\right\|_2 + \|f_A\|\right) \longrightarrow \underbrace{\|0\|_2 \cdot (0 + \|f_A\|)}_{=\,0}$$

f stetig in a

$\downarrow x\to a$

$\sigma(f(a)) = 0$

σ stetig in $f(a)$

Bsp. 24.24:

ⓐ $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$\parallel$

$w \circ p$

mit $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\quad w : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt{y}$

total diffbar auf $\mathbb{R}^n$ $\qquad$ total diffbar auf $(0, \infty)$

$\underset{KR}{\Longrightarrow}$ N total diffbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

mit $DN(a) = Dw(p(a)) \circ Dp(a)$

$$= \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{p(a)}} \cdot (\cancel{2} a_1, \dots, \cancel{2} a_n) = \left(\frac{a_1}{\|a\|_2}, \dots, \frac{a_n}{\|a\|_2} \right)$$

ⓑ · $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : y \longmapsto \frac{1}{y}$ total diff.bar

· $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \longmapsto \|x\|_2$ total diffbar

$\Longrightarrow$ $g \circ f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \longmapsto \frac{1}{\|x\|_2}$ ist total diffbar

mit $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$

$$= -\frac{1}{(f(a))^2} \cdot \left(\frac{a_1}{\|a\|_2}, \dots, \frac{a_n}{\|a\|_2} \right)$$

$$= \left(\frac{-a_1}{\|a\|_2^3}, \dots, \frac{-a_n}{\|a\|_2^3} \right)$$

H) Die Quotientenregel

Prop. 24.25

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ total diff.bar in $a \in U$ mit $g(a) \neq 0$ und sei g stetig auf U.

Dann gelten: ① $U \setminus g^{-1}(0)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

② $\frac{f}{g} : U \setminus g^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist total diff.bar in a

mit $D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{Df(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot Dg(a)}{g^2(a)}$

Beweis:

① g stetig $\Rightarrow$ $g^{-1}(0) = g^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{abgeschlossen in } \mathbb{R}})$ ist abgeschlossen in U

$\Rightarrow$ $U \setminus g^{-1}(0)$ offen in U, also auch in $\mathbb{R}^n$ (da U offen in $\mathbb{R}^n$)

② Betrachte: $\mathrm{inv} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\};\ y \longmapsto \frac{1}{y}$
ist total diff.bar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $D\,\mathrm{inv}(y) = -\frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow$ $\frac{f}{g} = f\cdot(\mathrm{inv}\circ g)$ ist nach KR + PR total diff.bar in a

mit
$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) \overset{PR}{=} f(a)\cdot D(\mathrm{inv}\circ g)(a) + Df(a)\cdot(\mathrm{inv}\circ g)(a)$$
$$= f(a)\cdot D\,\mathrm{inv}(g(a))\cdot Dg(a) + Df(a)\cdot\frac{1}{g(a)}$$
$$= f(a)\cdot\left(-\frac{1}{(g(a))^2}\right)\cdot Dg(a) + Df(a)\cdot\frac{1}{g(a)}$$
$$= \frac{Df(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot Dg(a)}{(g(a))^2}$$

$\boxed{\text{I}}$

Bsp. 24.26

24.22 + 24.25 $\Rightarrow$ rationale Fkt. sind total diff.bar auf ihrem Def.bereich !

I) Geometrische Interpretation des Gradienten

Def. 24.27

Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ partiell diff.bar in $a \in \mathcal{U}$.

Dann: $\operatorname{grad}(f)(a) := \nabla f(a) := Jf(a)^t = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

heißt der Gradient von f in a.

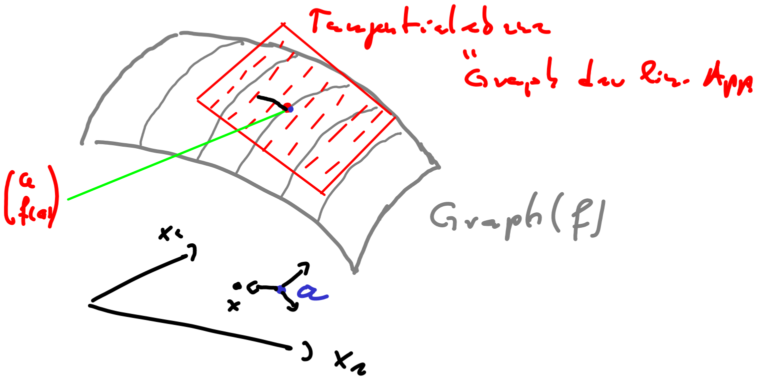
Bemerkung 24.28

Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ total diff.bar in $a \in \mathcal{U}$.

- $\mathcal{U} \to \mathbb{R};\ x \longmapsto f(a) + Jf(a) \circ (x-a) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle$

  ist die lineare Approximation von f in a.

- Graph der lin. Approx. $\hat{=}$ Tangentialebene an Graph(f) in $\binom{a}{f(a)}$



- $\nabla f(a)$ $\hat{=}$ Richtung des größten Anstiegs von f in a

  Denn: x nahe bei a

  $\Rightarrow |f(x) - f(a)| \approx |\langle \nabla f(a), x-a \rangle| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\nabla f(a)\|_2 \cdot \|x-a\|_2$

  mit "$=$" $\Leftrightarrow$ $\nabla f(a)$ lin. abh. von $x-a$

7) Differenzierbarkeit in normierten Räumen

Bem. 24.29

Seien V und W normierte Räume, $\mathcal{U} \subseteq V$ offen, $f : \mathcal{U} \longrightarrow W$.

Dann: f heißt Fréchet-differenzierbar in $a \in \mathcal{U}$

$$:\Longleftrightarrow \exists\ A \in L(V, W) \ \wedge\ \exists\ \rho : \mathcal{U} \longrightarrow W, \text{ s.d.}$$

$$\forall x \in V : \ f(x) = f(a) + A(x-a) + \rho(x) \ \wedge\ \lim_{x \to a} \frac{\rho(x)}{\|x-a\|_V} = 0$$

Damit gelten Linearität, Produkt-, Ketten- und Quotientenregel sowie Stetigkeit von f mit denselben Beweisen!

§ 25 Der Satz von Taylor und seine Anwendungen

Generalvoraussetzung:

- Betrachte in § 24 $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{R}^m$ stets als normierte Räume bezgl. der euklid. Norm.
- Stets sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen; insbesondere: $HP(U) \supseteq U$.

A) Der Satz von Schwarz

Bsp. 25.1

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 3x_1^5 + 2x_1^3 \cdot x_2 + 5x_2$$ ist partiell diff.bar

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_1 f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = D_1 f(x_1, x_2) = 15\, x_1^4 + 6\, x_1^2 \cdot x_2 \\ D_2 f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = D_2 f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1^3 + 5 \end{array}\right\} \text{partiell diffbar}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_1 D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 60\, x_1^3 + 12\, x_1 x_2 \\ D_2 D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 6\, x_1^2 \\ D_1 D_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 6\, x_1^2 \\ D_2 D_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} D_2 D_1 f(x_1, x_2) \\ \shortparallel \\ D_1 D_2 f(x_1, x_2) \end{array} \quad !$$

Def. 25.2

ⓐ $f : U \to \mathbb{R}$ heißt k-fach stetig differenzierbar auf U

$:\Longleftrightarrow \forall\, j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}\ \exists\ D_{j_k} \cdots D_{j_1} f : U \to \mathbb{R}$ und ist stetig

Beachte: es gibt n^k solche k-fachen partiellen Ableitungen!

ⓑ $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt k-fach stetig diff.bar auf U

$:\Longleftrightarrow$ alle Komponentenfkt. sind k-fach stetig diffbar auf U

ⓒ $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m) := \{ f : U \to \mathbb{R}^m \mid f$ k-fach stetig diff.bar auf $U \}$.

Bem. 25.3:

- $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR mit $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^m) \supseteq \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m) \supseteq \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^m) \supseteq \dots$
- $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ ist der $\mathbb{R}$-VR der ∞-oft diff.baren Abbildungen von U und $\mathbb{R}^m$

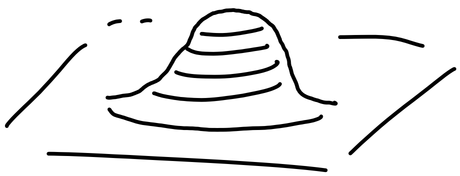
Bsp. 25.4 (Glockenfunktion)

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(1-\|x\|_2^2)^2}\right) , & \|x\|_2 < 1 \\ 0 , & \|x\|_2 \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f ist ∞-oft diff.bar als Verkettung der unendlich oft-diff-baren Abbildungen

$$t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) , & t \neq 0 \\ 0 , & t = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad x \mapsto 1 - \|x\|_2^2$$

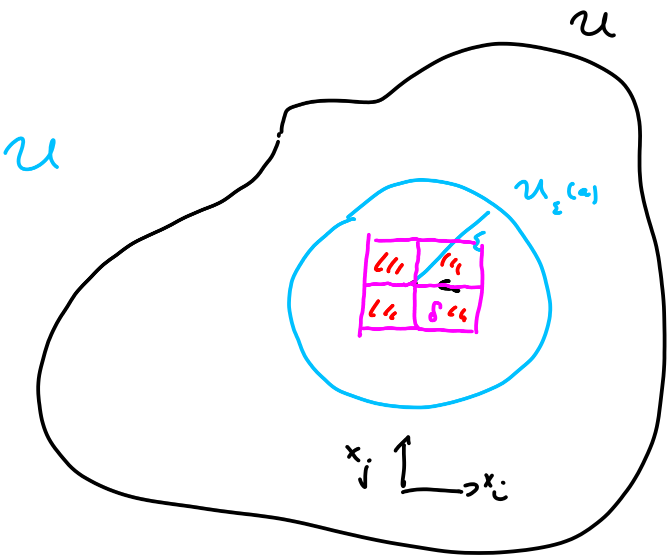
$n = 2$:



Satz von Schwarz 25.5

Sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ zweifach stetig diff.bar auf $\mathcal{U}$.

Dann: $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ $\forall a \in \mathcal{U}$: $D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a)$.



Beweis: o.E.: $m = 1$.

Sei $a \in \mathcal{U}$ $\underset{\mathcal{U}\text{ offen}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{a + s \cdot e_i + t \cdot e_j \mid -\delta \leq s,t \leq \delta\}$$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$\mathcal{O} := \left\{a + s \cdot e_i + t \cdot e_j \;\middle|\; \begin{matrix} -\delta < s,t < \delta \\ s \neq 0 \neq t \end{matrix}\right\}$$

Setze: $H : \mathcal{O} \to \mathbb{R} : \binom{s}{t} \mapsto \dfrac{f(a+s\cdot e_i + t\cdot e_j) - f(a+t\cdot e_j) - f(a+s\cdot e_i) + f(a)}{s \cdot t}$

Beachte $D_j D_i f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{D_i f(a+t\cdot e_j) - D_i f(a)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \lim_{s\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_j + s\cdot e_i) - f(a+t\cdot e_j)}{s \cdot t} - \lim_{s \to 0} \frac{f(a+s\cdot e_i) - f(a)}{s \cdot t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \lim_{s\to 0} H(s,t)$$

$$D_i D_j f(a) = \lim_{s\to 0} \lim_{t\to 0} H(s,t)$$

Zeige: $D_i D_j f(a) \underset{!}{=} \lim_{(s,t)\to(0,0)} H(s,t) = D_j D_i f(a)$

Dazu: Sei $s \in (-\delta, \delta)$ fest.

$\Rightarrow F_s : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R} ; t \mapsto f(a + s\cdot e_i + t\cdot e_j) - f(a + t\cdot e_j)$

ist differenzierbar mit Ableitung

$$F_s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F_s(t+h) - F_s(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+s\cdot e_i + t\cdot e_j + h\cdot e_j) - f(a+t\cdot e_j + h\cdot e_j) - f(a+s\cdot e_i + t\cdot e_j) + f(a+t\cdot e_j)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+s\cdot e_i + t\cdot e_j + h\cdot e_j) - f(a+s\cdot e_i + t\cdot e_j)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(a+t\cdot e_j + h\cdot e_j) - f(a+t\cdot e_j)}{h}$$

$$= D_j f(a + s\cdot e_i + t\cdot e_j) - D_j f(a + t\cdot e_j)$$

$\underset{\text{MWS 18.7}}{\Longrightarrow}$ $\forall t \in (-\delta,\delta)\ \exists\, \theta_{s,t}$ mit $|\theta_{s,t}| < |t|$ mit

(*) $F_s(t) - F_s(0) = (t-0)\cdot F_s'(\theta_{s,t}) = t\cdot\left(D_j f(a + s\cdot e_i + \theta_{s,t}\cdot e_j) - D_j f(a + \theta_{s,t}\cdot e_j)\right)$

Setze zudem:

$G_{s,t} : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R} ; r \longmapsto D_j f(a + r\cdot e_i + \theta_{s,t}\cdot e_j)$ ist diffbar mit

$$G_{s,t}'(r) = \lim_{h\to 0} \frac{G_{s,t}(r+h) - G_{s,t}(r)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{D_j f(a + r\cdot e_i + h\cdot e_i + \theta_{s,t}\cdot e_j) - D_j f(a + r\cdot e_i + \theta_{s,t}\cdot e_j)}{h}$$

$$= D_i D_j f(a + r\cdot e_i + \theta_{s,t}\cdot e_j)$$

$\underset{\text{18.7}}{\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}}$ $\forall \underset{\overset{\shortparallel}{r}}{s} \in (-\delta,\delta)\ \exists\, \sigma_{s,t}$ mit $|\sigma_{s,t}| < |s|$: $G_{s,t}(s) - G_{s,t}(0) = s\cdot G_{s,t}'(s)$ (**)

$= s\cdot D_i D_j f(a + \sigma_{s,t}\cdot e_i + \theta_{s,t}\cdot e_j)$

Damit gilt $\forall\ \overset{\neq 0}{s}, \overset{\neq 0}{t} \in (-\delta, \delta)$:

$$H(s,t) = \frac{F_s(t) - F_s(0)}{s \cdot t} \overset{(*)}{=} \frac{D_j f(a + s \cdot e_i + \theta_{s,t} \cdot e_j) - D_j f(a + \theta_{s,t} \cdot e_j)}{s}$$

$$= \frac{G_{s,t}(s) - G_{s,t}(0)}{s} \overset{(**)}{=} D_i D_j f(a + \sigma_{s,t} \cdot e_i + \theta_{s,t} \cdot e_j)$$

weil $D_i D_j f$ stetig in a

$$(s,t) \longrightarrow (0,0)$$
$$\Downarrow$$
$$(\sigma_{s,t}, \theta_{s,t}) \longrightarrow (0,0)$$

$$\Big\downarrow$$

$$D_i D_j f(a)$$

Also: $\lim\limits_{(s,t) \to (0,0)} H(s,t) = D_i D_j f(a)$

Analog durch Vertauschen der Rollen von e_i und e_j:

$$\lim_{(s,t) \to (0,0)} H(s,t) = D_j D_i f(a)$$

$\square$

Bsp. 25.6

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x_1^3 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ \exists\ D_1 D_2 f(0,0)$ & $D_2 D_1 f(0,0)$, aber $D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)$

Denn: $D_1 D_2 f$ & $D_2 D_1 f$ in $(0,0)$ nicht stetig !!!

Korollar 25.7

Sei $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$, $\sigma \in S_k$ und $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$.

Dann: $\forall a \in U: D_{j_k} \cdots D_{j_1} f(a) = D_{j_{\sigma(k)}} \cdots D_{j_{\sigma(1)}} f(a)$

Beweis:

- 25.5 $\Rightarrow$ gilt, wenn σ Nachbartransposition ist
- jede Permutation ist Produkt von Nachbartranspositionen
- folgt mit Induktion nach Anzahl der Nachbartranspositionen. $\square$

B) Taylorpolynome

Notation 25.8

- $D_i D_j f(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ · $D_i D_i f(a) = D_i^2 f(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$: $D^\alpha f(a) = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(a) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(a)$

  (beachte: Reihenfolge wegen Schwarz egal)
- $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$:
  - $\beta \leq \alpha \;:\Leftrightarrow\; \beta_1 \leq \alpha_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \leq \alpha_n$
  - $\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$
  - $\binom{\alpha}{\beta} := \dfrac{\alpha!}{\beta! \cdot (\alpha - \beta)!} = \dfrac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{\beta_1! \cdots \beta_n! \cdot (\alpha_1 - \beta_1)! \cdots (\alpha_n - \beta_n)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$, $\beta \leq \alpha$

Bem. 25.9

- Nachrechnen: $D^\beta x^\alpha = \beta! \cdot \binom{\alpha}{\beta} \cdot x^{\alpha - \beta}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ mit $\beta \leq \alpha$
- Insbesondere: $D^\alpha x^\alpha = \alpha!$

· Polynomfunktion: $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{|\alpha|=0}^{d} a_\alpha \cdot x^\alpha$

$$\Longrightarrow \quad D^\beta p(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{d} a_\alpha \cdot D^\beta x^\alpha\big|_{x=0} = a_\beta \cdot \beta! \quad \text{für } |\beta| \le d.$$

$$\Longrightarrow \quad p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{d} \frac{D^\alpha p(0)}{\alpha!} \cdot x^\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{d} \frac{D^\alpha p(0)}{\alpha!} \cdot (x-0)^\alpha$$

Def. 25.10

ⓐ Sei $f : U \to \mathbb{R}$ k-fach stetig diff.bar auf U und $a \in U$.

Dann heißt
$$T^k_{f,a} := \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \cdot (t-a)^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \le d}} \frac{D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(a)}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \cdot (t_1-a_1)^{\alpha_1} \cdots (t_n-a_n)^{\alpha_n}$$

das k-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspkt. a.

ⓑ Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ und $a \in U$.

Dann heißt
$$T_{f,a} := \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \cdot (t-a)^\alpha$$

die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt a.

Bem. 25.11

$f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ und $a \in U$

$$\Longrightarrow \quad T^1_{f,a} = \sum_{|\alpha|=0}^{1} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha$$

$$= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i f(a)}{\underbrace{e_i!}_{=1}} \cdot \overbrace{(x-a)^{e_i}}^{=(x_i-a_i)}$$

lineare Approximation an f in a

$\parallel$

$$= f(a) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) \cdot (x_i - a_i) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle$$

Bsp. 25.12

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \longmapsto \boxed{x_2 \cdot \cos(x_1)}, \quad a = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^2_{f,a} = f(a) + \frac{D_1 f(a)}{1!\cdot 0!}\cdot(t_1-a_1) + \frac{D_2 f(a)}{0!\cdot 1!}\cdot(t_2-a_2)$$

$$+ \frac{D_1^2 f(a)}{2!\cdot 0!}\cdot(t_1-a_1)^2 + \frac{D_1 D_2 f(a)}{1!\cdot 1!}\cdot(t_1-a_1)\cdot(t_2-a_2) + \frac{D_2^2 f(a)}{0!\cdot 2!}\cdot(t_2-a_2)^2$$

$$= 0 + \frac{\overbrace{-0\cdot\sin(0)}^{=0}}{1\cdot 1}\cdot t_1 + \frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{1\cdot 1}\cdot t_2 + \frac{\overbrace{-0\cdot\cos(0)}^{=0}}{2\cdot 1}\cdot t_1^2$$

$$+ \frac{\overbrace{-\sin(0)}^{=0}}{1\cdot 1}\cdot t_1\cdot t_2 + \frac{0}{1\cdot 2}\cdot t_2^2 = t_2$$

Mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von cos gilt:

$$T_{f,a} = t_2\cdot\cos(t_1) = t_2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{t_1^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot t_1^{2k}\cdot t_2$$

c) Der Satz von Taylor

Satz von Taylor 25.13

Sei $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und $\overline{ax} := \{a + t\cdot(x-a) \mid t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{U}$.

Dann: ⓐ $\exists c \in \overline{ax}: f(x) - T^k_{f,a}(x) = \sum_{|\alpha|=k+1}\frac{D^\alpha f(c)}{\alpha!}\cdot(x-a)^\alpha$ Restglied nach Lagrange

ⓑ $f(x) - T^k_{f,a}(x) = (k+1)\cdot\int_0^1 (1-t)^k\cdot\sum_{|\alpha|=k+1}\frac{D^\alpha f(a+t\cdot(x-a))}{\alpha!}\cdot(x-a)^\alpha\,dt$

Restglied in Integralform

Lemma 25.14

Sei $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und $\overline{ax} \subseteq \mathcal{U}$.

Dann ist $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(a + t\cdot(x-a))$

$k+1$-fach stetig differenzierbar und für $0 \le \ell \le k+1$ gilt:

$$\frac{h^{(\ell)}(t)}{\ell!} = \sum_{|\alpha| = \ell} \frac{D^\alpha f(a + t\cdot(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha . \qquad \circledast$$

Beweis:

Setze: $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto a + t\cdot(x-a)$ ist ∞-oft diff.bar.

$\Rightarrow \quad h = f \circ g$ ist $k+1$-fach stetig diff.bar.

Zeige $\circledast$ durch Induktion nach ℓ:

$\ell = 0$: $\quad \frac{h^{(0)}(t)}{0!} = h(t) = f(a + t\cdot(x-a)) = \sum_{|\alpha| = 0} \frac{D^\alpha f(a+t(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha$

$\ell - 1 \mapsto \ell$: $\quad$ Setze: $\quad F_\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \underset{\substack{\shortparallel \\ D^\alpha f(a + t\cdot(x-a))}}{((D^\alpha f)\circ g)(t)}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}(t) &\overset{\text{KR}}{=} D(D^\alpha f)(g(t)) \circ Dg(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \underset{{}^{\shortparallel}D^{e_j}}{D_j} D^\alpha f(g(t)) \cdot (x_j - a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} D^{\alpha + e_j} f(a + t\cdot(x-a)) \cdot (x_j - a_j) \end{aligned}\right\} \quad \circledast\circledast$$

Damit:

$$\frac{h^{(\ell)}(t)}{\ell!} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\frac{\partial h^{(\ell-1)}}{\partial t}(t)}{(\ell-1)!} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\partial \frac{h^{(\ell-1)}(t)}{(\ell-1)!}}{\partial t}$$

$$\underset{\text{Ind}}{=} \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d \sum\limits_{|\alpha|=\ell-1} \frac{D^\alpha f(a+t\cdot(x-a))}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha}{dt}$$

$$= \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d \sum\limits_{|\alpha|=\ell-1} \frac{\overbrace{D^\alpha f(g(t))}^{=F_\alpha(t)}}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha}{dt}$$

$$= \frac{1}{\ell} \cdot \sum_{|\alpha|=\ell-1} \frac{dF_\alpha}{dt}(t) \cdot \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}$$

$$= \frac{1}{\ell} \cdot \sum_{|\alpha|=\ell-1} \sum_{j=1}^n D^{\alpha+e_j} f(a+t\cdot(x-a)) \overbrace{\cdot (x_j-a_j) \cdot (x-a)^\alpha}^{(x-a)^{\alpha+e_j} \; =} \frac{}{\alpha!}$$

$$= \sum_{|\alpha|=\ell-1} \sum_{j=1}^n D^{\alpha+e_j} f(a+t\cdot(x-a)) \cdot \frac{(x-a)^{\alpha+e_j}}{(\alpha+e_j)!} \cdot \frac{\alpha_j+1}{\ell}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{|\beta|=\ell} D^\beta f(a+t\cdot(x-a)) \cdot \frac{(x-a)^\beta}{\beta!}$$

<u>Zu ?</u>: Sei $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| = \ell$

Setze: $\alpha^j := (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_j - 1, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)$

$\Rightarrow \beta = \alpha^j + e_j$ mit $\alpha^j \in \mathbb{N}^n$ oder $\beta_j = 0$

Damit: $$\sum_{j=1}^n \frac{\alpha^j_j + 1}{\ell} = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\ell} = \frac{|\beta|}{\ell} = 1$$

$\boxtimes$

Beweis von 25.13:

Setze: $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(a + t\cdot(x-a))$.

Damit:
$$f(x) - T^k_{f,a}(x) = f(x) - \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}\cdot(x-a)^\alpha$$

$$= f(x) - \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\sum_{|\alpha|=l} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}\cdot(x-a)^\alpha}_{\parallel\ 18.33}$$

$$= h(1) - \sum_{l=0}^{k} \frac{h^{(l)}(0)}{l!}\cdot(1-0)^l$$

$$= h(1) - T^k_{h,0}(1)$$

$$\underset{\exists\theta\in(0,1)}{\overset{\text{Taylor } 18.34}{=}} \frac{h^{k+1}(\theta)}{(k+1)!}\cdot(1-0)^{k+1}$$

$$\underset{18.33}{=} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\overbrace{a+\theta\cdot(x-a)}^{=:c\,\in\,\overline{ax}})}{\alpha!}\cdot(x-a)^\alpha$$

Zudem:
$$f(x) - T^k_{f,a}(x) = h(1) - T^k_{h,0}(1)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{\underset{20.24}{=}} \int_0^1 \frac{h^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot(1-t)^k\,dt$$

$$= (k+1)\cdot\int_0^1 \frac{h^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}\cdot(1-t)^k\,dt$$

$\parallel$ 18.33

$$\underset{18.33}{=} (k+1)\cdot\int_0^1 (1-t)^k\cdot\sum_{|\alpha|=k+1}\frac{D^\alpha f(a+t\cdot(x-a))}{\alpha!}\cdot(x-a)^\alpha\,dt$$

$\square$

Bem. 25.15

ⓐ $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U,\mathbb{R})$ und $x \in \overline{U_\varepsilon(a)} \subseteq U$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - T^k_{f,a}(x)| \leq \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\max_{c\in \overline{U_\varepsilon(a)}} |D^\alpha f(c)|}{\alpha!} \cdot \|x-a\|_2^{k+1}$$

Weil $|(x-a)^\alpha| = \underbrace{|x_1-a_1|}_{\leq \|x-a\|_2}{}^{\alpha_1} \cdots \underbrace{|x_n-a_n|}_{\leq \|x-a\|_2}{}^{\alpha_n} \leq \|x-a\|_2^{|\alpha|}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-T^k_{f,a}(x)}{\|x-a\|_2^k} = 0$$

d.h. Fehler geht mit Ordnung $k+1$ gegen 0 für $x\to a$

ⓑ Taylor mit Integralform ist 1:1 auf Abb. von $U \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}^m$ übertragbar, weil Lagrange braucht man für jede Komponentenfkt. ein eigenes c_i !

Korollar 25.16 (Mittelwertsatz $\hat{=}$ Taylor für $k=0$)

Sei $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ und $\overline{xa} \subseteq U$.

Dann ⓐ $\exists\, c \in \overline{ax}$: $f(x)-f(a) = Df(c)\circ(x-a)$

$$= \langle \nabla f(c), x-a\rangle$$

ⓑ $$f(x)-f(a) = \int_0^1 Df(a+t\cdot(x-a))\circ(x-a)\,dt$$

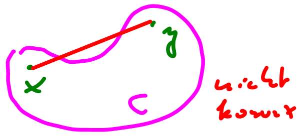
$$= \int_0^1 \langle \nabla f(a+t\cdot(x-a)), x-a\rangle\, dt$$

D) Differenzierbare Abbildungen auf konvexen Mengen

Def. 25.17

Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn: $\forall x, y \in C : \overline{xy} \subseteq C$.

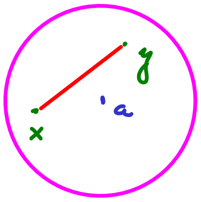
$$\overline{xy} = \{x + t\cdot(y-x) \mid t \in [0,1]\}$$



Beispiel 25.18

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$.

Dann: $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq \varepsilon\}$ ist konvex.



Bew.: $x, y \in \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(a)}$ und $t \in [0,1]$

$$\|x + t\cdot(y-x) - a\| = \|(1-t)\cdot(x-a) + t\cdot(y-a)\|$$

$$\leq (1-t)\cdot\underbrace{\|x-a\|}_{\leq\varepsilon} + t\cdot\underbrace{\|y-a\|}_{\leq\varepsilon} \leq (1-t)\cdot\varepsilon + t\cdot\varepsilon = \varepsilon \quad \boxtimes$$

Korollar 25.19

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $C \subseteq U$ konvex und kompakt, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$.

Dann gilt $\forall x, y \in C$:

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \|x-y\|_2 \cdot n^2 \cdot \max_{z \in C} \|Df(z)\|_2$$

und

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \|x-y\|_\infty \cdot n \cdot \max_{z \in C} \|Df(z)\|_\infty .$$

Insbesondere: f ist Lipschitz-stetig auf C.

Bem.: Wir fassen hier $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ als $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ auf, so dass $\|(a_{ij})\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ und $\|(a_{ij})\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Beweis:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \underset{\substack{\exists c_i \in \overline{xy} \\ \text{wegen MWS 25.16}}}{=} |Df_i(c_i) \circ (x-y)| \le \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|D_j f_i(c_i)|}_{\le \|Df(c_i)\|_\infty} \cdot \underbrace{|(x_j - y_j)|}_{\le \|x-y\|_\infty}$$

$$\le \max_{z \in C} \|Df(z)\|_\infty \cdot \|x-y\|_\infty \cdot n \qquad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,k} |f_i(x) - f_i(y)| \le \max_{z \in C} \|Df(z)\|_\infty \cdot \|x-y\|_\infty \cdot n$$

Bemerkung: $\forall z \in \mathbb{R}^n : \quad \|z\|_\infty \le \|z\|_2 \le \sqrt{n} \cdot \|z\|_\infty \qquad (22.42)$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 \le \sqrt{n} \cdot \|f(x) - f(y)\|_\infty \le \sqrt{n} \cdot n \cdot \max_{z \in C} \|Df(z)\|_\infty \cdot \|x-y\|$$

$$\le n^2 \cdot \max_{z \in C} \|Df(z)\|_2 \cdot \|x-y\|_2$$

$\square$

Korollar 25.20

$f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \Rightarrow f$ ist lokal Lipschitz-stetig

Beweis:

$a \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon(a)} \subseteq U \Rightarrow f|$ ist Lipschitz-stetig auf $\overline{U_\varepsilon(a)}$ nach 25.19

$\square$

E) Der Satz von Taylor und die Hesse-Matrix

Def. 25.21

$$f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \Rightarrow H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x) & \cdots & D_1 D_n f(x) \\ \vdots & & \\ D_n D_1 f(x) & \cdots & D_n D_n f(x) \end{pmatrix}$$

heißt die Hesse-Matrix von f in $x \in U$.

Bemerkung: Satz von Schwarz $\Rightarrow$ $H_f(x)$ ist symmetrisch

Bsp. 25.22

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto 3x_1^5 + 2x_1^3 x_2 + 5x_2 \quad \Longrightarrow \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} 60x_1^3 + 12x_1x_2 & 6x_1^2 \\ 6x_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Korollar 25.23 (Taylor für $k = 1$)

Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und $\overline{xa} \subseteq \mathcal{U}$.

Dann: $\exists\, c \in \overline{ax}$: $f(x) = f(a) + Df(a) \circ (x-a) + \dfrac{(x-a)^t \circ H_f(c) \circ (x-a)}{2}$

Beweis:

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(c)}{\alpha!} \cdot (x-a)^\alpha = \sum_{i=1}^{2} \frac{D_i^2 f(c)}{2} \cdot (x_i - a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \frac{D_i D_j f(c)}{1! \cdot 1!} \cdot (x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{D_i^2 f(c)}{2} \cdot (x_i - a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{D_i D_j f(c)}{2 \cdot 1! \cdot 1!} \cdot (x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \cdot \frac{D_i D_j f(c)}{2} \cdot (x_i - a_i)$$

$$= \frac{(x-a)^t \circ H_f(c) \circ (x-a)}{2}$$

Rest Taylor 25.13

□

F) Lokale Extrema im Mehrdimensionalen

Def. 25.24

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$

ⓐ f hat in a ein globales Maximum $:\Longleftrightarrow \forall x \in D : f(x) \leq f(a)$

ⓑ f hat in a ein lokales Maximum $:\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in D \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) \leq f(a)$

ⓒ f hat in a ein isoliertes lokales Maximum $:\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall \overset{\overset{a}{\neq}}{x} \in D \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) < f(a)$

ⓓ f hat in a ein globales Minimum $:\Longleftrightarrow \forall x \in D : f(x) \geq f(a)$

ⓔ f hat in a ein lokales Minimum $:\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in D \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) \geq f(a)$

ⓕ f hat in a ein isoliertes lokales Minimum $:\Longleftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall \overset{\overset{a}{\neq}}{x} \in D \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) > f(a)$

ⓖ a heißt Extremstelle und $f(a)$ Extremum von f
$:\Longleftrightarrow$ f hat in a ein lokales Maximum oder Minimum

ⓗ a heißt kritischer Punkt von f $:\Longleftrightarrow$ f diff-bar in a mit $Df(a) = (0, \dots, 0)$

ⓘ a heißt Sattelpunkt von f
$:\Longleftrightarrow Df(a) = (0, \dots, 0)$ und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x, y \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) : f(x) > f(a) > f(y)$

Prop. 25.25 (Notwend. Kriterium für eine Extremstelle)

Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und $a \in \mathcal{U}$ eine Extremstelle von f.

Dann: $Df(a) = (0, \dots, 0)$.

Beweis:

$\mathcal{U}$ offen $\wedge$ $a \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow g_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}; \; t \longmapsto f(a + t \cdot e_j)$ ist stetig diffbar

und g_j hat eine Extremstelle in 0

$$\underset{18.2}{\Rightarrow} 0 = g_j'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g_j(t) - g_j(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_j) - f(a)}{t} = \partial_j f(a)$$

$\Rightarrow Df(a) = (0, \dots, 0)$ ☐

Erinnerung aus der Linearen Algebra:

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix.

ⓐ A ist positiv definit $\iff \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n : x^t \circ A \circ x > 0$

$\iff$ alle Eigenwerte von A sind positiv

$\iff \forall\, k \in \{1, \dots, n\} : \det(A_k) > 0$, wobei $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$

ⓑ A ist negativ definit $\iff \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n : x^t \circ A \circ x < 0$

$\iff$ alle Eigenwerte von A sind negativ

$\iff \forall\, k \in \{1, \dots, n\} : (-1)^k \cdot \det(A_k) > 0$, wobei $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$

$\iff -A$ ist positiv definit

ⓒ A ist indefinit $\iff \exists\, x, y \in \mathbb{R}^n : x^t \circ A \circ x > 0 > y^t \circ A \circ y$

$\iff A$ hat einen positiven und einen negativen Eigenwert

Satz 25.26 (Hinreichendes Kriterium für Extremstellen)

Sei $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ und $a \in U$ mit $Df(a) = (0, \dots, 0)$.

ⓐ $H_f(a)$ positiv definit $\Rightarrow f$ hat in a ein isol. lokal. Minimum.

ⓑ $H_f(a)$ negativ definit $\Rightarrow f$ " " " " " " Maximum.

ⓒ $H_f(a)$ indefinit $\Rightarrow f$ " " " einen Sattelpunkt und keine Extremstelle.

Beweis

ⓐ Setze:
$$g_k : U \to \mathbb{R} : x \mapsto \det\begin{pmatrix} D_1D_1 f(x) & \cdots & D_1D_k f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_kD_1 f(x) & \cdots & D_kD_k f(x) \end{pmatrix} \text{ ist stetig}$$

$$\Rightarrow g_k^{-1}((0,\infty)) \subseteq U \text{ ist offen in } U$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} := \bigcap_{k=1}^{n} g^{-1}((0,\infty)) \text{ ist offen } U$$

Beweis: $H_f(a)$ pos. definit $\Longrightarrow g_k(a) > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

$$\Longrightarrow a \in \mathcal{O} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{O}\text{ offen}}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 : \mathcal{U}_\delta(a) \subseteq \mathcal{O}$$

Sei $\overset{\overset{a}{\nparallel}}{x} \in \mathcal{U}_\delta(a) \Longrightarrow \overline{ax} \subseteq \mathcal{U}_\delta(a) \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$

$$\overset{25.23}{\Longrightarrow} \exists c \in \overline{ax} : f(x) = f(a) + \overbrace{Df(a) \circ (x-a)}^{\overset{0}{\shortparallel}} + \frac{(x-a)^t \circ H_f(c) \circ (x-a)}{2}$$

$$= f(a) + \frac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{(x-a)^t \circ H_f(c) \circ (x-a)}_{>0} \Big) > f(a)$$

weil $c \in \mathcal{O} \Rightarrow H_f(c)$ pos. def.

$\Longrightarrow f$ hat in a ein isoliertes lokales Minimum

ⓑ $H_f(a)$ neg. def. $\Longrightarrow H_{-f}(a) = -H_f(a)$ ist pos. definit

$\underset{ⓐ}{\Longrightarrow} -f$ hat in a ein isol. lok. Minimum

$\Longrightarrow f$ " " " " " " Maximum.

ⓒ Sei $H_f(a)$ nun indefinit, d.h. $\exists x, y \in \mathbb{R}^n : \left. \begin{array}{l} x^t \circ H_f(a) \circ x > 0 \\ \wedge \; y^t \circ H_f(a) \circ y < 0 \end{array} \right\} (*)$

Zeige: f hat in a einen Sattelpunkt,

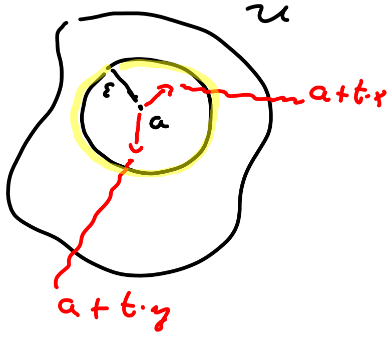
d.h. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) : \; f(\tilde{x}) > f(a) > f(\tilde{y})$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. o.E.: $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{U}$

Setze: $\delta := \min\left\{ \frac{\varepsilon}{\|x\|_2}, \frac{\varepsilon}{\|y\|_2} \right\} > 0$

Für $t \in (-\delta, \delta)$ gilt:

$$a + t \cdot x, \; a + t \cdot y \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$$



Setze: $g:(-\delta,\delta)\longrightarrow\mathbb{R}\,;\ t\mapsto x^t\circ H_f(a+t\cdot x)\circ x$ ist stetig

und $g(0) = x^t\circ H_f(a)\circ x \underset{(*)}{>} 0$

$\Rightarrow \exists\, 0<\rho\le\delta : \forall t\in(-\rho,\rho) : \quad g(t)>0 \quad (**)$

Sei $t\in(-\rho,\rho)$ gegeben: wende Taylor (25.23) an mit a und $a+tx$

$\Rightarrow \exists\, c_t \in \overline{a\ \ a+tx}$, d.h. $\exists\,\theta_t\in(0,t)$

$c_t = a+\theta_t\cdot x$

$$f(\underbrace{a+tx}_{=:\check{x}}) = f(a) + \underbrace{Df(a)\circ(\overbrace{a+tx-a}^{t\cdot x})}_{=0} + \frac{(tx)^t\circ H_f(c_t)\circ(tx)}{2}$$

$$= f(a) + \frac{t^2}{2}\cdot \underbrace{x^t\circ H_f(a+\theta_t\cdot x)\circ x}$$

$$= f(a) + \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{>0}\cdot \underbrace{g(\theta_t)}_{\substack{>0\\(**)}} > f(a)$$

$\Rightarrow \check{x} = a+tx \in U_\varepsilon(a)$, weil $0<t<\rho\le\delta$, und $f(\check{x})>f(a)$

Analog: finde ein $\tilde{y} = a+t'\cdot y\in U_\varepsilon(a)$ mit $f(\tilde{y})<f(a)$

$\boxed{\varepsilon}$

Bem. 25.27

$H_f(a)$ muss nicht pos. definit, neg. definit oder indefinit sein!

$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R} : \binom{x_1}{x_2}\longmapsto x_1^2$ ist 2-fach stetig diffbar

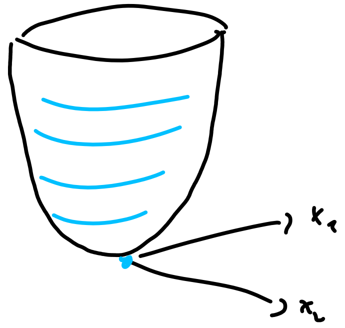
mit $Df(x) = (2x_1, 0) \overset{!}{=} (0,0) \iff x_1=0$

Aber: $H_f(x) = \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ ist weder pos. definit, noch neg. definit, noch indefinit

Trotzdem: f hat in $\binom{x_1}{0}$ $(\forall x_1\in\mathbb{R})$ ein (nicht isoliertes) lokales Minimum!

Bsp. 25.28

ⓐ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1^2 + x_2^2$



$$Df(x) = (2x_1, 2x_2) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\iff x_1 = 0 = x_2$$

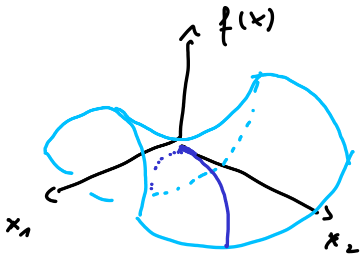
D.h. $a = \binom{0}{0}$ ist der einzige kritische Punkt von f

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ist pos. definit, weil alle Eigenwerte positiv sind

$\Rightarrow a = \binom{0}{0}$ ist ein isol. lok. Minimum

Bemerk: a ist sogar ein globales Minimum!

ⓑ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} ; \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1^2 - x_2^2$



$$\Rightarrow Df(x) = (2x_1, -2x_2) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\iff x_1 = x_2 = 0$$

D.h.: $a = \binom{0}{0}$ ist der einzige kritische Punkt von f

$$\Rightarrow H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ ist indefinit, weil $H_f(a)$ einen positiven und einen negativen Eigenwert hat

Also: f hat in a einen Sattelpunkt!

G) Potenzreihen von Matrizen

Def. 25.29

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $h: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $a, b \in I$.

Dann definieren wir das Integral $$\int_a^b h(s)\,ds := \begin{pmatrix} \int_a^b h_1(s)\,ds \\ \vdots \\ \int_a^b h_n(s)\,ds \end{pmatrix}$$

Prop. 25.30

Sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \longrightarrow f$ glm. auf $[a,b]$.

ⓐ Dann ist f stetig mit $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

ⓑ Wenn alle f_n stetig diffbar sind und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,b]$ glm. konvergiert, dann ist f stetig diffbar mit $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.

Beweis

- Konvergenz in $\mathbb{R}^N$ ist komponentenweise Konvergenz (22.38).
- $f_n \longrightarrow f$ glm. $\Rightarrow$ $\forall i \in \{1, \dots, N\}$: $f_{n(i)} \longrightarrow f_{(i)}$ glm

denn: $\max_{x\in[a,b]} |f_{n(i)}(x) - f_{(i)}(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{f_n \to f \text{ glm.}} 0$

$$\Big\downarrow n\to\infty$$

0

$\Rightarrow f_{n(i)} \longrightarrow f_{(i)}$ glm.

- Wende 20.38 auf die Komponentenfkt. an für ⓐ und 18.28 für ⓑ.

$\square$

Prop. 25.31

Sei $g = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit KR $r > 0$ und

$g : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : s \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_k \cdot s^k$ die induzierte Funktion.

Ferner sei $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Norm auf $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Dann: $\forall s \in \mathbb{R}$ mit $\|s \cdot A\| < r$ ist $g(s \cdot A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot s^k \cdot A^k$ abs. konvergent und $f : \left(-\frac{r}{\|A\|}, \frac{r}{\|A\|}\right) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$; $s \longmapsto g(s \cdot A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot s^k \cdot A^k$ ist ∞-oft diff.bar mit $f'(s) = g'(s \cdot A) \circ A = A \circ g'(s \cdot A) = A \circ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot s^{k-1} \cdot A^{k-1}$

Beweis:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k \cdot s^k \cdot A^k\| \underset{\uparrow \atop \boxed{\|\cdot\| \text{ submultipl.}}}{\le} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \underbrace{\|s \cdot A\|}_{<r}^k$ ist konvergent, weil $r = KR(g)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot s^k \cdot A^k \text{ ist abs. konvergent}$$

- Sei $0 < R < \frac{r}{\|A\|}$ gegeben.

Setze: $f_m : [-R, R] \longrightarrow Mat_n(\mathbb{R}) : s \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot s^k \cdot A^k$ ist stetig diffbar, weil die Komponentenfkt. Polynomfunktionen sind, mit

$$f_m' : [-R, R] \longrightarrow Mat_n(\mathbb{R}) : s \mapsto \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot k \cdot s^{k-1} \cdot A^k$$

Setze: $h_m : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R} : s \longmapsto \sum_{k=0}^{m} |a_k| \cdot \|s \cdot A\|^k$ konv. glm.

gegen $h : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R} : s \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|s \cdot A\|^k$ (siehe 15.4)

$$\Rightarrow \|f_m(s) - f(s)\| = \Big\|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \cdot s^k \cdot A^k\Big\| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} \|a_k \cdot s^k \cdot A^k\| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \cdot \|s \cdot A\|^k = |h_m(s) - h(s)|$$

$$\begin{tikzcd}
\Rightarrow \max\limits_{s \in [-R,R]} \|f_m(s) - f(s)\| \arrow[d, "m \to \infty"] & \le & \max\limits_{s \in [-R,R]} |h_m(s) - h(s)| \arrow[r, "m \to \infty"'] \arrow[dll, bend left] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f_m \to f$ glm auf $[-R, R]$. Analog: $(f_m')_{m \in \mathbb{N}}$ konv. glm. auf $[-R, R]$ gegen $s \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot s^{k-1} \cdot A^k$

$\underset{23.30}{\Rightarrow}$ f ist stetig diffbar auf $[-R, R]$ mit Ableitung

$$f'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot s^{k-1} \cdot A^k = A \circ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot s^{k-1} \cdot A^{k-1} = A \circ g'(s \cdot A) = g'(sA) \circ A$$

Weil $R \in (0, \frac{r}{\|A\|})$ beliebig war, gilt das auf auf $(-\frac{r}{\|A\|}, \frac{r}{\|A\|})$

Ind. $\Rightarrow$ f ist auch ∞-oft diffbar. □

H) Die Exponentialfunktion für Matrizen

Kor. 25.32: Sei $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

ⓐ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : t \mapsto e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot t^k}{k!}$ ist ∞-oft diffbar mit $f'(t) = \overset{e^{At}\circ A}{\overset{\shortparallel}{A \circ e^{At}}}$

ⓑ $T \in Gl_n(\mathbb{R}) \Rightarrow e^{T^{-1}\circ A \circ T} = T^{-1} \circ e^A \circ T$

ⓒ $A \circ B = B \circ A \Rightarrow A \circ e^B = e^B \circ A$ und $e^{A+B} = e^A \circ e^B = e^B \circ e^A$

ⓓ Für $s, t \in \mathbb{R}$ und $0 \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ gelten:

- $\| e^{At} \| \leq e^{\|A\| \cdot |t|}$ · $e^0 = \mathbb{1}_n$ · $e^{A\cdot(s+t)} = e^{A\cdot s} \circ e^{A \cdot t}$
- $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ · $e^{\mathbb{1}_n \cdot t} = e^t \cdot \mathbb{1}_n$

Beweis:

ⓐ 25.31

ⓑ $$(T^{-1}\circ A \circ T)^k = (T^{-1}\circ A \circ \underbrace{T) \circ (T^{-1}} \circ A \circ \underbrace{T) \circ} \cdots \underbrace{\circ (T^{-1}} \circ A \circ T) = T^{-1} \circ A^k \circ T$$

$$\Rightarrow T^{-1} \circ e^A \circ T = T^{-1} \circ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \circ T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{-1}\circ A^k \circ T}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T^{-1}\circ A \circ T)^k}{k!} = e^{T^{-1}\circ A \circ T}$$

ⓒ $$A \circ e^B = A \circ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A \circ B^k}{k!} \overset{A\circ B = B \circ A}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k \circ A}{k!} = \underset{\underset{e^B \circ A}{\shortparallel}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) \circ A}$$

- $e^{A+B} = e^A \circ e^B = e^B \circ e^A$ zeigt man wie in 11.36.

ⓓ · $$\| e^{At} \| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot t^k}{k!} \right\| \underset{21.51}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| A^k \cdot t^k \|}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\| \cdot |t|)^k}{k!} = e^{\|A\| \cdot |t|}$$

- Rest folgt aus Teil ⓒ

$\square$

§26 Der Satz über implizite Funktionen

A) Der Banachsche Fixpunktsatz

Def. 26.1

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $f: M \to M$

ⓐ f heißt eine strikte Kontraktion oder q-Kontraktion

$:\iff \exists\, q<1 : \forall x,y \in M : d(f(x),f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$

ⓑ $x \in M$ heißt Fixpunkt von f $:\iff$ $f(x) = x$

Bem. 26.2

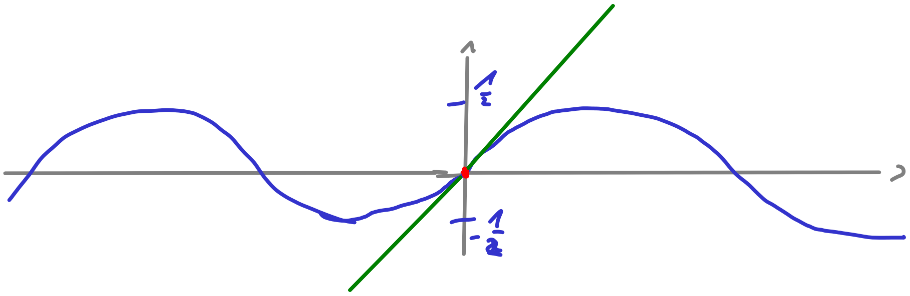
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist eine q-Kontraktion $\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{MWS}}}}{\iff}$ $\forall x \in \mathbb{R} : |f'(x)| \leq q < 1$

Bsp. 26.3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2} \implies |f'(x)| = \left|\frac{\cos(x)}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$

$\implies$ f ist eine $\frac{1}{2}$-Kontraktion!

Zudem: $x=0$ ist der einzige Fixpunkt von f!



Banachscher Fixpunktsatz 26.4

Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum, $f: M \to M$ strikte Kontraktion.

Dann gilt: · f hat genau einen Fixpunkt x

· $\forall y \in M : \lim_{n \to \infty} f^n(y) = x$

Beweis:

Existenz von x:

Sei $y \in M$ beliebig, aber fest vorgegeben.

Setze: $y_n := f^n(y)$.

Vor. $\Rightarrow \exists\, q < 1 : \forall x,y \in \Omega : d(f(x), f(y)) \le q \cdot d(x,y)$ ⊛

Zeige: $d(y_{n+1}, y_n) \le q^n \cdot d(y_1, y_0)$ (**)

$n = 0$: $d(y_1, y_0) = q^0 \cdot d(y_1, y_0)$

$n-1 \mapsto n$: $d(y_{n+1}, y_n) = d(f(y_n), f(y_{n-1})) \underset{(*)}{\le} q \cdot d(y_n, y_{n-1})$

$\underset{\text{IV.}}{\le} q \cdot q^{n-1} \cdot d(y_1, y_0) = q^n \cdot d(y_1, y_0)$

Zeige: $d(y_{n+m}, y_n) \le \sum_{k=n}^{n+m-1} q^k \cdot d(y_1, y_0)$ (***) $(m \ge 1)$

$m = 1$: $d(y_{n+1}, y_n) \underset{(**)}{\le} q^n \cdot d(y_1, y_0)$

$m-1 \mapsto m$: $d(y_{n+m}, y_n) \underset{\Delta\text{-Ugl.}}{\le} d(y_{n+m}, y_{n+m-1}) + d(y_{n+m-1}, y_n)$

$\underset{(**) + \text{Ind}}{\le} q^{n+m-1} \cdot d(y_1, y_0) + \sum_{k=n}^{n+m-2} q^k \cdot d(y_1, y_0)$

$= \sum_{k=n}^{n+m-1} q^k \cdot d(y_1, y_0)$

Damit:

$$d(y_{n+m}, y_n) \underset{(***)}{\le} \sum_{k=n}^{n+m-1} q^k \cdot d(y_1, y_0) \le \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cdot d(y_1, y_0)$$

$$= q^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot d(y_1, y_0) = \underbrace{\frac{q^n}{1-q} \cdot d(y_1, y_0)}_{\downarrow\, n \to \infty \atop 0}$$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon : \begin{matrix} \forall n \ge n_\varepsilon \\ \forall m \ge 1 \end{matrix} : \frac{q^n}{1-q} \cdot d(y_1, y_0) < \varepsilon$

$\vee$

$d(y_{n+m}, y_n)$

$\Rightarrow (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge $\overset{(\Omega, d) \text{ vollständig}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in \Omega : y_n \longrightarrow x$

Zeige: $f(x) = x$

$$f(x) \underset{\boxed{f \text{ stetig}}}{\xleftarrow[n\to\infty]{}} f(y_n) = y_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Rightarrow \quad f(x) = x$$

Eindeutigkeit des Fixpunktes:

Seien $x, y \in \Omega$ zwei Fixpunkte von f

$$\Rightarrow \quad d(x,y) = d(f(x), f(y)) \underset{(*)}{\le} q \cdot d(x,y)$$

$$\underset{q<1}{\Rightarrow} \quad d(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

$\boxed{\varepsilon}$

Bem. 26.5

A priori-Abschätzung

$$d(x, y_n) \xleftarrow[m\to\infty]{} d(y_{n+m}, y_n) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot d(y_1, y_0)$$

$$\Rightarrow \quad d(x, y_n) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot d(y_1, y_0)$$

A posteriori-Abschätzung

$$d(x, y_n) \le \frac{q}{1-q} \cdot d(y_n, y_{n-1})$$

Bsp. 26.6 (Heron-Verfahren)

11.23: $c > 0$, $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \overset{f(a_n)}{\overset{/\!/}{\tfrac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)}} \Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{c}$

Betrachte: $f : \left[\sqrt{\tfrac{c}{2}}, \infty\right) \longrightarrow \left[\sqrt{\tfrac{c}{2}}, \infty\right)$; $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{c}{x}\right)$

ÜA: $f\left(\left[\sqrt{\tfrac{c}{2}}, \infty\right)\right) \subseteq \left[\sqrt{\tfrac{c}{2}}, \infty\right)$ ← vollst. metr. Raum, weil abgeschl. in $\mathbb{R}$

Zudem: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{c}{x^2}\right) \underset{}{\overset{\text{ÜA}}{\Rightarrow}} \forall x \in \left[\sqrt{\tfrac{c}{2}}, \infty\right)$: $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f ist eine $\frac{1}{2}$-kontr. $\underset{\text{BFS}}{\Rightarrow}$ f hat genau einen Fixpkt., nämlich $\sqrt{c}$!

B) Gleichungen auflösen nach Variablen

Def. 26.7

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ und $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

ⓐ $V(f) := \{x \in D \mid f(x) = 0\}$ heißt Verschwindungsmenge oder Nullstellenmenge von f oder Lösungsmenge des Gleichungssystems $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$ ⊛.

ⓑ Ist $N = n + m$, so heißt das Gleichungssystem ⊛ nach $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ auflösbar, wenn eine Abb. $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, existiert mit

$$V(f) = \text{Graph}(\varphi) = \left\{ \binom{y}{\varphi(y)} \,\middle|\, y \in \mathcal{U} \right\}.$$

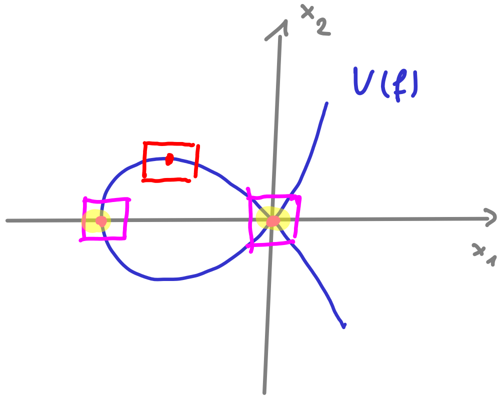
Bem. 26.8:

⊛ durch $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ nach $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ auflösbar

$\Rightarrow$ ① $f(y, \varphi(y)) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{U}$

②
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_{n+m} &= \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Motivation 26.9 (Der Newtonsche Knoten)



Betrachte: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ \binom{x_1}{x_2} \longmapsto x_2^2 - x_1^2 - x_1^3$

und ⊛ $f(x) = x_2^2 - x_1^2 - x_1^3 = 0$

Ansatz: löse ⊛ nach x_2 auf:

⊛ $\Rightarrow x_2^2 = x_1^2 + x_1^3 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_1^3}$ hat keine eindeutige Lösung d.h. global nicht nach x_2 auflösbar

Aber: lokal geht das in den meisten Punkten durch einen der beiden Wurzelzweige, außer in $p = (-1, 0)$ und $q = (0, 0)$

Beachte: das sind genau die Punkte, für die $D_2 f(x_1, x_2) = 2x_2 = 0$ gilt!!!

Ziel: Finde ein Kriterium dafür, dass die implizit gegebene Menge $V(f) = \{x \mid f(x)=0\}$ lokal in einem Punkt $\binom{a}{b}$ explizit als Graph einer Abbildung φ geschrieben werden kann.

Bonus: Berechne $D\varphi(a)$ ohne φ zu kennen!

C) Der Satz über implizite Funktionen

Bem. 26.10:

ⓐ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezeichnet Koordinaten auf & Pkte in $\mathbb{R}^{n+m}$

ⓑ $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, $z \in \mathcal{U}$

$$\rightsquigarrow \quad D_x f(z) := \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(m\times n, \mathbb{R})}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(z) \end{pmatrix}}, \quad D_y f(z) := \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(z) \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \cdot\ Df(z) = (D_x f(z), D_y f(z)) \in \mathrm{Mat}(m \times (n+m), \mathbb{R})$$

$$\cdot\ Df(z) \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_x f(z) \circ x + D_y f(z) \circ y$$

ⓒ Produktnorm:

$\left\| \binom{x}{y} \right\|_P := \max\{\|x\|_2, \|y\|_2\}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{n+m}$

mit $\mathcal{U}_\varepsilon^{\|\cdot\|_P}(a,b) = \mathcal{U}_\varepsilon^{\|\cdot\|_2}(a) \times \mathcal{U}_\varepsilon^{\|\cdot\|_2}(b)$

ⓓ Wir betrachten $\mathrm{Mat}(p\times q, \mathbb{R})$ im Folgenden stets als normierten Raum mit der euklidischen Norm!

Satz über implizite Funktionen 26.11

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ stetig diff.bar und $\binom{a}{b} \in \mathcal{U}$ mit $f(a,b) = 0$ und $\det(D_y f(a,b)) \neq 0$.

Dann: $\exists\, \varepsilon, r > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \times \mathcal{U}_r(b) \subseteq \mathcal{U}$, so dass

$$\exists_1\, \varphi : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \to \mathcal{U}_r(b) \text{ mit } f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a).$$

Zudem: φ ist stetig diff.bar mit $D\varphi(x) = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$.

Insbesondere: $\varphi(a) = b$ und $D\varphi(a) = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \circ D_x f(a,b)$

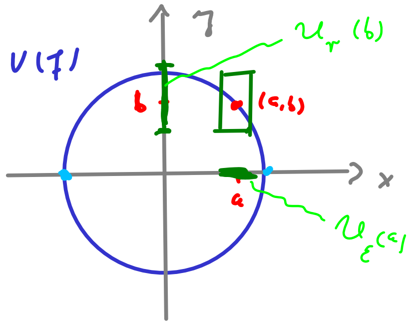
Bem. 26.12

26.11 besagt: die Verschwindungsmenge einer stetig differenz. Abb. f, deren Funktionaldeterminante $\det(D_y f(a,b))$ nicht null ist, ist lokal in $\binom{a}{b}$ als Graph einer eindeutigen Abb. φ parametrisierbar.

Bsp. 26.13

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \varphi : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \to \mathcal{U}_r(b) : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & b > 0 \\ -\sqrt{1-x^2}, & b < 0 \end{cases}$$



denn: $0 = f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - x^2$
$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$

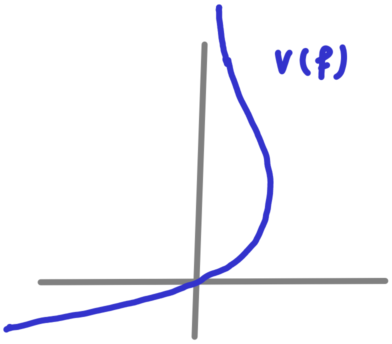
Beachte die Bedingung: $0 \neq D_y f(a,b) = 2b$, d.h. $b \neq 0$

$\rightsquigarrow$ in $(1,0)$ und $(-1,0)$ ist $V(f)$ nicht Graph einer Fkt.!

Zudem: $D\varphi(x) = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$

$$= -\frac{1}{2 \cdot \varphi(x)} \cdot 2x = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

Bsp. 26.14



$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\cdot \exp(y) - \sin(y)$$

Löse $f(x,y)=0$ nach y auf?

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cdot \exp(y) - \cos(y) = 0$ ← dann ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V(f)$ schlecht!!!
- $f(x,y) = x\cdot \exp(y) - \sin(y) = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos(y) = \sin(y) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi \quad \text{für } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\sin(y)}{\exp(y)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}\cdot\exp(y)}$$

Also: Wenn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \notin \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}\cdot\exp(y)},\; y = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi,\; k\in\mathbb{Z} \right\}$,

dann ist $V(f)$ lokal um $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der Graph einer Fkt. φ

Zudem gilt:

$$D\varphi(a) = -\frac{1}{D_y f(a,b)}\cdot D_x f(a,b) = -\frac{1}{a\cdot\exp(b) - \cos(b)}\cdot \exp(b)$$

$$= \frac{\exp(b)}{\cos(b) - a\cdot\exp(b)}$$

D) Der Beweis des Satzes über implizite Funktionen

Satz über implizite Funktionen 26.11

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f:\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ mit $f(a,b)=0$ und $\det(D_y f(a,b)) \neq 0$.

Dann: $\exists\, \varepsilon, r > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \times \mathcal{U}_r(b) \subseteq \mathcal{U}$, so dass

$\exists_1\, \varphi: \mathcal{U}_\varepsilon(a) \to \mathcal{U}_r(b)$ mit $f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x\in\mathcal{U}_\varepsilon(a)$.

Zudem: φ ist stetig diff.bar mit $D\varphi(x) = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x))$.

Insbesondere: $\varphi(a) = b$ und $D\varphi(a) = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \circ D_x f(a,b)$

Beweis

① Zeige: o.E. $\forall \binom{x}{y} \in \mathcal{U}$: $\det(D_y f(x,y)) \neq 0$

Vor. ⇒ f ist stetig diffbar auf $\mathcal{U}$

⇒ $D_y f$ ist stetig auf $\mathcal{U}$ ⇒ $\det(D_y f)$ ist stetig auf $\mathcal{U}$

⇒ ∃ Umgebung von $\binom{a}{b}$, auf der $\det(D_y f)$ nicht null ist

Also: ersetze $\mathcal{U}$ durch diese Umgebung!

② Definition einer Hilfsfunktion g

Setze: $A := D_y f(a,b) \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$, sogar $A \in GL_m(\mathbb{R})$

und: $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m : \binom{x}{y} \longmapsto y - A^{-1} \circ f(x,y)$

⇒ · g ist stetig diffbar auf $\mathcal{U}$ mit

· $D_x g(x,y) = \underbrace{D_x y}_{=0} - \underbrace{DA^{-1}(f(x,y))}_{=A^{-1}} \circ D_x f(x,y) = -A^{-1} \circ D_x f(x,y)$

· $D_y g(x,y) = \underbrace{D_y y}_{=\mathbb{1}_m} - \underbrace{DA^{-1}(f(x,y))}_{=A^{-1}} \circ D_y f(x,y) = \mathbb{1}_m - A^{-1} \circ D_y f(x,y)$

· $g(a,b) = b - A^{-1} \circ \underbrace{f(a,b)}_{=0} = b$ (*)

· $D_y g(a,b) = \mathbb{1}_m - A^{-1} \circ \underbrace{D_y f(a,b)}_{=A} = 0 \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$ (**)

③ Konstruktion von φ mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach

Idee: Finde $\varepsilon, r > 0$, so dass für alle $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$$g_x : \overline{\mathcal{U}_r(b)} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}_r(b)} : y \mapsto g(x,y)$$

eine strikte Kontraktion ist und somit genau einen Fixpunkt y_x hat, den wir $\varphi(x)$ nennen!

② $\Rightarrow$ $\mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) : \binom{x}{y} \longmapsto D_y g(x,y)$ ist stetig

$\Rightarrow$ $\exists\, r > 0 \;\; \forall \binom{x}{y} \in \overline{\mathcal{U}_r^{\|\cdot\|_\infty}(a,b)} = \overline{\mathcal{U}_r(a)} \times \overline{\mathcal{U}_r(b)}$ gilt:

$$\|D_y g(x,y)\|_2 = \|D_y g(x,y) - \underbrace{D_y g(a,b)}_{\substack{=0 \\ (**)}}\|_2 < \frac{1}{2\cdot m^2} \quad (***)$$

Sei $x \in \overline{\mathcal{U}_r(a)}$, $y, y' \in \overline{\mathcal{U}_r(b)}$

$$\Rightarrow \|g(x,y) - g(x,y')\|_2 \underset{25.19}{\le} \|y-y'\|_2 \cdot m^2 \cdot \underbrace{\max_{z \in \overline{\mathcal{U}_r(b)}} \|D_y g(x,z)\|_2}_{\substack{\le \frac{1}{2\cdot m^2} \\ (***)}} \le \frac{1}{2} \cdot \|y-y'\|_2 \quad (****)$$

Zudem: g ist stetig in $\binom{a}{b}$

$$\Rightarrow \exists\, \underset{\substack{\wedge \\ r}}{\varepsilon} > 0 \;\; \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) : \; \|g(x,b) - b\|_2 = \|g(x,b) - \overbrace{g(a,b)}^{\substack{b \\ \parallel (*)}}\|_2 < \frac{r}{2} \quad (*****)$$

Damit: Sei $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$ und betrachte

$$g_x : \overline{\mathcal{U}_r(b)} \longrightarrow \mathbb{R}^m ; \; y \mapsto g(x,y)$$

Sei $y \in \overline{\mathcal{U}_r(b)}$.

$$\Rightarrow \|g_x(y) - b\|_2 \le \underbrace{\|g_x(y) - g_x(b)\|_2}_{\substack{\le \frac{1}{2} \cdot \|y-b\|_2 \le \frac{r}{2} \\ (****)}} + \overbrace{\|g_x(b) - b\|}^{(*****) < \frac{r}{2}} < r \quad (******)$$

$\Rightarrow$ $g_x : \overline{\mathcal{U}_r(b)} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}_r(b)}$ und ist eine $\frac{1}{2}$-Kontraktion wegen $(****)$

Beachte: $\overline{\mathcal{U}_r(b)}$ ist als kompakte TM von $\mathbb{R}^m$ auch vollständig

$$\underset{\text{Banach}}{\overset{26.4}{\Longrightarrow}} \; \exists\, y_x \in \overline{\mathcal{U}_r(b)} : \; \cancel{y_x} = g_x(y_x) = \cancel{y_x} - A^{-1} \circ f(x, y_x)$$

$$\Rightarrow A^{-1} \circ f(x, y_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x, y_x) = 0$$

$(******) \Rightarrow y_x \in \mathcal{U}_r(b)$. Setze: $\varphi : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathcal{U}_r(b) : x \longmapsto y_x$, $\varphi(a) \overset{(*)}{=} b$

$\Rightarrow f(x, \varphi(x)) = 0 \;\; \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$ und φ ist eindeutig!!

④ **Zeige:** $\varphi : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathcal{U}_r(b)$ ist Lipschitz-Stetig

Seien $x, x' \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) - g(x, \varphi(x)) = 0 = \varphi(x') - g(x', \varphi(x'))$$

$$\Rightarrow \quad \|\varphi(x) - \varphi(x')\|_2 = \| g(x, \varphi(x)) - g(x', \varphi(x'))\|_2$$

$$\le \underbrace{\| g(x, \varphi(x)) - g(x, \varphi(x'))\|_2}_{\le \frac{1}{2} \cdot \|\varphi(x) - \varphi(x')\|_2 \quad (\ast\ast)} + \underbrace{\| g(x, \varphi(x')) - g(x', \varphi(x'))\|_2}_{< L \cdot \|x - x'\|_2 \quad (?)}$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \|\varphi(x) - \varphi(x')\|_2 + L \cdot \|x - x'\|_2$$

$$\Rightarrow \quad \|\varphi(x) - \varphi(x')\|_2 < 2 \cdot L \cdot \|x - x'\|_2$$

$\Rightarrow$ φ ist Lipschitz stetig auf $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$

Zu ?:

$$\| g(x, \varphi(x')) - g(x', \varphi(x'))\|_2 \overset{25.19}{\le} \|x - x'\|_2 \cdot n^2 \cdot \max_{z \in \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(a)}} \| D_x g(z, \varphi(x'))\|_2$$

$$\le \|x - x'\|_2 \cdot \underbrace{n^2 \cdot \max\left\{ \|D_x g(z, y)\|_2 \;\middle|\; \begin{matrix} z \in \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(a)} \\ y \in \overline{\mathcal{U}_r(b)} \end{matrix} \right\}}_{=: L}$$

⑤ **Zeige:** φ ist total diffbar mit $D\varphi(x) = -\left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$

Sei $\binom{x}{y} \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) \times \mathcal{U}_r(b)$

Setze: $\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m;\ \binom{x'}{y'} \longmapsto f(x', y') - f(x, y) - Df(x, y) \circ \left(\binom{x'}{y'} - \binom{x}{y}\right)$

$$\Rightarrow \quad \rho(x', y') = f(x', y') - f(x, y) - D_x f(x, y) \circ (x' - x) - D_y f(x, y) \circ (y' - y)$$

$\Rightarrow$ (f total d-bar.) $\displaystyle \lim_{(x', y') \to (x, y)} \frac{\rho(x, y)}{\left\| \binom{x'}{y'} - \binom{x}{y} \right\|_2} = 0$!!

Wende dies mit $y = \varphi(x)$ und $y' = \varphi(x')$ an:

$$0 = \underbrace{f(x', \varphi(x'))}_{=0} - \underbrace{f(x, \varphi(x))}_{=0} = D_x f(x, \varphi(x)) \circ (x' - x) + D_y f(x, \varphi(x)) \circ (\varphi(x') - \varphi(x)) + \rho(x', \varphi(x'))$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x') - \varphi(x) = -\left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x)) - \left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \rho(x', \varphi(x'))$$

z.z.: $$\lim_{x' \to x} \frac{-\left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \rho(x', \varphi(x'))}{\|x' - x\|_2} = 0$$

Es reicht: $$\lim_{x' \to x} \frac{\rho(x', \varphi(x'))}{\|x' - x\|_2} = 0$$

Denn: $$\left\| \begin{pmatrix} x' \\ \varphi(x') \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \|x' - x\|_2 + \underbrace{\|\varphi(x') - \varphi(x)\|}_{\overset{(*)}{\leq} 2 \cdot L \cdot \|x' - x\|_2} \leq (1 + 2 \cdot L) \cdot \|x' - x\|_2$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \frac{\rho(x', \varphi(x'))}{\|x' - x\|_2} \right\| \leq \left\| \frac{\rho(x', \varphi(x'))}{\left\| \begin{pmatrix} x' \\ \varphi(x') \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \right\|_2} \right\|_2 \cdot \frac{1}{1 + 2L}$$

$$\begin{tikzcd} \arrow[d, "x' \to x"] & & \arrow[d, "x' \to x \text{ wegen } (??)"] \\ 0 & \Longleftarrow & 0 \end{tikzcd}$$

⑥ Zeige: $D\varphi$ ist stetig auf $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$

- $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}) : x \longmapsto D_x f(x, \varphi(x))$
  ist stetig, weil f stetig diffbar und φ stetig wegen $(*)$
- $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) : x \longmapsto D_y f(x, \varphi(x))$ ist ebenso stetig

$\underset{23.21}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}) : x \longmapsto \left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1}$ ist dann auch stetig

- $D\varphi : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}) : x \longmapsto -\left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$
  ist stetig !

$\square$

E) Der Satz über die Umkehrfunktion

Bem. 26.16

$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig diffbar mit $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$

$\overset{\text{ZWS 14.12}}{\Longrightarrow}$ $\left\{\begin{array}{lll} f'(x)>0\ \forall x & \Rightarrow f & \text{streng monoton wachsend} \\ f'(x)<0\ \forall x & \Rightarrow f & \text{" " fallend}\end{array}\right\}$

$\overset{\text{Umkehrsatz 14.21 + 18.13}}{\Longrightarrow}$

- $\operatorname{Im}(f)=(c,d)$
- $f^{-1}:(c,d)\longrightarrow(a,b)$ diffbar
- $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=(f'(x))^{-1}$ für $y=f(x)$

Ziel: verallgemeinern den Satz auf $f:\underset{\overset{\cap}{\mathbb{R}^n}}{U}\to\mathbb{R}^n$ mit $\det(Df(x))\neq 0$!

Bsp. 26.17 (Polarkoordinaten)

$f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\theta)\\r\cdot\sin(\theta)\end{pmatrix}$ ist stetig diffbar

mit $\det(Df(r,\theta))=\det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\cdot\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cdot\cos(\theta)\end{pmatrix}=\underset{\overset{\|}{r>0}}{r\cdot\cos^2(\theta)+r\cdot\sin^2(\theta)}$

Aber: f ist nicht injektiv, da $f(r,\theta)=f(r,\theta+2\pi)$

Beachte jedoch: $f_{|U_{\frac{\pi}{2}}(r,\theta)}$ ist injektiv!!!

In der Tat: $f_1:U_{\frac{\pi}{2}}(r,\theta)\longrightarrow\overset{\overset{\mathbb{R}^2}{\cup}\text{ offen}}{\operatorname{Im}(f_1)}$ und f_1^{-1} ist

stetig diffbar!!!

Def. 26.18

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $a \in U$.

ⓐ f heißt ein Diffeomorphismus

:⟺ · $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

· $f : U \to f(U)$ bijektiv und stetig diffbar

· $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ stetig diffbar

ⓑ f heißt lokaler Diffeomorphismus in a

:⟺ $\exists$ offene Umgebung V_a von U, s.d. $f_{|V_a}$ ist ein Diffeom.

ⓒ f heißt lokaler Diffeomorphismus :⟺ $\forall a \in U$: f ist lok. Diffeo. in a

Satz über die Umkehrfunktion 26.19

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $c \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar mit $\det(Df(c)) \neq 0$.

Dann: $\exists\, c \in V \subseteq U$ offen und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so dass

$f_{|} : V \to W$ bijektiv ist.

Zudem: $f_{|}^{-1} : W \longrightarrow V$ ist stetig diffbar mit

$$Df_{|}^{-1}(y) = \left(Df\left(f_{|}^{-1}(y)\right)\right)^{-1} \quad \forall y \in W.$$

Insbesondere: f ist ein lokaler Diffeomorphismus in c

mit $Df_{|}^{-1}(f(c)) = (Df(c))^{-1}$.

Beweis: Idee: löse $f(y) = x$ und y auf

Setze: · $a := f(c)$, $b := c$

· $h : \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n : \binom{x}{y} \mapsto f(y) - x$

ist stetig diffbar mit $\det(D_y h(a,b)) = \det(Df(c)) \neq 0$

und $h(a,b) = f(b) - a = f(c) - f(c) = 0$

SüIF 26.11 $\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0,\ r>0,\ \exists_1\ \varphi: \mathcal{U}_\varepsilon(a) \to \mathcal{U}_r(b)$ stetig diffbar

mit $0 = h(x,\varphi(x)) = f(\varphi(x)) - x \quad \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$$\left(\text{d.h. } \boxed{f(\varphi(x)) = x}\right) \ (*)$$

und $$D\varphi(x) = -\underbrace{\left(D_y h(x,\varphi(x))\right)}_{}{}^{-1} \circ \overbrace{D_x h(x,\varphi(x))}^{=-\mathbb{1}_n}$$

$$= Df(\varphi(x))^{-1}$$

Satz: $W := \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \mathcal{U}_\varepsilon(f(c)) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V := \varphi(W)$

$\Rightarrow$ · $\varphi: W \to V = \varphi(W)$ ist surjektiv

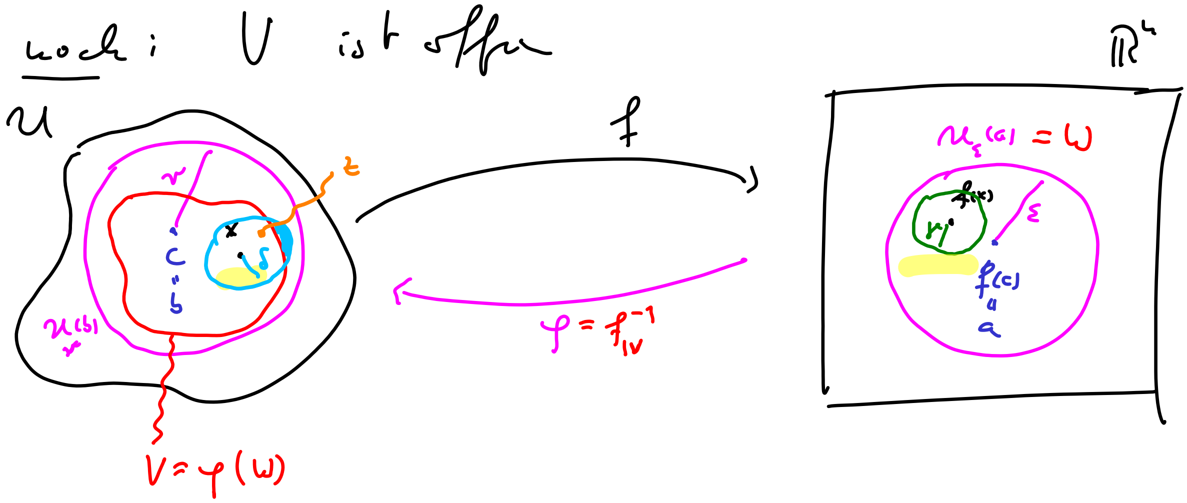
· $(*) \Rightarrow \varphi$ ist injektiv auf W

· Also, φ bijektiv mit Inverse $\varphi^{-1} = f$

$\Rightarrow f_1: V \to W$ ist bijektiv mit $f_1^{-1} = \varphi$,

d.h. f_1^{-1} ist stetig diffbar mit $Df^{-1}(x) = \left(Df(f^{-1}(x))\right)^{-1}$

Zeige noch: V ist offen



Sei $x \in V$ gegeben. $\Rightarrow f(x) \in W \Rightarrow \exists \gamma > 0: \mathcal{U}_\gamma(f(x)) \subseteq W$

f stetig in $x \Rightarrow \exists \delta > 0: f(\mathcal{U}_\delta(x)) \subseteq \mathcal{U}_\gamma(f(x)) \subseteq W$.

Zeige: $\mathcal{U}_\delta(x) \subseteq V$. Sei $z \in \mathcal{U}_\delta(x) \subseteq \mathcal{U}_r(b) \Rightarrow f(z) \in W$

$\Rightarrow h(f(z), z) = f(z) - f(z) = 0 = h(f(z), \varphi(f(z))) \underset{\text{Eindeutigkeit von } \varphi}{\Longrightarrow} z = \varphi(\overset{\underset{\sim}{z}}{f(z)}) \in \varphi(W) = V \Rightarrow \mathcal{U}_\delta(x) \subseteq V$

Bem. 26.20

ⓐ $\det(Df(c)) \neq 0 \overset{26.19}{\underset{!}{\rightleftarrows}}$ f ist ein lokaler Diffeom. in c

Denn: f lokaler Diffeo in c $\Rightarrow f_1^{-1} \circ f_1 = id$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_n = D\,id(c) = D(f^{-1}\circ f)(c) = \underbrace{Df^{-1}(f(c))} \circ \underbrace{Df(c)}$$

$\Rightarrow Df(c)$ invertierbar $\Rightarrow \det(Df(c)) \neq 0$ $\square$

ⓑ Auch 26.19 gilt ganz analog für beliebige Banachräume!

Bsp. 26.21

$$f : (0,\infty)\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\theta) \\ r\cdot\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(Df(r,\theta)) = r > 0$

$\underset{26.19}{\Rightarrow}$ f lokaler Diffeomorphismus in $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$

mit $Df^{-1}(f(r,\theta)) = (Df(r,\theta))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\cdot\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cdot\cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{r}\cdot\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\theta) & r\cdot\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Beachte: $f_1 : (0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow (0,\infty)\times\mathbb{R}$ ist bijektiv

mit $f_1^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

F) Der Satz von der offenen Abbildung

Kor. 26.22

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f : U\to\mathbb{R}^n$ stetig diffbar mit $\det(Df(x))\neq 0\ \forall x\in U$.

ⓐ $O\subseteq U$ offen $\Rightarrow f(O)$ offen im $\mathbb{R}^n$.

ⓑ $O\subseteq U$ offen und f injektiv $\Rightarrow f^{-1} : f(O)\to O$ ist stetig diffbar

Beweis:

ⓐ Wende 26.20 auf $f_{|} : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall c \in O \ \exists c \in V_c \subseteq O$ und $W_c \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$f_{|} : V_c \longrightarrow W_c$ ist ein lokaler Diffeom.

$\Rightarrow \quad f(O) = \bigcup_{c \in O} W_c$ ist als Vereinigung offener Mengen offen

ⓑ $f_{|} : O \to f(O)$ ist bijektiv da f injektiv

$\underset{ⓐ}{\Rightarrow}$ f ist ein lokaler Diffeom. $\Rightarrow$ $f^{-1}_{|O}$ ist stetig diffbar

□

Bsp. 26.23

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; \ x \longmapsto x^2$ ist stetig diffbar mit $Df(x) = 2x \begin{cases} \neq 0, & x \neq 0 \\ = 0, & x = 0 \end{cases}$

Beachte. $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ ist nicht offen !!!

Bem. 26.24

Sei $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar und $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

ⓐ f ist lok. Diffeom. in a $\iff$ $\det(Df(a)) \neq 0$

ⓑ f ist lok. Diffeom. $\iff$ $\det(Df(x)) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

ⓒ f ist ein Diffeom. $\iff$ f ist ein injektiver lok. Diffeom. □

G) Extrema unter Nebenbedingungen

Def. 26.25

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in D$.

ⓐ f hat ein globales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ in a
$:\Leftrightarrow$ $g(a) = 0$ und $\forall x \in V(g) : f(x) \leq f(a)$

ⓑ f hat ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ in a
$:\Leftrightarrow$ $g(a) = 0$ und $\exists \delta > 0 : \forall x \in V(g) \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) \leq f(a)$

ⓒ f hat ein isoliertes lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 0$ in a
$:\Leftrightarrow$ $g(a) = 0$ und $\exists \delta > 0 : \forall x \in V(g) \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) < f(a)$

ⓓ f hat ein globales Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ in a
$:\Leftrightarrow$ $g(a) = 0$ und $\forall x \in V(g) : f(x) \geq f(a)$

ⓔ f hat ein lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ in a
$:\Leftrightarrow$ $g(a) = 0$ und $\exists \delta > 0 : \forall x \in V(g) \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) \geq f(a)$

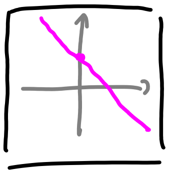
ⓕ f hat ein isoliertes lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g = 0$ in a
$:\Leftrightarrow$ $g(a) = 0$ und $\exists \delta > 0 : \forall x \in V(g) \cap \mathcal{U}_\delta(a) : f(x) > f(a)$

ⓖ f hat eine Extremstelle unter der Nebenbedingung $g = 0$ in a
$:\Leftrightarrow$ f hat ein lokales Maximum oder Minimum unter der NB $g = 0$ in a

Bsp. 26.26

ⓐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 + x_2 - 1$, d.h. $V(g) =$



denn: $0 = g(x) = x_1 + x_2 - 1 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 + 1$

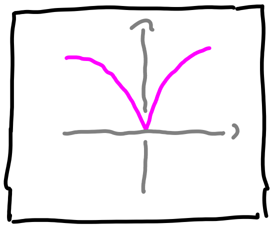
Ansatz: parametrisiere $V(g)$: $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(\psi) = V(g) \Rightarrow h = f \circ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto t^2 + (-t+1)^2 = 2t^2 - 2t + 1$

Damit: $h'(t) = 4t - 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$, $h''(t) = 4 \Rightarrow h''(\frac{1}{2}) = 4 > 0$
$\Rightarrow h$ hat in $t = \frac{1}{2}$ ein lok. Min. $\Rightarrow f$ hat in $\psi(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ lok. Minimum unter NB $g = 0$

① $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : x = \binom{x_1}{x_2} \longmapsto \exp(x_1 + x_2)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1^2 - x_2^3$, d.h. $V(g) =$



Ansatz: parametrisiere $V(g)$: $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \binom{t^3}{t^2}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Im}(\psi) = V(g) \quad \Rightarrow \quad h = f \circ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \exp(t^3 + t^2)$

Damit: · $h'(t) = (3t^2+2t) \cdot \exp(t^3+t^2) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 0 = 3t^2 + 2t = t \cdot (3t+2) \Leftrightarrow t = 0$ oder $t = -\frac{2}{3}$

· $h''(t) = (6t+2) \cdot \exp(t^3 + t^2) + (3t^2+2t)^2 \cdot \exp(t^3+t^2)$

$\Rightarrow$ · $h''(0) = 2 \cdot e^0 = 2 > 0 \Rightarrow h$ hat in 0 ein lok. Minimum

· $h''(-\frac{2}{3}) = -2 \cdot \exp\left(\frac{4}{27}\right) < 0 \Rightarrow h$ hat in 0 ein lokales Maximum

$\Rightarrow$ · f hat in $\psi(0) = \binom{0}{0}$ ein lokal. Minim. unter NB $g = 0$

· f hat in $\psi(-\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{27} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ " " Maxim. " " "

H) Lagrange-Multiplikatoren

Satz 26.27

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ stetig diff-bar auf U, und $a \in V(g)$ mit $\operatorname{rang}(Dg(a)) = m < n$.

Wenn a eine Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist, dann: $\exists\, b \in \mathbb{R}^m : \quad Df(a) = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot Dg_j(a)$.

Lagrange-Multiplikatoren

Beweisidee:

Parametrisiere $V(g)$ lokal in a durch $\psi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^{n-m} \\ \cup \\ U' \\ \in \\ u_a \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \longrightarrow \\ \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \mathbb{R}^n \\ \in \\ a \end{array}$ mittels 26.11 (S.ü.i.F.)

$\Rightarrow \quad q = f \circ \psi$ hat Extremstelle in $u_a \Rightarrow Dq(u_a) = 0 \Rightarrow$ Beh.

Beweis:

- $\operatorname{rang}(Dg(a)) = m \Rightarrow Dg(a)$ hat m lin. unabhängige Spalten

  $\Rightarrow$ o.E. die letzten m Spalten von $Dg(a)$ sind lin.-unabh.

- Setze: $x = \binom{u}{v}$ mit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-m} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(D_v g(a)) = \operatorname{rang}(Dg(a)) = m \Rightarrow \det(D_v g(a)) \neq 0$$

$$\underset{\substack{26.11\\ \text{S.ü.I.F.}}}{\Rightarrow} \exists\ \varphi : U_\varepsilon(u_a) \xrightarrow[C^1]{} U_r(v_a) \quad \text{mit} \quad a = \binom{u_a}{v_a}$$

$$\text{und} \quad D\varphi(u_a) = -\left(D_v g(a)\right)^{-1} \circ D_u g(a) \qquad (*)$$

$$\text{und} \quad g(u, \varphi(u)) = 0 \qquad \forall\, u \in U_\varepsilon(a) \qquad (**)$$

- o.E.: f hat ein lok. Max. unter der NB $g = 0$ in a

$$\Rightarrow \exists\ \delta > 0 : \forall\, x \in U_\delta(a) \cap V(g) : f(x) \leq f(a) \qquad (***)$$

- Bemerke: $\psi : U_\varepsilon(u_a) \longrightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto (u, \varphi(u))$ ist eine lokale Parametrisierung von $V(g)$ wegen $(**)$.

$$\underset{\psi \text{ stetig}}{\Rightarrow} \quad \text{o.E.: } \psi(U_\varepsilon(u_a)) \subseteq U_\delta(\underset{\substack{\shortparallel\\ a}}{\psi(u_a)})$$

$$\underset{(**)}{\Rightarrow} \forall\, u \in U_\varepsilon(u_a) : \underset{\substack{\shortparallel\\ (u, \varphi(u))}}{\psi(u)} \in U_\delta(a) \cap V(g) \qquad (****)$$

- Setze: $q : U_\varepsilon(u_a) \longrightarrow \mathbb{R} : u \mapsto (f \circ \psi)(u) = f(u, \varphi(u))$

$$\underset{(***)\,(****)}{\Longrightarrow} \quad q \text{ hat ein Maximum in } u_a$$

$$\begin{aligned} \overset{25.25}{\Longrightarrow} \quad 0 = Dq(u_a) &= Df(\overset{\substack{a\\ \shortparallel}}{\overbrace{\psi(u_a)}}) \circ D\psi(u_a) \\ &= D_u f(a) \circ \mathbb{1}_{n-m} + D_v f(a) \circ D\varphi(u_a) \\ &= D_u f(a) - \underbrace{D_v f(a) \circ \left(D_v g(a)\right)^{-1}}_{\overset{!}{=}\ \lambda^t} \circ D_u g(a) \end{aligned}$$

!!

$$\Rightarrow \quad \cdot \quad b^t \overset{!}{=} D_v f(a) \circ \left(D_v g(a)\right)^{-1},$$

$$\underline{\text{d.h.}} \quad D_v f(a) = b^t \circ D_v(g(a))$$

$$\cdot \quad D_u f(a) = b^t \circ D_u g(a)$$

$$\Rightarrow \quad Df(a) = b^t \circ Dg(a) = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot Dg_j(a)$$

$\boxed{3}$

Bem. 26.28

a Extremstelle von f unter NB $g=0$

$\Rightarrow$ $\exists\, b \in \mathbb{R}^m$ s.d. $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^{n+m}$ löst das nicht-lineare Gleichungssystem

$$D_i f(a) - \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_i g_j(a) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_j(a) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Underline D.h.: löse das GS, um Kandidaten für a zu finden!

Beachte: 26.27 sagt nicht, dass dann eine Extremstelle vorliegt!

Bsp. 26.29

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: x = \binom{x_1}{x_2} \longmapsto x_1 - 2x_2$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: x \longmapsto \|x\|_2^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$\Rightarrow V(g) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ = Rand des Einheitskreises!

Ziel: finde die Extremstellen von f unter der NB $g = 0$

Ansatz:

$$0 = D_1 f(a) - b \cdot D_1 g(a) = 1 - b \cdot 2 \cdot a_1 \Rightarrow b \neq 0,\ a_1 = \frac{1}{2 \cdot b}$$

$$0 = D_2 f(a) - b \cdot D_2 g(a) = -2 - b \cdot 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{b}$$

$$0 = g(a) = a_1^2 + a_2^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t \\ b = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^{(2)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t \end{cases}$$

$\Big\}$ Kandidaten für Extremst.

Frage: sind $a^{(1)}$ & $a^{(2)}$ dann auch Extremstellen unter $g=0$?

Beachte: $V(g) =$ Rand des Einheitskreises $= \partial U_1(0)$ ist kompakt

$\Rightarrow$ $f_| : V(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf einem kompakten

$\Rightarrow$ f nimmt auf $V(g)$ sein Max. & Min. an!

$\Rightarrow$ $f(a^{(1)}) = \sqrt{5} > -\sqrt{5} = f(a^{(2)})$,

also hat f in $a^{(1)}$ ein lok. Max. unter $g=0$

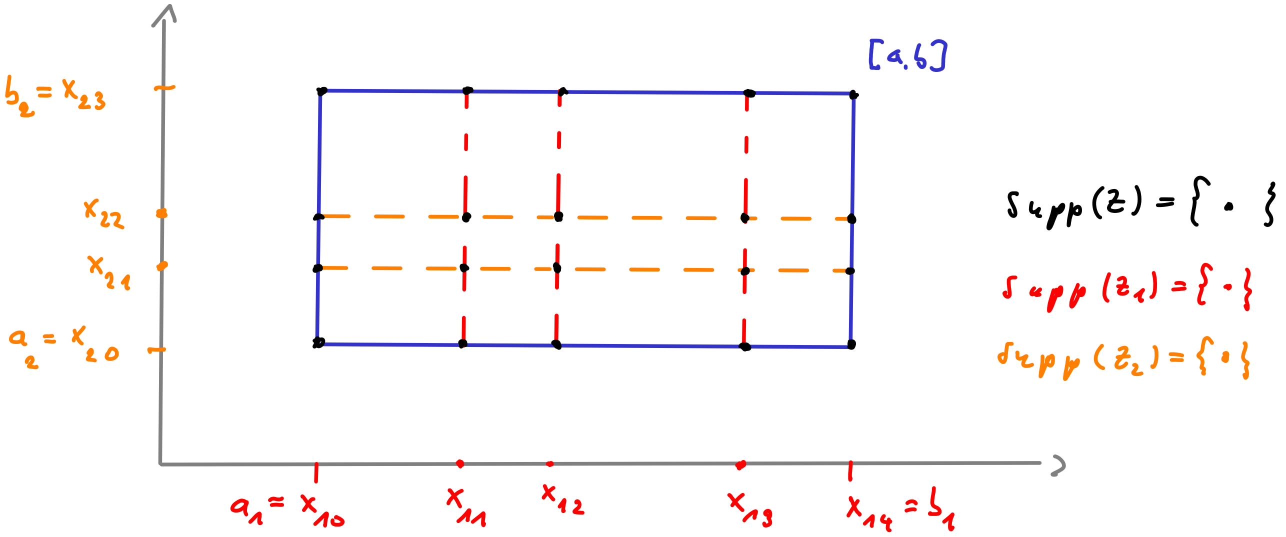
und hat f " $a^{(2)}$ " " Min. " " .

§ 27 Das Riemann-Integral über n-dimensionalen Quadern

A) Zerlegungen von n-dimensionalen Quadern

Def. 27.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$, d.h. $a_i < b_i$ $\forall i = 1, \dots, n$.

ⓐ
- $[a,b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ heißt n-dim. Quader oder Intervall
- $V([a,b]) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ heißt Volumen des Quaders $[a,b]$
- $Z := Z_1 \times \dots \times Z_n := \left((x_{1j_1}, \dots x_{nj_n}) \mid j_i = 0, \dots, m_i ,\ i = 1, \dots, n \right)$ heißt Zerlegung von $[a,b]$, wenn $Z_i = (\overset{a_i}{\overset{\shortparallel}{x_{i0}}}, \dots, \overset{b_i}{\overset{\shortparallel}{x_{im_i}}})$ eine Zerlegung von $[a_i, b_i]$ ist.



- $supp(Z) := supp(Z_1) \times \dots \times supp(Z_n)$ heißt der Träger von Z, die Punkte in $supp(Z)$ heißen die Stützpunkte von Z
- $\ell(Z) := \max\{\ell(Z_1), \dots, \ell(Z_n)\}$ heißt die Länge oder Feinheit von Z
- $|Z| := |Z_1| \cdot \ldots \cdot |Z_n| = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ heißt die Mächtigkeit von Z
- $[x_{1j_1-1}, x_{1j_1}] \times \dots \times [x_{nj_n-1}, x_{nj_n}]$ heißt Teilquader von Z
- $TQ(Z)$ = Menge aller Teilquader von Z $\Longrightarrow$ $|TQ(Z)| = |Z|$

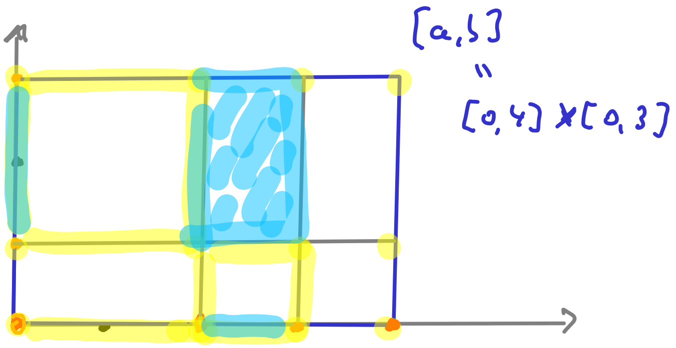
ⓑ Z' heißt Verfeinerung von Z $:\Longleftrightarrow$ $supp(Z) \subseteq supp(Z')$

ⓒ Seien $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ und $Z' = Z_1' \times \dots \times Z_n'$.
Dann heißt $Z * Z' := (Z_1 * Z_1') \times \dots \times (Z_n * Z_n')$ die gemeinsame Verfeinerung.

Bsp. 27.2 : $a = \binom{0}{0}$, $b = \binom{4}{3}$, $Z_1 = (0, 2, 3, 4)$, $Z_2 = (0, 1, 3)$

$$Z = Z_1 \times Z_2 = \left(\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{3}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{3}, \binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{3}, \binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{3} \right)$$

$$\mathrm{Supp}(Z) = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{3}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{3}, \binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{3}, \binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{3} \right\}$$



$$\ell(Z) = \max\{\ell(Z_1), \ell(Z_2)\} = \max\{2, 2\} = 2$$

$$TQ(Z) = \{ [0,2]\times[0,1], [0,2]\times[1,3], [2,3]\times[0,1], [2,3]\times[1,3], [3,4]\times[0,1], [3,4]\times[1,3] \}$$

Bsp. 27.3 (Äquidistante Zerlegung)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $m \geq 1$.

Setze: $x_{ij} := a_i + j \cdot \frac{b_i - a_i}{m}$ für $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$

$\Rightarrow$ $Z_i^m := (x_{i0}, \dots, x_{im})$ ist eine Zerlegung von $[a_i, b_i]$

$\Rightarrow$ $Z^m := Z_1^m \times \dots \times Z_n^m$ heißt m-te äquidistante Zerlegung von $[a,b]$

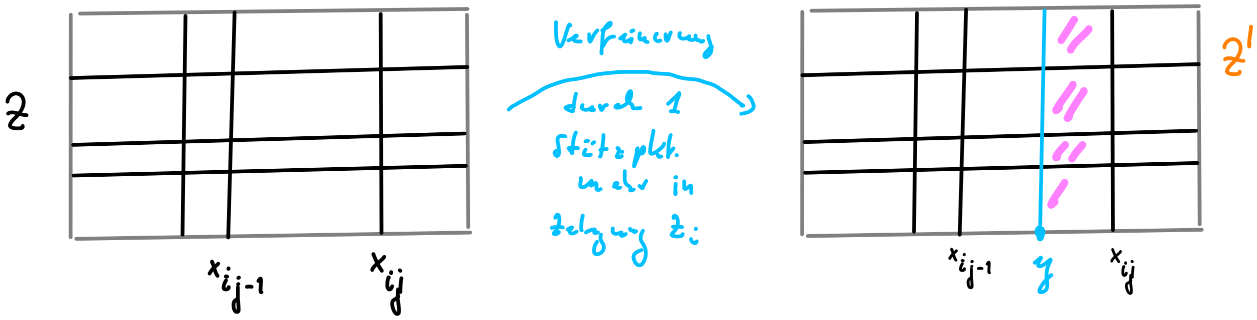
$\Rightarrow$
- $|TQ(Z^m)| = |Z^m| = m^n$
- $V(Q) = \frac{b_1 - a_1}{m} \cdot \dots \cdot \frac{b_n - a_n}{m} = \frac{V([a,b])}{m^n}$ $\quad \forall\, Q \in TQ(Z^m)$
- $\ell(Z^m) = \max\left\{ \frac{b_i - a_i}{m} \,\middle|\, i = 1, \dots, n \right\}$
- $m' \mid m \Rightarrow Z^{m'}$ ist eine Verfeinerung von Z^m

Bem. 27.4

ⓐ dim = 1:

$$\Rightarrow \quad |TQ(Z')| - |TQ(Z)| = 1$$

dim > 1:



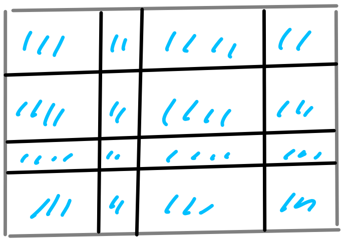
$$\Rightarrow \quad |TQ(Z')| - |TQ(Z)| = \underset{\substack{\| \\ \text{\# Teilquader mit} \\ [x_{ij-1}, x_{ij}]\text{, die} \\ \text{von } y \text{ zerteilt werden}}}{\frac{m_1 \cdots m_n}{m_i}} = \frac{|Z|}{|Z_i|}$$

ⓑ dim = 1: $\quad Q \in TQ(Z) \quad \Rightarrow \quad V(Q) \le \ell(Z)$

dim = n: $\quad Q \in TQ(Z) \quad \Rightarrow \quad V(Q) \le \ell(Z)^n$

↑ $\ell(Z)$ obere Schranke für Seitenlänge von Q

ⓒ Es gilt: $\quad V([a,b]) = \sum\limits_{Q \in TQ(Z)} V(Q)$



B) Untersummen, Obersummen und das Riemann-Integral

Def. 27.5:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, Z Zerlegung von $[a,b]$.

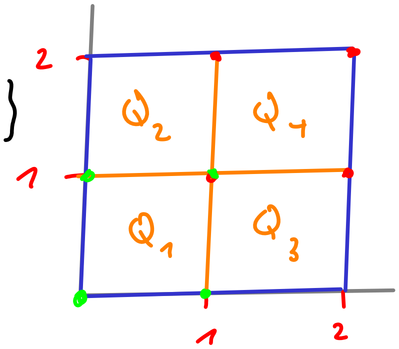
- $OS(f,Z) := \sum_{Q \in TQ(Z)} V(Q) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in Q\}$ heißt Obersumme von f bez. Z
- $US(f,Z) := \sum_{Q \in TQ(Z)} V(Q) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in Q\}$ heißt Untersumme von f bez. Z

Bsp. 27.6:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \binom{x_1}{x_2} \longmapsto x_1 + x_2$, $Q := [0,2] \times [0,2] = \left[\binom{0}{0}, \binom{2}{2}\right]$

$Z := (0,1,2) \times (0,1,2)$

$$\Rightarrow TQ(Z) = \Big\{ \underset{\underset{Q_1}{\shortparallel}}{[0,1]\times[0,1]}, \underset{\underset{Q_2}{\shortparallel}}{[0,1]\times[1,2]}, \underset{\underset{Q_3}{\shortparallel}}{[1,2]\times[0,1]}, \underset{\underset{Q_4}{\shortparallel}}{[1,2]\times[1,2]} \Big\}$$



- $V(Q_i) = 1 \cdot 1 = 1$
- $OS(f,Z) = \sum_{i=1}^{4} V(Q_i) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in Q_i\} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = \underset{\rotatebox{-90}{$\geq$}}{12}$
- $US(f,Z) = \sum_{i=1}^{4} V(Q_i) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in Q_i\} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$

Bem. 27.7

Definitionen und Aussagen aus §19 übertragen sich mit folgenden Anpassungen:

- $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \dots \rightsquigarrow \sum_{Q \in TQ(Z)} V(Q) \dots$
- $\ell(Z) \rightsquigarrow \ell(Z)^n$

Lemma 27.8

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$.

ⓐ $Z' = Z_1' \times \dots \times Z_n'$ Verfeinerung von $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ und $V_i = \frac{V([a,b])}{b_i - a_i}$

$\Longrightarrow$ · $0 \leq US(f, Z') - US(f, Z) \leq 2 \cdot M \cdot \ell(Z) \cdot \sum_{i=1}^{n} (|Z_i'| - |Z_i|) \cdot V_i$

· $0 \leq OS(f, Z) - OS(f, Z') \leq 2 \cdot M \cdot \ell(Z) \cdot \sum_{i=1}^{n} (|Z_i'| - |Z_i|) \cdot V_i$

Insbesondere: $US(f, Z) \leq US(f, Z') \leq OS(f, Z') \leq OS(f, Z)$

ⓑ Z & Z' Zerlegung von $[a,b]$

$\Longrightarrow$ $-M \cdot V([a,b]) \leq US(f, Z) \leq OS(f, Z') \leq M \cdot V([a,b])$

Beweis: Wie in 19.5.

Def. 27.9

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

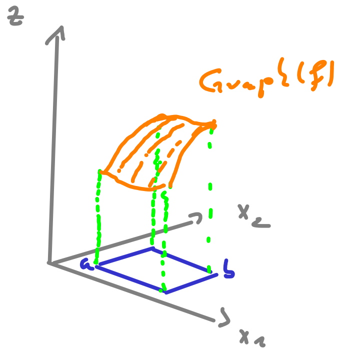
- $OI(f) := \inf \{ OS(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \}$ heißt Oberintegral von f.
- $UI(f) := \sup \{ US(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \}$ heißt Unterintegral von f.
- f heißt (Riemann-) integrierbar $:\Longleftrightarrow$ $OI(f) = UI(f)$

Dann heißt $\int_{[a,b]} f(x)\,dx := OI(f)$ das Integral von f auf $[a,b]$.

Bem. 27.10

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Longrightarrow$ $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$ = Volumen des Körpers zwischen Graph von f und $[a,b]$



Bsp. 27.11

Sei $f : Q \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c$ mit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, $c \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ f ist integrierbar mit $\int_Q f(x)\,dx = c \cdot V(Q)$

Denn:

Sei Z eine beliebige Zerlegung von Q

$$\Longrightarrow \quad OS(f,Z) = \sum_{Q' \in TQ(Z)} V(Q') \cdot c = \sum_{Q' \in TQ(Z)} V(Q') \cdot c = US(f,Z)$$

$$\|$$

$$c \cdot V(Q)$$

$$\Longrightarrow \quad OI(f) = c \cdot V(Q) = UI(f)$$

$\Longrightarrow$ f ist integrierbar und $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = c \cdot V(Q)$ $\square$

C) Das Riemannsche Integrabilitätskriterium

Satz 27.12 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann sind Ä:

ⓐ f ist integrierbar auf $[a,b]$

ⓑ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z$ Zerlegung von $[a,b]$: $OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$

Beweis: wörtlich wie 19.11 $\square$

Satz 27.13

Seien $a, b \in \mathbb{R}^1$ mit $a < b$ und $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f integrierbar auf $[a,b]$.

Beweis:

- $[a,b]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^1$ und beschränkt, also kompakt

  $\Rightarrow$ f ist glm. stetig auf $[a,b]$ und beschränkt
- Rest wie in 19.13.

$\square$

D) Riemannsche Zwischensummen & das Folgenkriterium

Def. 27.14:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^1$ mit $a < b$, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, Z Zerlegung von $[a,b]$.

Gilt für $\alpha = (\alpha_Q \mid Q \in TQ(Z))$ die Bedingung $\alpha_Q \in Q \quad \forall Q \in TQ(Z)$,

dann heißt $ZS(f, Z, \alpha) := \sum\limits_{Q \in TQ(Z)} V(Q) \cdot f(\alpha_Q)$ Riemannsche Zwischensumme

von f bez. der Zerlegung Z und den Zwischenpunkten α.

Notation: $\mathcal{ZP}([a,b]) := \{ (Z, \alpha) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b] \text{ mit ZWPkten } \alpha \}$

Lemma 27.15

Sei $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a, b \in \mathbb{R}^1$ mit $a < b$, Z = Zerl. von $[a,b]$ und $\varepsilon > 0$.

ⓐ $\exists\, \alpha$ ZWP von Z, so dass $0 \leq OS(f, Z) - ZS(f, Z, \alpha) < \varepsilon$

ⓑ $\exists\, \beta$ ZWPe von Z, so dass $0 \leq ZS(f, Z, \beta) - US(f, Z) < \varepsilon$

Beweis: Wie 19.18. $\square$

Lemma 27.16

Sei $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}^4$ mit $a<b$.

Dann $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0 : \forall Z =$ Zerl. von $[a,b]$ mit $\ell(Z)<\delta_\varepsilon$ gilt: $OS(f,Z)-US(f,Z)<\varepsilon$

Beweis: wie 19.12 ☐

Satz 27.17 (Riemannsches Folgenkriterium für Integrierbarkeit)

Sei $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a,b \in \mathbb{R}^4$ mit $a<b$ und $I \in \mathbb{R}$.

Dann sind gleichwertig:

ⓐ f ist integrierbar auf $[a,b]$ mit $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = I$

ⓑ $\forall \left((Z^m,\alpha^m)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit ZwPen mit $\ell(Z^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

gilt: $ZS(f,Z^m,\alpha^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} I$

Beweis: wie 19.19. ☐

Korollar 27.18 (Riemannsches Zwischensummenkriterium)

Sei $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a,b \in \mathbb{R}^4$ mit $a<b$ und $I \in \mathbb{R}$.

Dann sind $\circlearrowleft$:

ⓐ f ist integrierbar auf $[a,b]$ mit $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = I$.

ⓑ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0 : \forall (Z,\alpha) \in \mathbb{ZP}([a,b])$ mit $\ell(Z)<\delta_\varepsilon$ gilt: $|ZS(f,Z,\alpha)-I|<\varepsilon$

Beweis: ⓐ ⇒ ⓑ: Sei f integrierbar mit $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = I$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. $\underset{27.16}{\Longrightarrow} \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall Z$ mit $\ell(Z) < \delta_\varepsilon : |OS(f,Z) - US(f,Z)| < \varepsilon$

Sei $(Z,\alpha) \in ZP([a,b])$ mit $\ell(Z) < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow |ZS(f,Z,\alpha) - I| = |ZS(f,Z,\alpha) - OI(f)| \leq OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$$

ⓑ ⇒ ⓐ: Sei $((Z^m,\alpha^m))_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $ZP([a,b])$ mit $\ell(Z^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Z.z.: $\lim_{m\to\infty} ZS(f, Z^m, \alpha^m) = I$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben!

Wegen $\lim_{m\to\infty} \ell(Z^m) = 0$ gilt: $\exists n_\varepsilon : \forall m \geq n_\varepsilon : \ell(Z^m) < \delta_\varepsilon$

Sei nun $m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \ell(Z^m) < \delta_\varepsilon$

$$\underset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} |ZS(f, Z^m, \alpha^m) - I| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} ZS(f, Z^m, \alpha^m) = I$$

Damit: 27.17 ⇒ Beh. in ⓐ.

□

E) Erste einfache Eigenschaften der Integrale

Kor. 27.19 (Linearität + Monotonie des Integrals)

Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$, und seien $c,d \in \mathbb{R}$.

ⓐ $c\cdot f + d\cdot g$ ist integrierbar mit $\int_{[a,b]} (c\cdot f + d\cdot g)(x)\,dx = c\cdot \int_{[a,b]} f(x)\,dx + d\cdot \int_{[a,b]} g(x)\,dx$.

ⓑ Wenn $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, dann: $\int_{[a,b]} f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]} g(x)\,dx$.

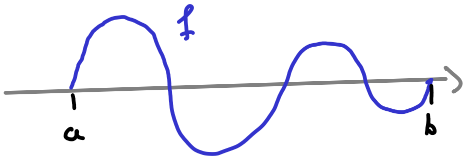
Beweis: wie 19.21 □

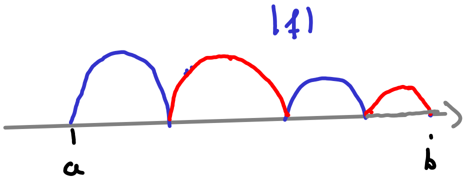
Prop. 27.20 (Δ-Ugl. für Integral)

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $a,b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$

Dann: $|f|$ ist integrierbar auf $[a,b]$ mit $\left| \int_{[a,b]} f(x)\,dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)|\,dx.$

$\overset{!!}{}$ " Volumen, den der Graph von f mit dem Quader einschließt "





Beweis: wie 19.26 ⊠

F) Der Satz von Fubini

Notation 27.21

- $(x,y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ Koordinaten auf $\mathbb{R}^{p+q}$
- $X = [a,b] \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y = [c,d] \subseteq \mathbb{R}^q$ zwei Quader

$\Rightarrow$
- $X \times Y = [a,b] \times [c,d] \overset{!}{=} [(a,c),(b,d)] \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ ein Quader
- $V(X \times Y) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i) \cdot \prod_{j=1}^{q} (d_j - c_j) = V(X) \cdot V(Y)$
- $Z_x = Z_1 \times \dots \times Z_p$ Zerlegung von X, $Z_y = Z_{p+1} \times \dots \times Z_{p+q}$ Zerlegung von Y

  $\Rightarrow$ $Z_x \times Z_y = Z_1 \times \dots \times Z_{p+q}$ Zerlegung von $X \times Y$
- $TQ(Z_x \times Z_y) = \{ P \times Q \mid P \in TQ(Z_x),\ Q \in TQ(Z_y) \}$
- $\alpha = (\alpha_P \mid P \in TQ(Z_x))$ und $\beta = (\beta_Q \mid Q \in TQ(Z_y))$ Zwischenpkte von Z_x bzw. Z_y

  $\Rightarrow$ $\alpha \times \beta := \left(\begin{pmatrix} \alpha_P \\ \beta_Q \end{pmatrix} \middle| \ P \in TQ(Z_x),\ Q \in TQ(Z_y) \right)$ Zwischenpkte von $Z_x \times Z_y$

Satz von Fubini: 27.22

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ zwei Quader und sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $X \times Y$ und sei die Funktion

$g : Y \longrightarrow \mathbb{R} ; \; y \longmapsto \int_X f(x,y)\,dx$ sei definiert,

d.h. $\forall y \in Y : \left(X \xrightarrow[h_y]{} \mathbb{R} ; \; x \mapsto f(x,y) \right.$ ist integrierbar auf $\left. X \right)$.

Dann ist g integrierbar auf Y und es gilt

$$\int_Y \int_X f(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{Def.}}{=} \int_Y g(y)\,dy \overset{!}{=} \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(x,y) .$$

Beweis:

Zeige: g ist integrierbar auf Y mit $\int_Y g(y)\,dy = \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(x,y) =: I$

Sei $\left((Z_y^m, \beta^m) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von Y und Zwischenpunkten mit $\lim\limits_{m\to\infty} \ell(Z^m) = 0$.

Zu zeigen: $\lim\limits_{m\to\infty} ZS(g, Z_y^m, \beta^m) = I$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \forall m \geq n_\varepsilon : \; \left| ZS(g, Z_y^m, \beta^m) - I \right| < \varepsilon$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben.

$\underset{\substack{f \text{ int.} \\ \text{auf } X\times Y}}{\Longrightarrow} \exists \delta_\varepsilon > 0 \;\; \forall (Z, \gamma) \in ZP(X \times Y)$ mit $\ell(Z) < \delta_\varepsilon$: $\left| ZS(f, Z, \gamma) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

Sei nun $\left((Z_x^k, \alpha^k) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $ZP(X)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \ell(Z_x^k) = 0$.

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \ell(Z_x^k) = 0$ und $\lim\limits_{m\to\infty} \ell(Z_y^m) = 0$, gilt

$\Longrightarrow \exists n_\varepsilon : \forall k, m \geq n_\varepsilon : \ell(Z_x^k \times Z_y^m) = \max\left\{ \ell(Z_y^m), \ell(Z_x^k) \right\} < \delta_\varepsilon$ (**)

Also: $\forall\, m, k \geq n_\varepsilon$: $\left| ZS(f, Z_x^k \times Z_y^m, \alpha^k \times \beta^m) - I \right| \overset{(*)+(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$ $(***)$

Beachte: $$ZS(f, Z_x^k \times Z_y^m, \alpha^k \times \beta^m) = \sum_{P \times Q \in TQ(Z_x^k \times Z_y^m)} \overbrace{V(P \times Q)}^{V(P)\cdot V(Q) \,=} \cdot f(\alpha_P^k, \beta_Q^m)$$

$$= \sum_{Q \in TQ(Z_y^m)} V(Q) \cdot \underbrace{\sum_{P \in TQ(Z_x^k)} V(P) \cdot f(\alpha_P^k, \beta_Q^m)}_{= \, ZS(h_{\beta_Q^m}, Z_x^k, \alpha^k)}$$

$$ZS(h_{\beta_Q^m}, Z_x^k, \alpha^k)$$

$$\Big\downarrow k \to \infty$$

weil $\ell(Z_x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

h_y int. $\forall\, y \in Y$ insb. für $y = \beta_Q^m$

$$\int_X h_{\beta_Q^m}(x)\, dx = \int_X f(x, \beta_Q^m)\, dx = g(\beta_Q^m)$$

$$\Longrightarrow \quad ZS(f, Z_x^k \times Z_y^m, \alpha^k \times \beta^m) \xrightarrow[k \to \infty]{} ZS(g, Z_y^m, \beta^m)$$

$$\Longrightarrow \quad \left| ZS(f, Z_x^k \times Z_y^m, \alpha^k \times \beta^m) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, k, m \geq n_\varepsilon$$

$$\Big\downarrow k \to \infty$$

$$\left| ZS(g, Z_y^m, \beta^m) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall\, m \geq n_\varepsilon$$

$\square$

Bsp. 27.23

$$f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} 1, & x_2 \in \mathbb{Q} \\ 2 \cdot x_1, & x_2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$ (insb. existiert!),

aber: f ist nicht integrierbar

Beweis:

① Sei $x_2 \in [0,1]$ beliebig

$\Rightarrow h_{x_2} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x_1 \longmapsto f(x_1, x_2)$

1. Fall: $x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow h_{x_2}(x_1) = 1 \quad \forall x_1 \in [0,1]$

$\Rightarrow h_{x_2}$ ist integrierbar mit $\displaystyle\int_0^1 h_{x_2}(x_1)\, dx_1 = 1$

2. Fall: $x_2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow h_{x_2}(x_1) = 2 \cdot x_1 \quad \forall x_1 \in [0,1]$

$\Rightarrow h_{x_2}$ ist integrierbar mit $\displaystyle\int_0^1 h_{x_2}(x_1)\, dx_1 = \int_0^1 2 x_1\, dx_1$

$$= x_1^2 \Big|_0^1 = 1$$

② $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x_2 \longmapsto \displaystyle\int_0^1 h_{x_2}(x_1)\, dx_1 = \int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1 = 1$

ist integrierbar mit $\displaystyle 1 = \int_0^1 \underbrace{g(x_2)}_{=1}\, dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$

③ Zeige: f ist nicht integrierbar!

Idee: finde eine Folge von Zerlegungen, deren Länge gegen 0 konvergiert, aber für die OS − US nicht gegen 0 konvergiert!

Sei für $m \geq 1$ Z^{2^m} die 2^m-te äquidistante Zerl. von $[0,1]^2$

$$\Rightarrow \quad TQ(Z^{2^m}) = \{ \underbrace{\left[\tfrac{i-1}{2^m}, \tfrac{i}{2^m}\right] \times \left[\tfrac{j-1}{2^m}, \tfrac{j}{2^m}\right]}_{=:\, Q_{ij}} \mid i,j = 1, \dots, 2^m \}$$

Dabei: $\quad V(Q_{ij}) = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{2m}}$

Zudem:

$$\sup_{x \in Q_{ij}} f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i \leq 2^{m-1} \\ 2 \cdot \frac{i}{2^m} = \frac{i}{2^{m-1}} & , \text{ falls } i > 2^{m-1} \end{cases}$$

$$\inf_{x \in Q_{ij}} f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{i-1}{2^m} = \frac{i-1}{2^{m-1}} & , \text{ falls } i \leq 2^{m-1} \\ 1 & , \text{ falls } i > 2^{m-1} \end{cases}$$

Damit:

$$OS(f, Z^{2^m}) = \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{i=1}^{2^m} \overbrace{V(Q_{ij})}^{=\frac{1}{2^{2m}}} \cdot \sup_{x \in Q_{ij}} f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^m} \left(\sum_{i \leq 2^{m-1}} \frac{1}{2^{2m}} \cdot 1 + \sum_{i > 2^{m-1}} \frac{1}{2^{2m}} \cdot \frac{i}{2^{m-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{\cancel{2}m}} \cdot \cancel{2^m} \cdot \left(2^{m-1} + \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{2^m} i}_{=\frac{2^m \cdot (2^m+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{2^{m-1}} i}_{=\frac{2^{m-1} \cdot (2^{m-1}+1)}{2}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \cdot \left(2^{m-1} + \frac{2^{2m} + 2^m - 2^{2m-2} - 2^{m-1}}{2^m} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2^{m+1}} \geqslant \frac{5}{4}$$

$$US(f, Z^{2^m}) = \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{i=1}^{2^m} V(Q_{ij}) \cdot \inf_{x \in Q_{ij}} f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^m} \left(\sum_{i \leq 2^{m-1}} \boxed{\frac{1}{2^{2m}}} \cdot \frac{i-1}{2^{m-1}} + \sum_{i > 2^{m-1}} \boxed{\frac{1}{2^{2m}}} \cdot 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot 2^m \cdot \left(\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{2^{m-1}} i-1}_{\substack{\parallel \\ \sum_{i=1}^{2^{m-1}} i \; - \; \sum_{i=1}^{2^{m-1}} 1 \\ \parallel \\ \frac{2^{m-1} \cdot (2^{m-1}+1)}{2} - 2^{m-1}}} + \underbrace{(2^m - 2^{m-1})}_{\substack{\parallel \\ 2^{m-1}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2^{m-1}}} \cdot \frac{\cancel{2^{m-1}} \cdot (2^{m-1}+1)}{2} - 1 + 2^{m-1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{3}{4}$$

Damit: $US(f, Z^{2^m}) \leq \frac{3}{4} < \frac{5}{4} \leq OS(f, Z^{2^m}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad OS(f, Z^{2^m}) - US(f, Z^{2m}) \geq \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Bemerk: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Für } \varepsilon = \frac{1}{4} \quad \exists \, \delta_\varepsilon > 0 : \ \forall Z \text{ mit } \ell(Z) < \delta_\varepsilon \\ \qquad \text{gilt: } OS(f, Z) - US(f, Z) < \varepsilon = \frac{1}{4} \quad (**) \end{array} \right.$

f int. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(*)$ & $(**)$ stehen in Widerspruch, da $\ell(Z^{2^m}) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

Also: f ist nicht integrierbar !!!

G) Satz über die Vertauschbarkeit der Integration

Kor. 27.24

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ zwei Quader, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ sei integrierbar und $g: Y \to \mathbb{R}: y \mapsto \int_X f(x,y)\,dx$ und $h: X \to \mathbb{R}: x \mapsto \int_Y f(x,y)\,dy$ seien definiert.

Dann ist g integrierbar auf Y und h ist integrierbar auf X mit

$$\int_Y \int_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_{X \times Y} f(x,y)\,d(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\,dy\,dx.$$

Beweis: Satz von Fubini für Quader 27.22 □

Kor. 27.25:

Seien $a,b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann:
$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$$

Zudem darf die Reihenfolge der Integration beliebig vertauscht werden.

Beweis: 27.24. □

Bsp. 27.26:

$$f: \underbrace{[0,2] \times [0,2]}_{=: Q} \longrightarrow \mathbb{R}: \binom{x_1}{x_2} \longmapsto x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \int_Q f(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) = \int_0^2 \int_0^2 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^2 \int_0^2 x_1 + x_2\,dx_1\,dx_2$$

$$= \int_0^2 \frac{x_1^2}{2} + x_2 \cdot x_1 \Big|_0^2\,dx_2 = \int_0^2 2 + 2x_2\,dx_2 = 2x_2 + x_2^2 \Big|_0^2$$

$$= 4 + 4 - 0 - 0 = 8.$$ □

H) Der Mittelwertsatz für Riemann-Integrale auf Quadern

Satz 27.27

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann: $\exists\, c \in [a,b] : \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx = f(c) \cdot V([a,b])$.

Beweis:

- $[a,b]$ ist kompakt und f ist stetig

  $\Longrightarrow \exists\, y, z \in [a,b] : \forall\, x \in [a,b] : f(y) \leq f(x) \leq f(z)$

- Z sei die Zerlegung von $[a,b]$ mit nur einem Quader

  $$\Longrightarrow f(y) \cdot V([a,b]) = US(f, Z) \leq \int_{[a,b]} f(x)\, dx \leq OS(f, Z) = f(z) \cdot V([a,b]) \quad (*)$$

- Setze: $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(y + t\cdot(z-y))$ stetig

  mit $g(0) = f(y)$ und $g(1) = f(z)$

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} \quad g(0) = f(y) \leq \frac{1}{V([a,b])} \cdot \int_{[a,b]} f(x)\, dx \leq f(z) = g(1)$$

$$\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, t \in [0,1] : \quad g(t) = \frac{1}{V([a,b])} \cdot \int_{[a,b]} f(x)\, dx$$

$$\underset{c := y + t\cdot(z-y)}{\Longrightarrow} \quad f(c) = g(t) \qquad // \qquad \Longrightarrow \text{Beh.}$$

$c := y + t\cdot(z-y) \in \overline{yz} \subseteq [a,b]$

$\square$

§ 28 Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium

A) Nullmengen

Def. 28.1

Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine Nullmenge

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (Q_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ mit } Q_m \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Quader} : N \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m$$

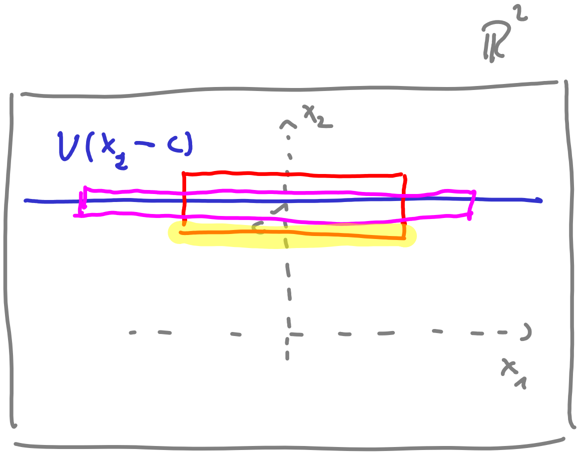
$$\text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \varepsilon$$

Bsp. 28.2

= Hyperebene im $\mathbb{R}^n$

$V(x_j - c) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = c \}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ fest, $c \in \mathbb{R}$ fest,

ist eine Nullmenge



Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Für $m \geq 1$ definiere $Q_m = [a^m, b^m]$

mit
- $a_i^m := -m$, $b_i^m := m$ $\forall i \neq j$
- $a_j^m := c - \frac{\varepsilon}{2^{m+1} \cdot 2^n \cdot m^{n-1}}$

  $b_j^m := c + \frac{\varepsilon}{2^{m+1} \cdot 2^n \cdot m^{n-1}}$

$$\Rightarrow V(Q_m) = (2 \cdot m)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon}{2^{m+1} \cdot 2^n \cdot m^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} V(Q_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Zudem: $x \in V(x_j - c) \Rightarrow x_j = c \in [a_j^m, b_j^m] \; \forall m$

und $\exists m : |x_i| < m \;\; \forall i \neq j \Rightarrow x \in Q_m \Rightarrow N \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m$

$\square$

Bem. 28.3

$\delta > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ · $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(x) = (x_1-\delta, x_1+\delta) \times \dots \times (x_n-\delta, x_n+\delta)$

· $\overline{U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(x)} = [x_1-\delta, x_1+\delta] \times \dots \times [x_n-\delta, x_n+\delta]$

ist ein n-dim. Quader!

B) Eigenschaften von Nullmengen

Prop. 28.4

ⓐ Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.

ⓑ Jede höchstens abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

ⓒ $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists (Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Quader : $N \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathring{Q}_m \ \wedge \ \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \varepsilon$

ⓓ $N \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Nullmenge $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q_1, \dots, Q_k$ Quader : $N \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathring{Q}_i \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} V(Q_i) < \varepsilon$

ⓔ $N \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists (W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Würfel : $N \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m \ \wedge \ \sum_{m=0}^{\infty} V(W_m) < \varepsilon$

d.h. in der Def. von Nullmenge kann man Quader durch Würfel ersetzen.

Beweis:

ⓐ Sei N Nullmenge und $M \subseteq N$. Sei $\varepsilon > 0$.

$\hookrightarrow \exists (Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Quader : $\underset{\substack{\cup \\ M}}{N} \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m \ \wedge \ \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \varepsilon$

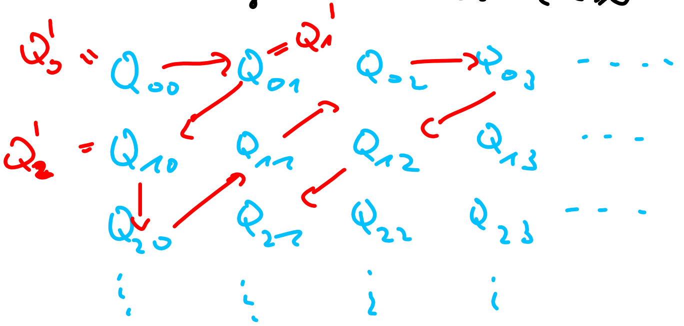
$\Rightarrow M$ ist eine Nullmenge.

ⓑ Seien N_k, $k \in \mathbb{N}$, Nullmengen in $\mathbb{R}^n$. Sei $\varepsilon > 0$.

· N_k Nullmenge $\Longrightarrow \exists (Q_{ki})_{i\in\mathbb{N}}$ Quader : $N_k \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_{ki}$

und $\sum_{i=0}^{\infty} V(Q_{ki}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ ⊛

Cantorsche Diagonalverfahren $\Rightarrow$ sortiere die $(Q_{ki})_{i\in\mathbb{N}}, k\in\mathbb{N}$ zu einer Folge $(Q'_m)_{m\in\mathbb{N}}$



$$\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_{ki} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q'_m$$

Zudem: $$\sum_{m=0}^{p} V(Q'_m) \le \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{p} V(Q_{ki}) \le \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{\infty} V(Q_{ki})$$

$$< \sum_{k=0}^{p} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{4}\cdot\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{4}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}}_{=2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

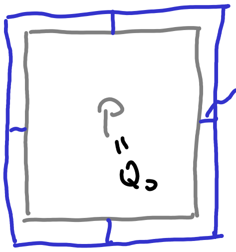
$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} V(Q'_m) = \lim_{p\to\infty}\underbrace{\sum_{m=0}^{p} V(Q'_m)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Also: $\bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$ ist eine Nullmenge!

ⓒ Zeige: $P = [a,b] \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader

$\Rightarrow \exists\, Q$ Quader: $P \subseteq \mathring{Q}$ und $V(Q) < 2\cdot V(P)$

Idee:



$$Q_t = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i - t, b_i + t]$$

$$\Rightarrow V(Q_t) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 2t)$$

$\rotatebox{-90}{$\geq$}$

$V(Q_0) = V(P)$ ist stetig als Polynomfunktion in t

$\Rightarrow$ für t klein (d.h. nahe 0) gilt: $V(Q_t) < 2\cdot V(P)$

Damit: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$$\Rightarrow \exists\, (P_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ Quader}: N \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} P_m \wedge \sum_{m=0}^{\infty} V(P_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall m \;\exists\, Q_m \text{ Quader}: P_m \subseteq \mathring{Q}_m \wedge V(Q_m) < 2 \cdot V(P_m)$$

$$\Rightarrow N \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} P_m \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathring{Q}_m \quad \wedge \quad \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) \leq 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} V(P_m) < \underset{\varepsilon}{\underset{\parallel}{2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}}}$$

ⓓ Sei $N \subsetneq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Nullmenge. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\underset{ⓒ}{\Longrightarrow} \exists\, (Q_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ Quader}: N \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathring{Q}_m \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \varepsilon$$

$$\underset{N \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \text{o.E.}: N \subseteq \mathring{Q}_0 \cup \dots \cup \mathring{Q}_k \subseteq Q_0 \cup \dots \cup Q_k$$

$$\text{und} \quad \sum_{i=0}^{k} V(Q_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} V(Q_i) < \varepsilon$$

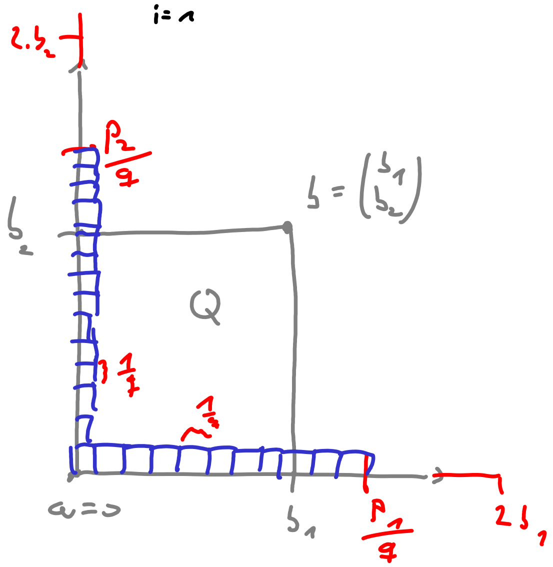
ⓔ Zeige: (∗∗) $Q = [a,b]$ Quader $\Rightarrow \exists\, W_1, \dots, W_k$ Würfel: $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} W_i$

und $\sum_{i=1}^{k} V(W_i) \leq 2^n \cdot V(Q)$

Denn: o.E.: $a = 0$.

Wähle $\frac{p_i}{q} \in [b_i, 2b_i]$ und überdecke Q durch $k = p_1 \cdots p_n$ Würfel $W_1, \dots, W_k$ der Seitenlänge $\frac{1}{q}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} V(W_i) \leq (2b_1) \cdot (2 \cdot b_2) \cdots (2 \cdot b_n) = 2^n \cdot V(Q)$$



Damit: Sei N eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \exists\, (Q_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ Quader}: N \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Q_m \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\underset{(**)}{\Rightarrow} \exists \text{ Würfel } W_{m,1}, \dots, W_{m,k_m}: Q_m \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_m} W_{m,i} \text{ und } \sum_{i=1}^{k_m} V(W_{m,i}) \leq 2^n \cdot V(Q_m)$$

$$\Rightarrow N \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_m} W_{m,i} \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_m} V(W_{m,i}) \leq 2^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \varepsilon \quad \square$$

Bsp. 28.5

Die Seiten eines Quaders und sein Rand sind Nullmengen.

Denn: $Q = [a,b] \implies \partial Q \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} V(x-a_i) \cup V(x-b_i)}_{\text{Nullmenge als endl. Vereinigung von Nullmengen (28.2 + 28.4)}}$

∂Q $\overset{28.4}{\rightsquigarrow}$ ist Nullmenge als TM einer Nullmenge!

und ebenso die Seiten von Q! $\square$

Bsp. 28.6:

$\mathbb{Q}^n$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ und ebenso $\mathbb{Q}^n \cap [a,b]$. $(n \geq 1)$

Denn:

$\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{\{pt\}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge (als Teil des Randes eines Quaders)

$\implies \mathbb{Q}^n$ = abzählbare Vereinigung von Punkten $= \bigcup_{a \in \mathbb{Q}^n} \{a\}$

$\underset{28.4}{\implies} \mathbb{Q}^n$ ist Nullmenge und ebenso $[a,b] \cap \mathbb{Q}^n$. $\square$

c) Bilder von Nullmengen

Lemma 28.7

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig und N Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $f(N \cap D)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Beweis:

- f Lipschitz-stetig $\implies \exists\, q > 0 : \forall x,y \in D: \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq q \cdot \|x-y\|_\infty$ $\Big\}$ $(*)$

· Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

· N Nullmenge $\Rightarrow$ $\exists\ W_i = \overline{\mathcal{U}_{\delta_i}(x_i)}$, $i = 0, \dots, \infty$, mit

$$N \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \quad \underline{\text{und}} \quad \sum_{i=0}^{\infty} V(W_i) < \frac{\varepsilon}{q^n}$$

$$\overset{\|}{\sum_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot \delta_i^n}$$

· ⊛ $\Rightarrow$ $f(W_i \cap D) = f\left(\overline{\mathcal{U}_{\delta_i}(x_i)} \cap D\right) \underset{⊛}{\subseteq} \overline{\mathcal{U}_{q \cdot \delta_i}(f(x_i))}$

$\Rightarrow$ $f(N \cap D) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(W_i \cap D) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{U}_{q \cdot \delta_i}(f(x_i))}$

$\underline{\text{und}}$ $\sum_{i=0}^{\infty} V\left(\overline{\mathcal{U}_{q\delta_i}(f(x_i))}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (2 \cdot q \cdot \delta_i)^n = q^n \sum_{i=0}^{\infty} 2^n \cdot \delta_i^2$

$\wedge$

$q^n \cdot \frac{\varepsilon}{q^n} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ $f(N \cap D)$ ist eine Nullmenge. $\boxed{↯}$

Bsp. 28.8 (Peano-Kurve)

$\exists\ f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ stetig & bijektiv (23.43)

$\Rightarrow$ $g : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ist stetig und surjektiv

$(x, y) \longmapsto f(x)$

$\underline{\text{Zudem:}}$ $g(\underbrace{[0,1] \times \{0\}}_{\text{Nullmenge}}) = \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{\text{keine Nullmenge!}}$

$\Rightarrow$ Stetigkeit reicht in Lemma 28.7 NICHT!

Prop. 28.9

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $\overset{\overset{\mathcal{U}}{\cup\!\mid}}{N}$ kompakte Nullm. in $\mathbb{R}^n$.

Dann: $f(N)$ ist eine kompakte Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.

Beweis:

f stetig diffbar auf $\mathcal{U}$

$\underset{25.20}{\Longrightarrow}$ f lokal Lipschitz-stetig auf $\mathcal{U}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ N \subseteq \mathcal{U}}}{\Longrightarrow}$ f lokal Lipschitz-stetig auf N

$\underset{N \text{ kompakt}}{\overset{23.38}{\Longrightarrow}}$ f ist global Lipschitz-stetig auf N

$\underset{28.7}{\Longrightarrow}$ $f(N)$ ist eine Nullmenge. $\square$

Bsp. 28.10

$S^1 = $ Kreislinie $= \{ x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$ ist eine Nullmenge

Dann: $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 ; \binom{r}{\theta} \longmapsto \binom{r \cdot \cos(\theta)}{r \cdot \sin(\theta)}$ ist stetig-diffbar

und $S^1 = f(\underbrace{\{1\} \times [0, 2\pi]}_{\text{Nullmenge im } \mathbb{R}^2})$ ist eine NM $\square$

D) Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium

Def 28.11

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

f heißt fast überall stetig $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, N \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge : f stetig auf $D \setminus N$

Bsp. 28.12 (Dirichlet'sche Sprungfunktion)

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g ist außerhalb der Nullmenge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ konstant, aber g ist in keinem Pkt stetig!

Satz 28.14 (Lebesgue)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann: f ist integrierbar $\Longleftrightarrow$ f ist fast überall stetig.

Bsp. 28.15

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : \mathring{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig & beschränkt.

$$\Rightarrow \quad g : Q \to \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in \mathring{Q} \\ 0, & x \in \partial Q \end{cases} \quad \text{ist beschränkt}$$

$\Rightarrow$ g ist fast überall stetig, da $\{x \in Q \mid g \text{ nicht stetig in } x\} \subseteq \partial Q$

$\Rightarrow$ g ist integrierbar auf Q

Bem. 28.16

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar $\overset{28.14}{\Longrightarrow}$ f ist beschränkt und f ist fast überall stetig

$\Rightarrow$ $|f|$ ist beschränkt und $|f|$ ist fast überall stetig

$\underset{28.14}{\Longrightarrow}$ $|f|$ ist integrierbar auf $[a,b]$.

Korollar 28.17

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$, $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

ⓐ $f \cdot g$ ist integrierbar.

ⓑ $\exists\, q > 0$ mit $|g(x)| \geq q$ $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ ist integrierbar auf $[a,b]$.

Beweis:

ⓐ f, g integrierbar $\Rightarrow$ f & g beschränkt und f.ü. stetig

$\Rightarrow$ $f \cdot g$ ist beschränkt und

$$\{x \mid f \cdot g \text{ unstetig in } x\} \subseteq \underbrace{\{x \mid f \text{ unstetig in } x\} \cup \{x \mid g \text{ unstetig in } x\}}_{\text{ist Nullmenge}}$$

$\Rightarrow$ $f \cdot g$ ist f.ü. stetig $\underset{28.14}{\Rightarrow}$ $f \cdot g$ ist integrierbar.

ⓑ g integrierbar $\Rightarrow$ g ist f.ü. stetig

$\underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{g}$ f.ü. stetig und $\frac{1}{g}$ ist beschränkt

$\underset{28.14}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{g}$ integrierbar $\underset{ⓐ}{\Rightarrow}$ $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ integrierbar auf $[a,b]$. ∎

Bem. 28.18

Lebesgue sagt <u>nichts</u> über den Wert des Integrals!

Bem. 28.19:

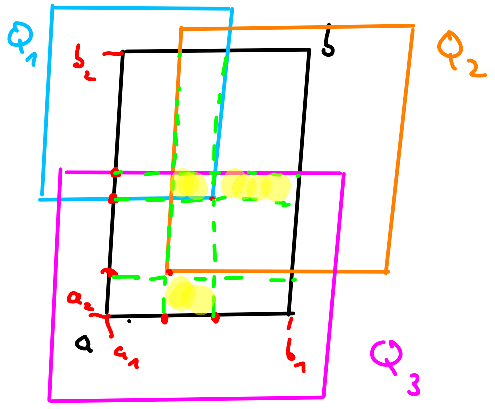
- HDIR: F diffbar mit $F' = f$ & f stetig $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
- 20.27: F diffbar $\not\Rightarrow$ F' beschränkt, also F' nicht integrierbar.
- F diffbar mit F' beschränkt $\not\Rightarrow$ F' integrierbar, d.h. F' f.ü. stetig

Volterra-Funktion

Lemma 28.13

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $[a,b] \subseteq \bigcup_{m=1}^{k} \mathring{Q}_m$, wobei Q_m Quader,

dann: $\exists\ Z$ Zerlegung von $[a,b]$: $\forall\, Q \in TQ(Z)\ \exists\, m : Q \subseteq Q_m$



Beweis:

Sei $Q_m = [a^{(m)}, b^{(m)}]$ für $m = 1, \dots, k$.

$$\Rightarrow \left\{ a_i, b_i, a_i^{(m)}, b_i^{(m)} \;\middle|\; m = 1,..,k,\ \substack{a_i^{(m)} > a_i \\ b_i^{(m)} < b_i} \right\}$$

die Menge der Stützstellen von Z_i

Setze: $Z := Z_1 \times \dots \times Z_n$ ist eine Zerlegung von $[a,b]$

Sei $\underset{[c,d]}{\underset{\parallel}{Q}} \in TQ(Z)$ $\Rightarrow \exists\, m : Q \cap \mathring{Q}_m \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists\, x \in Q \cap \mathring{Q}_m$$

$$\Rightarrow c_i \leq x_i \leq d_i \quad \wedge \quad a_i^{(m)} < x_i < b_i^{(m)}$$

$$\Rightarrow a_i^{(m)} \leq c_i \leq x_i \leq d_i \leq b_i^{(m)}$$

$$\Rightarrow Q = [c, d] \subseteq Q_m$$

$\boxed{\text{B}}$

E) Beweis des Lebesgueschen Integrabilitätskriteriums

Satz 28.14 (Lebesgue)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann: f ist integrierbar $\Longleftrightarrow$ f ist fast überall stetig.

Beweis:

Wir verwenden die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$,

s.d. $\mathcal{U}_\delta(x) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \dots \times (x_n - \delta, x_n + \delta)$.

"⇒" Sei also f integrierbar auf $[a,b]$.

Setze: $N := \{ x \in [a,b] \mid f \text{ nicht stetig in } x \}$.

Zeige: N ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Beachte: f stetig in $x \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall y \in U_\delta(x) \cap [a,b] : |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

d.h. f nicht stetig in $x \iff \exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 : \exists y \in U_\delta(x) \cap [a,b] : |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$

Setze: $N_m := \left\{ x \in [a,b] \mid \forall \delta > 0 \; \exists y \in U_\delta(x) \cap [a,b] : |f(y) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\}$

$\Rightarrow \quad N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq N_4 \subseteq \ldots$ und $N = \bigcup_{m \geq 1} N_m$

Es reicht z.z.: $\forall m \geq 1$: N_m ist eine Nullmenge (28.4)

Sei $m \geq 1$ gegeben und o.E. $N_m \neq \emptyset$ und sei $\varepsilon > 0$.

Ziel: zeige es gibt endl. viele Quader, die N_m überdecken mit Volumensumme $< \varepsilon$.

Vor. $\Rightarrow$ f ist integrierbar

$\underset{\text{RIK 27.12}}{\Rightarrow}$ $\exists Z$ Zerlegung von $[a,b]$: $OS(f,Z) - US(f,Z) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m}$ ⊛

Idee: $N_m = N_m^\circ \cup N_m^\partial$

$N_m^\partial = \{ x \in N_m \mid \exists Q \in TQ(Z) : x \in \partial Q \}$

$N_m^\circ = \{ x \in N_m \mid \exists Q \in TQ(Z) : x \in \mathring{Q} \}$

und überdecke jede der beiden durch endl. viele Quader mit Volumensumme jeweils $< \frac{\varepsilon}{2}$

Betrachte: $T = \{ Q \in TQ(Z) \mid N_m \cap \mathring{Q} \neq \emptyset \}$

Sei $Q \in T$ und $x \in N_m \cap \mathring{Q}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x) \subseteq \mathring{Q}$

$\Rightarrow \exists y \in U_\delta(x) : \underbrace{\frac{1}{m} \leq |f(y) - f(x)| \leq \sup_{z \in Q} f(z) - \inf_{z \in Q} f(z)}_{(**)}$

Damit: $\sum_{Q\in T} V(Q) = m\cdot \sum_{Q\in T} V(Q)\cdot \underset{\wedge\!|}{\frac{1}{m}}$

$$\underset{(**)}{\leq} m\cdot \sum_{Q\in T} V(Q)\cdot\left(\sup_{z\in Q} f(z) - \inf_{z\in Q} f(z)\right)$$

$$\leq m\cdot \sum_{Q\in TQ(z)} V(Q)\cdot\left(\sup_{z\in Q} f(z) - \inf_{z\in Q} f(z)\right)$$

$$= m\cdot \left(OS(f,z) - US(f,z)\right)$$

$$\underset{(*)}{<} m\cdot \frac{\varepsilon}{2\cdot m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Bemerke: $N_m^\circ \subseteq \bigcup_{Q\in T} Q$

Zudem: $M := \bigcup_{Q\in TQ(z)} \partial Q$ ist eine Nullmenge als endl. Vereinigung von Rändern von Quadern

und M ist kompakt (da abgeschl. & beschr.)

$\underset{28.4}{\Rightarrow} \exists P_1,\dots,P_k$ Quader mit $M \subseteq P_1\cup\dots\cup P_\ell$ und $\sum_{i=1}^{\ell} V(P_i) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow N_m^\partial \subseteq M \subseteq P_1\cup\dots\cup P_\ell$

Also: $N_m = N_m^\circ \cup N_m^\partial \subseteq \bigcup_{Q\in T} Q \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} P_i$

mit $\sum_{Q\in T} V(Q) + \sum_{i=1}^{\ell} V(P_i) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ N_m ist eine Nullmenge!

$\Rightarrow$ f ist f.ü. stetig.

"$\Leftarrow$" Sei f fast überall stetig.

Zeige: f ist integrierbar mit Hilfe des RIK 27.12

Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Z.z.: $\exists\ Z$ Zerlegung von $[a,b]$: $OS(f,Z) - US(f,Z) < \varepsilon$

- f beschränkt $\Rightarrow \exists\ c : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq c$ $\textcircled{!}$
- $N := \{x \in [a,b] \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$ ist eine Nullmenge

$\Rightarrow \exists\ (Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Quader : $N \subseteq \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \mathring{Q}_m$

und $\sum\limits_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \dfrac{\varepsilon}{2\cdot c + V([a,b])}$ $\boxed{!!!}$

- $x \in [a,b] \setminus N \Rightarrow f$ ist stetig in x

$\Rightarrow \exists\ \delta > 0 : \forall y \in U_\delta(x) \cap [a,b] : |f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{8\cdot c + 4\cdot V([a,b])}$

$\Rightarrow P_x := \overline{U_{\frac{\delta}{2}}(x)}$ ist ein Quader in $\mathbb{R}^n$,

s.d. $\forall y,z \in P_x : |f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)|$

$$< \frac{\varepsilon}{4\cdot c + 2\cdot V([a,b])}$$

$\Rightarrow \sup\limits_{y \in P_x \cap [a,b]} f(y) - \inf\limits_{z \in P_x \cap [a,b]} f(z) \leq \dfrac{\varepsilon}{4\cdot c + 2\cdot V([a,b])} < \dfrac{\varepsilon}{2c + V([a,b])}$ $\boxed{!!}$

- Beachte: $[a,b] = N \cup ([a,b]\setminus N)$

$$\subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathring{Q}_m \cup \bigcup_{x \in [a,b]\setminus N} \mathring{P}_x$$

ist eine offene Überdeckung des kompakten Quaders $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\ m_1, \dots, m_k, x_1, \dots, x_\ell : [a,b] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathring{Q}_{m_i} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{\ell} \mathring{P}_{x_j}$

· 28.13 $\Rightarrow \exists\, Z$ Zerlegung von $[a,b]$: $\forall Q \in TQ(Z)$:

Q ist in einem Q_{m_i} oder P_{k_j} enthalten

$$\Rightarrow OS(f,Z) - US(f,Z) = \sum_{Q \in TQ(Z)} V(Q) \cdot \left(\sup_{z \in Q} f(z) - \inf_{z \in Q} f(z)\right)$$

$$\leq \sum_{\substack{Q \in TQ(Z) \\ \exists i:\, Q \subseteq Q_{m_i}}} V(Q) \cdot \underbrace{\left(\sup_{z \in Q} f(z) - \inf_{z \in Q} f(z)\right)}_{\leq 2 \cdot c \ \boxed{!}} + \sum_{\substack{Q \in TQ(Z) \\ \exists j:\, Q \subseteq P_{k_j}}} V(Q) \cdot \underbrace{\left(\sup_{z \in Q} f(z) - \inf_{z \in Q} f(z)\right)}_{< \frac{\varepsilon}{2 \cdot c + V([a,b])} \ \boxed{!!}}$$

$$\leq \underset{\wedge \boxed{!!!}}{\sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) \cdot 2 \cdot c} + \left(\sum_{Q \in TQ(Z)} V(Q)\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot c + V([a,b])}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2 \cdot c + V([a,b])} \cdot 2c + \overset{\|}{V([a,b])} \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot c + V([a,b])} = \varepsilon$$

Also: f ist integrierbar auf $[a,b]$.

$\boxed{\xi}$

§ 29 Das Riemann-Integral über Jordan-meßbaren Mengen

A) Charakteristische Funktionen

Def. 29.1

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$.

ⓐ $1_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ heißt charakteristische Funktion von B.

ⓑ $f_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ heißt charakteristische Funktion von f auf B.

Lemma 29.2

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader mit $B \subseteq P, Q$.

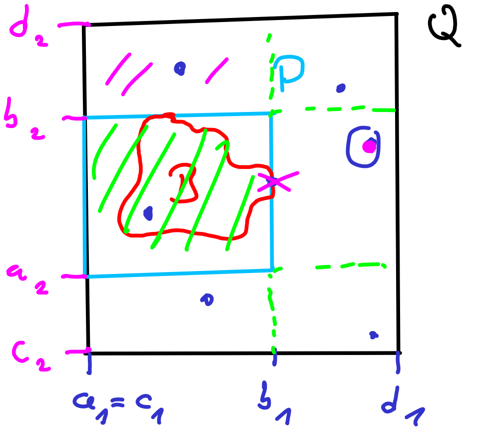
Dann: f_B integrierbar auf P $\Longleftrightarrow$ f_B integrierbar auf Q

Zudem gilt dann:

$$\int_P f_B(x)\, dx = \int_Q f_B(x)\, dx .$$

Beweis:

1. Fall: $[a,b] = P \subseteq Q = [c,d]$



Sei f_B ist auf P integrierbar

$\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, N \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge: f_B stetig auf $P \setminus N$

$\Longrightarrow$ f_B ist stetig auf $Q \setminus (N \cup \partial P)$ und $N \cup \partial P$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ $\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}$ f_B integrierbar auf Q

Sei f_B auf Q integrierbar

$$\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, N \text{ Nullmenge in } \mathbb{R}^n : \; f_B \text{ stetig auf } Q \setminus N$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ P\setminus N \subseteq Q \setminus N}}{\Longrightarrow} \quad f_B \text{ stetig auf } P \setminus N \underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} f_B \text{ ist int. auf } P$$

Sei Z die von P auf Q induzierte Zerlegung, $\underline{\text{d.h.}}$ die Stützstellen in Koordinatenrichtung i sind $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$

$$\Longrightarrow \quad P \in TQ(Z)$$

Sei $(Z^m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Verfeinerungen von Z mit $\ell(Z^m) \longrightarrow 0$, und $(\alpha^m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine von Zwischenpunkten mit $\alpha^m_X \in \mathring{X} \;\forall X \in TQ(Z^m)$

$\Longrightarrow$ Z^m enthält eine Zerlegung X^m von P und α^m enthält Zwischenpkt. β^m von X^m

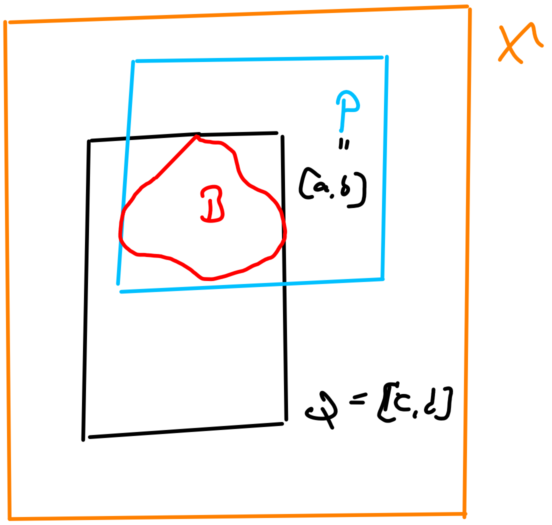
$$\int_Q f_B(x)\,dx \xleftarrow[m\to\infty]{} \Longrightarrow ZS(f_B, Z^m, \alpha^m) = \sum_{Y \in TQ(Z^m)} \overbrace{f_B(\alpha^m_Y)}^{=\,0,\text{ falls } Y \notin TQ(X^m)} \cdot V(Y)$$

$$\Big\| \, ? \qquad\qquad \Big\| \quad TQ(X^m) \subseteq TQ(Z^m)$$

$$\int_P f_B(x)\,dx \xleftarrow[m\to\infty]{} ZS(f_B, X^m, \beta^m) = \sum_{Y \in TQ(X^m)} f_B(\underset{\substack{\shortparallel \\ \alpha^m_Y}}{\beta^m_Y}) \cdot V(Y)$$

2. Fall: P & Q beliebig

Wähle einen Quader X, der P und Q enthält



Dann:

f_B ist int. auf P

$\underset{1.\text{Fall}}{\Leftrightarrow}$ f_B ist int. auf X

$\underset{1.\text{Fall}}{\Leftrightarrow}$ f_B ist int. auf Q

Zudem: $\int_P f_B(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ 1.\text{Fall}}}{=} \int_X f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ 1.\text{Fall}}}{=} \int_Q f(x)\,dx$

$\square$

B) Jordan-meßbare Mengen

Def. 29.3 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge.

ⓐ $f: B \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-) integrierbar auf B

$:\Leftrightarrow$ $\exists$ $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader mit $B \subseteq Q$ und f_B integrierbar auf Q

Setze dann: $\int_B f(x)\,dx := \int_Q f_B(x)\,dx$

ⓑ B heißt Jordan-messbar $:\Leftrightarrow$ $\exists$ $V(B) \underset{!!}{:=} \int_B 1\,dx$

Volumen von B

Bem. 29.4:

ⓐ Def. 29.3 unabhängig vom gewählten Quader.

ⓑ B Quader $\Rightarrow$ o.E. $Q = B$ $\Rightarrow$ Def. von $\int_B$ & $V(B)$ wie in §27

Bsp. 29.5:

$V(\emptyset) = \int_\emptyset 1\,dx = 0$, insb.: $\emptyset$ ist Jordan-messbar

denn: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader $\Rightarrow \emptyset \subseteq Q$

$\Rightarrow \mathbb{1}_\emptyset(x) = 0 \; \forall x \in Q \Rightarrow \int_Q \mathbb{1}_\emptyset \,dx = 0$ □

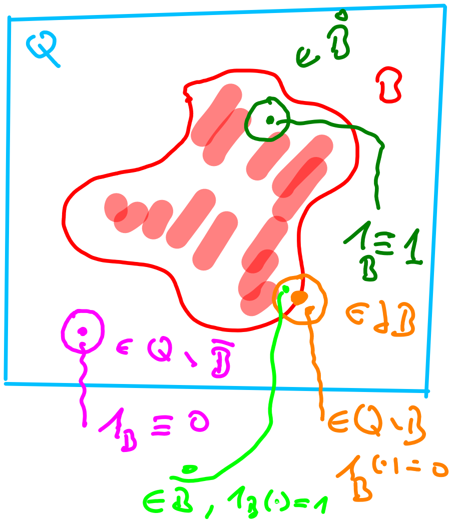
Satz 29.6

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.

Dann: B Jordan-messbar $\Leftrightarrow$ ∂B ist eine Nullmenge.

Beweis:

Wähle einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq \mathring{Q}$.



Dann: $\{\overset{\in Q}{x} \mid \mathbb{1}_B \text{ unstetig in } x\} = \partial B$

Damit:

B Jordan-messbar $\Leftrightarrow$ $\mathbb{1}_B$ ist integrierbar auf Q

$\Leftrightarrow \underbrace{\{x \in Q \mid \mathbb{1}_B \text{ unstetig in } x\}}_{= \partial B}$ ist Nullmenge □

Bsp. 29.7

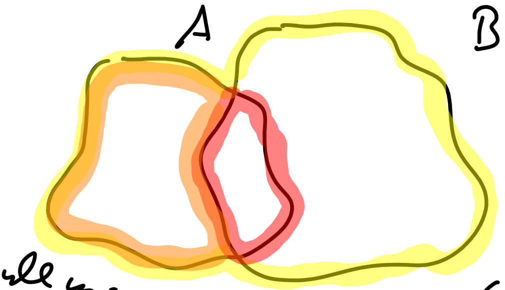
$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ = Kreisscheibe = $\overline{U_1((0,0))}$

ist Jordanmessbar, da $\partial D = S^1 = \{x \mid \|x\|_2 = 1\}$ ist NM

nach 28.20, und $V(D) = \int_D 1\,dx = ?$

Korollar 29.8

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} A\cup B \\ A\cap B \\ A\setminus B \end{matrix}\right\}$ sind Jordan-messbar



Beweis:

$$\begin{matrix} \partial(A\setminus B) & \subseteq & \\ \partial(A\cup B) & \subseteq & \partial A\cup\partial B \\ \partial(A\cap B) & \subseteq & \end{matrix}$$ ist Nullmenge, wegen 29.6

sind Nullmengen $\overset{}{\underset{29.6}{\Longrightarrow}}$ $A\setminus B$, $A\cup B$, $A\cap B$ Jordan-messbar

$\boxtimes$

c) Lebesguesches Integrabilitätskriterium

Satz 29.9

Sei $B\subseteq\mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f: B\to\mathbb{R}$ beschränkt.

Dann: f ist integrierbar auf B $\Longleftrightarrow$ f ist fast überall stetig auf B.

Beweis: Sei dazu Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$ mit $B\subseteq Q$,

"$\Rightarrow$" f integrierbar auf B $\Rightarrow$ f_B integrierbar auf Q

$\overset{\text{Lebesgue}}{\underset{28.14}{\Longrightarrow}}$ f_B ist fast überall stetig auf Q,

d.h. $\exists$ N Nullmenge: f_B stetig auf $Q\setminus N$

$\Rightarrow$ f ist stetig auf $B\setminus N$

$\Rightarrow$ f ist fast überall stetig auf B

"$\Leftarrow$" f sei fast überall stetig auf B

$\Rightarrow \exists N \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge : f stetig auf $B \setminus N$

$\Rightarrow f_B$ stetig $Q \setminus \underbrace{(N \cup \partial B)}_{\text{Nullmenge, da } B \text{ Jordan-messbar!}}$

$\Rightarrow f_B$ ist fast überall stetig auf Q

$\overset{\text{Lebesgue}}{\underset{28.24}{\Longrightarrow}} f_B$ ist integrierbar auf Q

$\Rightarrow f$ " " " B.

□

Kor. 29.10

B Jordan-messbar & kompakt und $f: B \to \mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow f$ ist integrierbar auf B.

Beweis

B kompakt $\wedge$ f stetig $\Rightarrow$ f ist beschränkt

$\overset{\text{Lebesgue}}{\underset{29.9}{\Longrightarrow}}$ f ist integrierbar auf B

□

D) Folgerungen aus dem Lebesgueschen Integrabilitätskriteriums

Kor. 29.11

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f, g: B \to \mathbb{R}$ seien integrierbar.

ⓐ $\forall c, d \in \mathbb{R}$: $c \cdot f + d \cdot g$ ist integrierbar auf B mit

$$\int_B (c \cdot f + d \cdot g)(x) = c \cdot \int_B f(x)\,dx + d \cdot \int_B g(x)\,dx$$

ⓑ $|f|$ ist integrierbar auf B mit $\left| \int_B f(x)\,dx \right| \leq \int_B |f(x)|\,dx$.

ⓒ $f(x) \leq g(x) \;\forall x \in B \Longrightarrow \int_B f(x)\,dx \leq \int_B g(x)\,dx$

ⓓ $f \cdot g$ ist integrierbar auf B.

ⓔ $\exists q > 0 : \forall x \in B : |g(x)| \geq q \Rightarrow \frac{f}{g}$ ist integrierbar auf B.

Beweis: Wähle einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$.

ⓐ f & g integrierbar auf B $\overset{29.9}{\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}}$ f & g f.ü. stetig auf B

$\Rightarrow$ $c\cdot f + d\cdot g$ f.ü. stetig auf B $\underset{29.9}{\Rightarrow}$ $c\cdot f + d\cdot g$ integr. auf B

Zudem:

$$\int_B (c\cdot f + d\cdot g)(x)\,dx \overset{\text{Def}}{=} \int_Q (c\cdot f + d\cdot g)_B(x)\,dx$$

$$= \int_Q c\cdot f_B(x) + d\cdot g_B(x)\,dx \underset{27.19}{=} c\cdot \int_Q f_B(x)\,dx + d\cdot \int_Q g_B(x)\,dx$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} c\cdot \int_B f(x)\,dx + d\cdot \int_B g(x)\,dx$$

ⓑ f ist int. auf B $\underset{29.9}{\Longrightarrow}$ f ist f.ü. stetig auf B

$\Rightarrow$ $|f|$ f.ü. stetig auf B $\underset{29.9}{\Rightarrow}$ $|f|$ ist int. auf B

Zudem: $\left|\int_B f(x)\,dx\right| = \left|\int_Q f_B(x)\,dx\right| \underset{27.20}{\leq} \int_Q |f(x)|\,dx = \int_B |f(x)|\,dx$

ⓒ $\int_B f(x)\,dx = \int_Q f_B(x)\,dx \underset{27.19}{\leq} \int_Q g_B(x)\,dx = \int_B g(x)\,dx$

ⓓ f & g sind integrierbar auf B und beschränkt auf B

$\underset{29.9}{\Rightarrow}$ f & g sind f.ü. stetig auf B und " " "

$\Rightarrow$ $f\cdot g$ ist " " " und " " "

$\underset{29.9}{\Rightarrow}$ $f\cdot g$ ist integrierbar auf B

ⓔ f & g sind integrierbar auf B und beschränkt auf B

$\overset{}{\underset{29.9}{\Longrightarrow}}$ f & g sind f. ü. stetig auf B und " " "

$\underset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow}$ $\frac{f}{g}$ ist " " " und " " "

$\underset{29.9}{\Longrightarrow}$ $\frac{f}{g}$ ist integrierbar auf B

$\square$

Kor. 29.12 (MWS für Integralrechnung)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ Jordan-messbar und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf B.

Dann:
$$\inf_{x\in B} f(x) \cdot V(B) \leq \int_B f(x)\,dx \leq \sup_{x\in B} f(x) \cdot V(B)$$

Beweis:

f integrierbar auf B $\Rightarrow$ f beschränkt auf B

$\Rightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R} : \quad m := \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x), \quad M := \sup_{x\in B} f(x)$

$$\Rightarrow m \cdot V(B) = m \cdot \int_B 1\,dx = \int_B m\,dx \underset{\boxed{29.11}}{\overset{}{\leq}} \int_B f(x)\,dx \leq \int_B M\,dx = M \cdot \int_B 1 dx$$
$$= M \cdot V(B)$$

$\square$

Kor. 29.13

Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ beide Jordan-messbar und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf B.

Dann ist f auch integrierbar auf A.

Beweis:

f ist int. auf B $\overset{29.9}{\Longrightarrow}$ f ist f. ü. stetig auf B

$\Rightarrow$ f ist f.ü. stetig auf A $\underset{29.9}{\Longrightarrow}$ f ist integr. auf A

$\square$

E) Additivität des Integrals

Satz 29.14

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ integrierbar auf A und B.
Dann ist f integrierbar auf $A \cup B$ und $A \cap B$ und es gilt:

$$\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx - \int_{A \cap B} f(x)\,dx .$$

Beweis:

- Kor. 29.8 $\Longrightarrow$ $A \cup B$ & $A \cap B$ Jordan-messbar
- f ist integrierbar auf A & B

  $\underset{29.9}{\Longrightarrow}$ f ist f.ü. stetig auf A & auf B

  $\Longrightarrow$ f ist f.ü. stetig auf $A \cup B$ und $A \cap B$

  $\underset{29.9}{\Longrightarrow}$ f ist int. auf $A \cup B$ und $A \cap B$
- 1. Fall: $A \cap B = \emptyset$ $\Longrightarrow$ $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

  Sei Q ein Quader mit $A \cup B \subseteq Q$.

$$\Longrightarrow \int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_Q f_{A \cup B}(x)\,dx = \int_Q f_A(x) + f_B(x)\,dx$$

$$= \int_Q f_A(x)\,dx + \int_Q f_B(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$$

$$= \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx - \underbrace{\int_{A \cap B} f(x)\,dx}_{= \int_{\emptyset} f(x)\,dx = 0}$$

- 2. Fall: A & B allgemein

$$\boxed{\int_{A\cup B} f} = \int_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)} f \overset{1.\text{ Fall}}{=} \int_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} f + \int_{A\cap B} f$$

$$\underset{1.\text{ Fall}}{=} \int_{A\setminus B} f + \int_{B\setminus A} f + \int_{A\cap B} f + \int_{A\cap B} f - \int_{A\cap B} f$$

$$\underset{1.\text{ Fall}}{=} \int_{(A\setminus B)\cup(A\cap B)} f + \int_{(B\setminus A)\cup(A\cap B)} f - \int_{A\cap B} f$$

$$= \boxed{\int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f} \qquad \square$$

Kor. 29.15

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar.

Dann gilt: $V(A\cup B) = V(A) + V(B) - V(A\cap B)$ ⊛

Insbesondere: $A \subseteq B \Rightarrow V(A) \leq V(B)$.

Beweis:

Wende 29.14 auf $f: A\cup B \to \mathbb{R};\ x \mapsto 1$ an $\Rightarrow$ ⊛

Sei nun $A \subseteq B$. $\Rightarrow$ $V(B) \overset{⊛}{=} V(A) + V(B\setminus A) - V(\emptyset)$

$$= V(A) + V(B\setminus A) \geq V(A) \qquad \square$$

F) Jordan-Nullmengen

Def. 29.16

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge.

Dann: B heißt Jordan-Nullmenge $:\Leftrightarrow$ $V(B) = 0$.

Lemma 29.17

Für $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sind $\circlearrowleft$:

ⓐ B ist eine Jordan-Nullmenge.

ⓑ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{k} V(Q_i) < \varepsilon$.

Beweis:

ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ: Sei also B eine Jordan-Nullmenge und $\varepsilon > 0$.

Sei Q ein Quader mit $B \subseteq Q$

$$\Rightarrow \int_Q 1_B \, dx = \int_B 1 \, dx = V(B) \overset{!}{=} 0$$

$$\Vert$$

$$\inf \{ OS(1_B, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } Q \}$$

$$\Rightarrow \exists Z \text{ Zerlegung von } Q: \quad OS(1_B, Z) - \overbrace{\int_Q 1_B \, dx}^{=0} < \varepsilon$$

$$\Vert$$

$$OS(1_B, Z)$$

$$\Vert$$

$$\sum_{P \in TQ(Z)} V(P) \cdot \underbrace{\sup_{x \in P} 1_B(x)}_{= \begin{cases} 1, & P \cap B \neq \emptyset \\ 0, & P \cap B = \emptyset \end{cases}} = \underbrace{\sum_{\substack{P \in TQ(Z) \\ P \cap B = \emptyset}} V(P)}$$

Zudem: $B \subseteq \bigcup_{\substack{P \in TQ(Z) \\ P \cap B \neq \emptyset}} P$

(b) ⇒ (a): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben

$$\overset{}{\underset{(b)}{\Longrightarrow}} \exists\, Q_1^\varepsilon, \dots, Q_{k_\varepsilon}^\varepsilon \text{ Quader}: \; B \subseteq \overset{\text{beschränkt}}{\bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} Q_i^\varepsilon} \text{ und } \sum_{i=1}^{k_\varepsilon} V(Q_i^\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\partial B \subseteq \overline{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} \overline{Q_i} \underbrace{=}_{Q_i \text{ abgeschl.}} \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} Q_i$$

$\Rightarrow$ ∂B ist eine Nullmenge $\wedge$ B ist beschränkt

$\underset{29.6}{\Rightarrow}$ B ist Jordan-meßbar

Zudem: $$V(B) \leq V\left(\bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} Q_i^\varepsilon\right) \leq \sum_{i=1}^{k_\varepsilon} V(Q_i^\varepsilon) < \varepsilon$$

$\underset{\varepsilon \text{ beliebig}}{\Longrightarrow}$ $V(B) = 0$ $\Rightarrow$ B ist Jordan-Nullmenge $\square$

Bem. 29.18:

Man kann in 29.17 auch mit dem Innern von Quadern oder mit Würfeln arbeiten wie 28.4.

Bsp. 29.19:

$B = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge, aber keine Jordan-Nullmenge!

Denn: $f : [0,1] \to \mathbb{R};\; x \mapsto \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ Dirichletsche Sprungfunktion

ist nicht Riemann-integrierbar

$\Rightarrow$ $\underbrace{1 - f}_{\mathbb{1}_B|_{[0,1]}}$ ist nicht Riemann-integrierbar $\Rightarrow$ B ist nicht Jordan-meßbar!

Kor. 29.20

ⓐ Jede Jordan-Nullmenge ist eine Nullmenge.

ⓑ Jede kompakte Nullmenge ist eine Jordan-Nullmenge.

ⓒ Jede Jordan-messbare Nullmenge ist eine Jordan-Nullmenge.

Beweis:

ⓐ 29.17   ⓑ 29.17 + 28.4   ⓒ ÜA. □

Bsp. 29.21

$[0,1] \times \{0\}$ ist kompakte NM $\overset{}{\underset{29.20}{\Longrightarrow}}$ $[0,1] \times \{0\}$ Jordan-NM

$\underset{29.17}{\Longrightarrow}$ $(0,1) \times \{0\}$ ist Jordan-NM und nicht kompakt

Bsp. 29.22:

$S^1 = \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R} \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$ ist nach 28.10 eine Nullmenge

und S^1 ist kompakt $\underset{29.20}{\Longrightarrow}$ S^1 ist Jordan-NM.

Satz 29.23

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann sind Ä:

ⓐ B ist Jordan-messbar.

ⓑ ∂B ist eine Nullmenge.

ⓒ ∂B ist eine Jordan-Nullmenge.

Beweis:

ⓐ $\Longleftrightarrow$ ⓑ: 29.6

ⓑ $\Longleftrightarrow$ ⓒ: Beachte: ∂B ist beschränkt + abgeschlossen,

also kompakt $\underset{29.6}{\Longrightarrow}$ Beh. □

G) Integrale und Jordan-Nullmengen

Prop. 29.24

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge und $f: B \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann ist f integrierbar auf B mit $\int_B f(x)\,dx = 0$.

Beweis:

- B Jordan-Nullmenge $\overset{29.20}{\Longrightarrow}$ B ist Nullmenge

  $\Rightarrow$ f ist f.ü. stetig auf B $\overset{\text{Lebesgue}}{\Rightarrow}$ f ist int. auf B

- MWS $\Longrightarrow$ $\underbrace{V(B)}_{=0} \cdot \inf_{x \in B} f(x) \leq \int_B f(x)\,dx \leq \underbrace{V(B)}_{=0} \cdot \sup_{x \in B} f(x)$

$$\Longrightarrow \int_B f(x)\,dx = 0$$

q.e.d.

Bem. 29.25

Wir können in 29.24 Jordan-NM nicht durch NM ersetzen! (siehe Bsp. 29.19)

Korollar 29.26

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ integrierbar auf B, $g: B \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\{x \in B \mid f(x) \neq g(x)\}$ sei Jordan-Nullmenge.

Dann: g ist integrierbar auf B mit $\int_B g(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx$.

Beweis:

Setze: $N := \{x \in B \mid f(x) \neq g(x)\}$ ist eine JN

$\overset{}{\underset{29.24}{\Longrightarrow}}$ $B \setminus N$ ist Jordan messbar und $f-g$ auf N integrierbar

$f-g \equiv 0$ auf $B \setminus N$

$\underset{29.14}{\Longrightarrow}$ $\int_B (f-g)(x)\,dx \overset{29.14}{=} \int_{B\setminus N} \underbrace{(f-g)(x)\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_N (f-g)(x)}_{=0} = 0 \wedge$ $f-g$ ist int. auf $\underbrace{(B \setminus N) \cup N}_{=B}$

$$\Rightarrow \quad g = \underbrace{f}_{\text{integrierbar auf } B} - (f-g) \quad \text{ist integrierbar auf } B$$

und

$$\int_B g(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx - \underbrace{\int_B (f-g)(x)\,dx}_{=0} = \int_B f(x)\,dx \qquad \square$$

Bsp. 29.27:

f int. auf B = Jordan-messbar & g beschränkt und $\{x \in B \mid f(x) \neq g(x)\}$ Nullmenge $\not\Rightarrow$ g integrierbar auf B

z.B.: g = Dirichletsche Sprungfunktion!

Bsp. 29.28:

$Q \subseteq \mathbb{R}$ Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ integrierbar auf Q

$$\underset{29.26}{\Rightarrow} \; g: Q \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in \mathring{Q} \\ 0, & x \in \partial Q \end{cases} \quad \text{ist integrierbar auf } Q$$

(da ∂Q als komp. Nullmenge eine Jordan NM ist)

Zudem: $\int_Q f(x)\,dx = \int_Q g(x)\,dx$

Kor. 29.29

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $A \cap B$ eine Jordan-Nullmenge, $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $A \cup B$.

Dann: $$\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$$

Beweis: 29.14 + 29.24 ∎

Bsp. 29.30:

Sei Z eine Zerlegung des Quaders $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $f: Q \to \mathbb{R}$ integrierbar auf Q.

$$\underset{29.29}{\Longrightarrow} \int_Q f(x)\,dx = \sum_{P \in TQ(Z)} \int_P f(x)\,dx$$

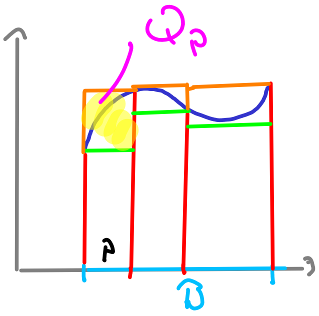
da $\bigcup_{P \in TQ(Z)} \partial P$ als kompakte Nullmenge eine Jordan-NM ist.

H) Das Prinzip von Cavalieri

Lemma 29.31

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f: B \to \mathbb{R}$ integrierbar.
Dann ist $\mathrm{Graph}(f) := \left\{ \binom{x}{f(x)} \mid x \in B \right\}$ eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis:



Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$

$\underset{Vor.}{\Longrightarrow}$ f_B ist integrierbar auf Q

$\underset{RIK}{\Longrightarrow}$ $\exists\, Z$ Zerlegung von Q: $OS(f_B, Z) - US(f_B, Z) < \varepsilon$

$$\| \quad \sum_{P \in TQ(Z)} V(P) \cdot \left(\sup_{z \in P} f(z) - \inf_{z \in P} f(z) \right)$$

Setze: $Q_P := P \times \left[\inf_{z \in P} f(z), \sup_{z \in P} f(z) \right] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Quader

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Graph}(f) \subseteq \mathrm{Graph}(f_B) \subseteq \bigcup_{P \in TQ(Z)} Q_P$$

$$\text{und} \quad \sum_{P \in TQ(Z)} V(Q_P) = OS(f_B, Z) - US(f_B, Z) < \varepsilon$$

$$\underset{29.17}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{Graph}(f) \text{ eine Jordan-Nullmenge.} \qquad \square$$

Bsp. 29.32:

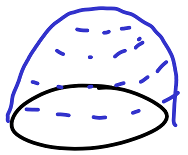
$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1, \ z \geq 0 \right\} \overset{!}{=} \mathrm{Graph}(f)$$

$$\text{mit} \quad f : \overline{\underset{\substack{\shortparallel \\ \text{Kreisscheibe}}}{U_1(0,0)}} \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\text{Kreisscheibe} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

stetig auf einer kompakten Jordan-messbaren Menge, also integrierbar!

$\Longrightarrow$ M ist Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^3$.

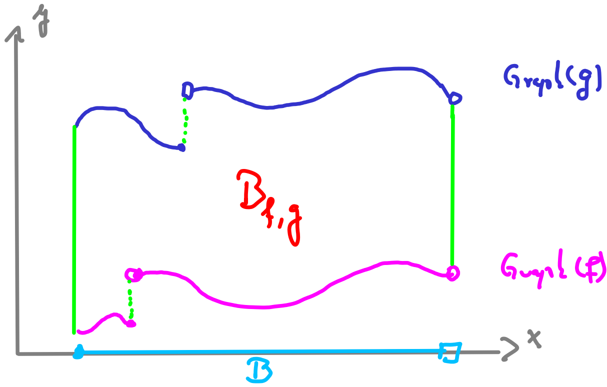


Satz 29.33 (Prinzip von Cavalieri)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f, g : B \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in B$.

Dann ist $B_{f,g} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in B, \ f(x) \leq y \leq g(x) \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar mit

$$V(B_{f,g}) = \int_B g(x) - f(x) \, dx.$$



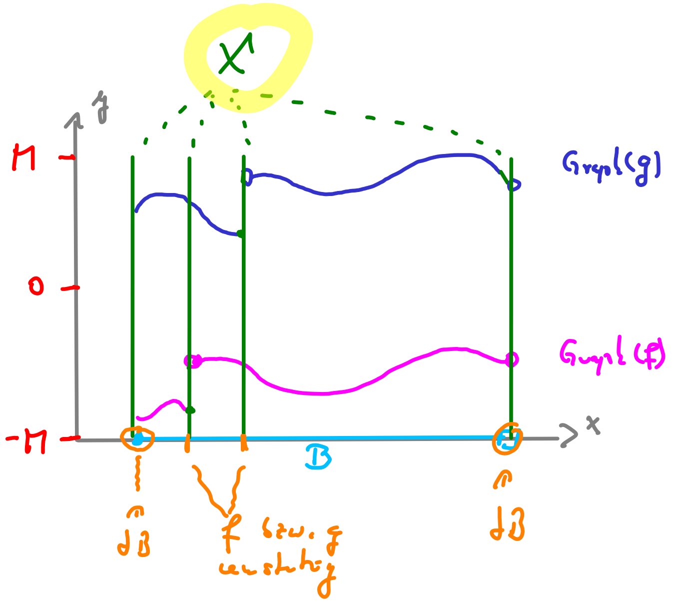
Beweis:

① Zeige: $B_{f,g}$ ist Jordan-messbar, d.h. $\partial B_{f,g}$ ist eine Nullmenge

Setze: · $M := \max\left\{\sup_{x\in B}|f(x)|, \sup_{x\in B}|g(x)|\right\}$

· $N := \partial B \cup \left\{x\in B \mid f \text{ oder } g \text{ unstetig in } x\right\}$

· $X := \left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{matrix} x\in N \\ -M\le y\le M\end{matrix}\right\}$



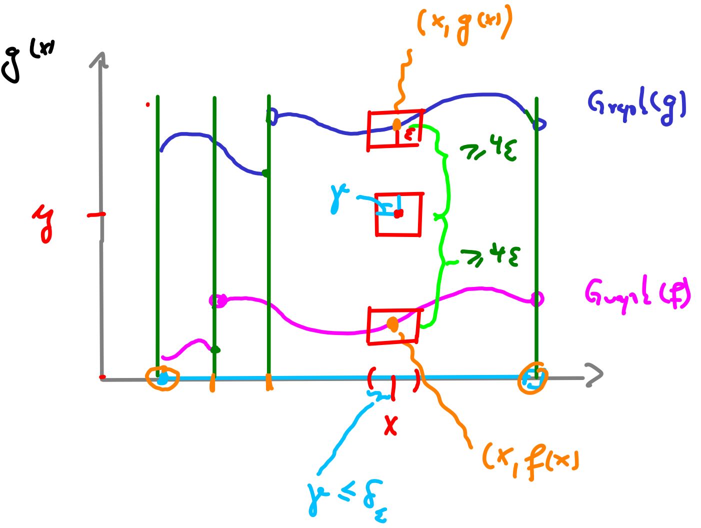
Beh: $\partial B_{f,g} \subseteq X \cup \text{Graph}(f) \cup \text{Graph}(g)$

Es reicht zu zeigen:

$\binom{x}{y}\in B_{f,g}$ mit $x\in \mathring{B}$ und $f(x)<y<g(x)$

$\Longrightarrow \binom{x}{y}\in \mathring{B}_{f,g}$

Setze: $\varepsilon := \dfrac{\min\{y-f(x), g(x)-y\}}{2} > 0$



f & g stetig in x

$\Longrightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall z\in B$ mit $\|z-x\|_\infty < \delta_\varepsilon$ gilt: $\left.\begin{matrix}|f(z)-f(x)| \\ |g(z)-g(x)|\end{matrix}\right\} < \varepsilon$

Beachte: $x\in\mathring{B} \Longrightarrow$ o.E.: $U^{\|\cdot\|_\infty}_{\delta_\varepsilon}(x) \subseteq B$

Setze: $\gamma := \min\{\delta_\varepsilon, \varepsilon\}$

$\Longrightarrow U^{\|\cdot\|_\infty}_{\gamma}\left(\binom{x}{y}\right) = \left\{\binom{z}{u}\in\mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|z-x\|_\infty<\gamma,\ |u-y|<\gamma\right\} \subseteq B_{f,g}$

denn: $\binom{z}{u} \Longrightarrow \|z-x\|_\infty < \gamma \le \delta_\varepsilon \Longrightarrow z\in B$

$\Longrightarrow u\in(y-\gamma, y+\gamma) \subseteq (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subseteq (f(z), g(z))$

Beh: X' ist eine Nullmenge.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vor.} \Rightarrow B \text{ ist Jordan-messbar} \Rightarrow \partial B \text{ ist NM} \\ \Rightarrow f \,\&\, g \text{ integrierbar} \underset{\text{Lebesgue}}{\Rightarrow} \{x \mid f \text{ oder } g \text{ unstetig in } x\} \text{ ist NM} \end{array}\right\} \Rightarrow N \text{ ist eine NM im } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \exists\, (Q_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ Quader im } \mathbb{R}^n: \; N \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} Q_m \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$$

Setze: $P_m := Q_m \times [-M, M]$ Quader im $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Rightarrow \quad X' \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} P_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty} V(P_m) = \sum_{m=0}^{\infty} V(Q_m) \cdot 2M < \varepsilon$$

Also: X' ist eine Nullmenge!

Damit: $28.31 \Rightarrow X' \cup \mathrm{Graph}(f) \cup \mathrm{Graph}(g)$ ist Nullmenge

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$\Rightarrow \quad \partial B_{f,g}$ ist eine Nullmenge

$\Rightarrow \quad B_{f,g}$ ist Jordan-messbar!

② Zeige: $V(B_{f,g}) = \int_B g(x) - f(x)\, dx$

Wähle einen Quader Q im $\mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ und setze

$$P := Q \times [-M, M] \quad , \quad \text{d.h.} \quad B_{f,g} \subseteq P$$

Dann:
- $\mathbb{1}_{B_{f,g}}$ ist integrierbar auf P, da $B_{f,g}$ Jordan-messbar
- $\forall\, x \in Q: \; [-M, M] \longrightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \mathbb{1}_{B_{f,g}}(x,y)$ ist stückweise stetig, also integrierbar

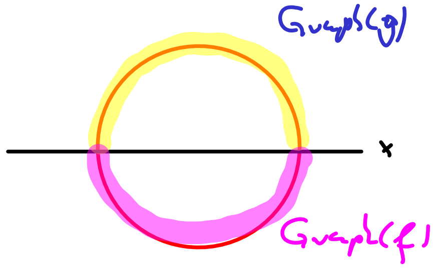
$$\underset{\text{Fubini}}{\overset{27.22}{\Longrightarrow}} \quad V(B_{f,g}) = \int_P \mathbb{1}_{B_{f,g}}(x,y)\, d(x,y) \overset{27.22}{=} \int_Q \int_{-M}^{M} \mathbb{1}_{B_{f,g}}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_Q \int_{f_B(x)}^{g_B(x)} 1\, dy\, dx = \int_Q g_B(x) - f_B(x)\, dx = \int_B g(x) - f(x)\, dx \quad \blacksquare$$

Bsp. 29.34

29.7 $\Longrightarrow$ $\overline{\mathcal{U}_1^{\|\cdot\|_2}\left(\binom{0}{0}\right)} = D = \left\{ \binom{x}{y} \,\middle|\, x^2+y^2 \le 1 \right\}$ = Kreisscheib

$\|$ ist Jordan-messbar



$B_{f,g}$ mit $f:[-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$

$g:[-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$$\Longrightarrow V(D) = \int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 2 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= t \cdot \sqrt{1-t^2} + \arcsin(t) \Big|_{-1}^{1} = \pi$$

I) Der Satz von Fubini für Normalbereiche

Def. 29.35

Sei $i_1, \dots, i_n$ eine Permutation der Zahlen $1, \dots, n$.

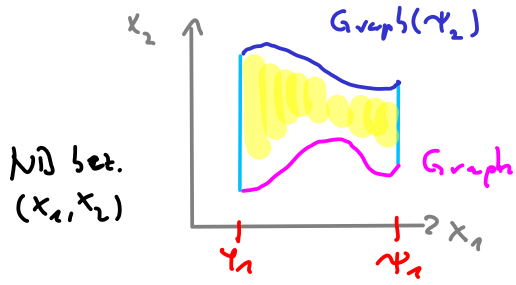
Ein Normalbereich bez. $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

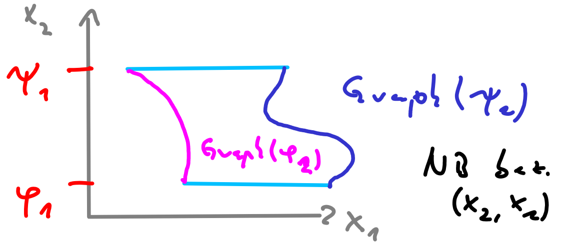
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall j = 1, \dots, n : \varphi_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_{j-1}}) \le x_{i_j} \le \psi_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_{j-1}}) \right\},$$

wobei $\varphi_1, \psi_1 \in \mathbb{R}$ und φ_j, ψ_j stetige Fkt. auf geeigneten Kompakta mit $\varphi_j \le \psi_j$ punktweise für alle $j = 1, \dots, n$.

Notation: $B = NB(\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n)$.

Bsp.:





Prop. 29.36

Normalbereiche sind kompakt und Jordan-messbar.

Beweis:

o.E.: $i_j = j \quad \forall j = 1,\dots,n$ und $B = NB(\varphi_1,\psi_1,\dots,\varphi_n,\psi_n) \subseteq \mathbb{R}^n$

Sei $k \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow \quad \tilde{B} := NB(\varphi_1,\psi_1,\dots,\varphi_{k-1},\psi_{k-1}) \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$

$\underset{29.33}{\Rightarrow} \quad \tilde{B}_{\varphi_k,\psi_k} = NB(\varphi_1,\psi_1,\dots,\varphi_k,\psi_k) \subseteq \mathbb{R}^k$

Beachte: $NB(\varphi_1,\psi_1) = [\varphi_1,\psi_1]$ ist Jordan-messbar

$\underset{29.33}{\Rightarrow} \quad NB(\varphi_1,\dots,\psi_2)$ ist Jordan-messbar $\underset{29.33}{\overset{\text{Ind.}}{\Rightarrow}} \underset{\substack{\| \\ B}}{NB(\varphi_1,\dots,\psi_n)}$ Jordan-messbar

Zudem: $NB(\varphi_1,\psi_1) = [\varphi_1,\psi_1]$ ist kompakt

$\underset{\varphi_2,\psi_2 \text{ stetig}}{\overset{HD}{\Rightarrow}} \quad NB(\varphi_1,\dots,\psi_2]$ ist abgeschlossen & beschränkt, also kompakt

$\overset{\text{Ind.}}{\Rightarrow} \quad B = NB(\varphi_1,\dots,\psi_n)$ ist kompakt

Satz von Fubini für Normalbereiche 29.37

Sei $B = NB(\varphi_1,\dots,\psi_n)$ ein Normalbereich bzgl. $(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ und $f: B \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann:

$$\int_B f(x)\,dx = \int_{\varphi_1}^{\psi_1}\int_{\varphi_2(x_{i_1})}^{\psi_2(x_{i_1})}\cdots\int_{\varphi_n(x_{i_1},\dots,x_{i_{n-1}})}^{\psi_n(x_{i_1},\dots,x_{i_{n-1}})} f(x)\,dx_{i_n}\cdots dx_{i_2}\,dx_{i_1}.$$

Beweis:

· 29.36 $\Rightarrow$ B ist kompakt & J-messbar $\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow}$ f integrierbar auf B

- o.E: $i_j = j \quad \forall j = 1, \dots, n$

- Induktion nach n:

$n=1$: $B = [\varphi_1, \psi_1]$ und die Aussage ist richtig

$n>1$: Sei $Q = [a,b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $B \subseteq Q \wedge \begin{matrix} a_1 = \varphi_1 \\ b_1 = \psi_1 \end{matrix}$.

Sei $x_1 \in [\varphi_1, \psi_1] = [a_1, b_1]$ fest gegeben

Setze $B' := \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} \middle| \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \leq x_j \leq \psi_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \quad \forall j = 2, \dots, n \right\}$

$= NB(\varphi_2(x_1), \psi_2(x_1), \dots, \varphi_n(x_1, \cdot), \psi_n(x_1, \cdot))$

$\subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ist ein NB

Zudem: $Q' = [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Quader mit $B' \subseteq Q'$

$\underset{f \text{ stetig}}{\overset{29.36}{\Rightarrow}}$ $B' \xrightarrow{f'} \mathbb{R} : x' \longmapsto f(x_1, x')$ ist stetig und B' Jordan-messbar und kompakt

$\Rightarrow$ f' ist integrierbar auf B'

$\Rightarrow$ $(f')_B : Q' \longrightarrow \mathbb{R} : x' \longmapsto f_B(x_1, x')$ ist int. auf Q'

Zudem: f int. auf B $\Rightarrow$ f_B int. auf Q

$$\underset{\text{Fubini für Quader}}{\Rightarrow} \int_Q f_B(x)\,dx = \int_{\varphi_1}^{\psi_1} \int_{Q'} \underbrace{f_B(x_1, x')}_{(f')_B(x')} dx'\,dx_1$$

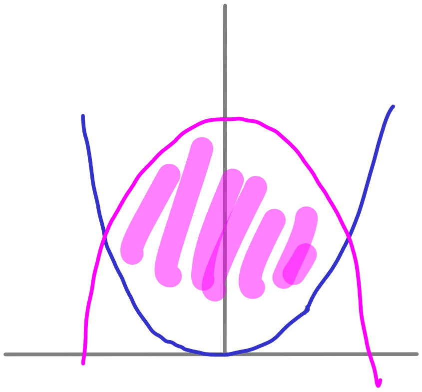
$$= \int_{\varphi_1}^{\psi_1} \int_{B'} \underbrace{f(x_1, x')}_{\overset{\shortparallel}{f'(x')}} dx'\,dx_1 \underset{\text{Ind}}{=} \int_{\varphi_1}^{\psi_1} \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} \cdots \int_{\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x)\,dx_n \cdots dx_2\,dx_1$$

Bsp. 29.38:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| -1 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 2 - x^2 \right\}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto y$$

$$\Rightarrow \int_B f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\int_{x^2}^{2-x^2} y \, dy}_{} \, dx$$



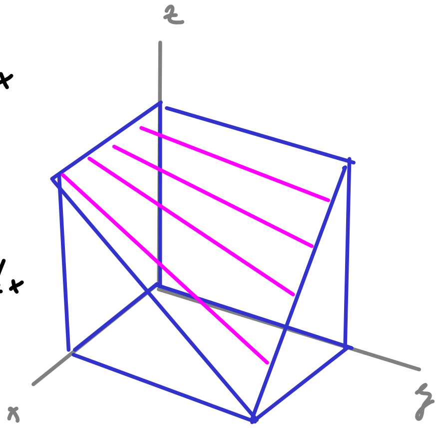
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 - x^4 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot 4x - \frac{4}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(4 - \frac{4}{3}\right) + \left(4 - \frac{4}{3}\right) \right) = \frac{8}{3}$$

Bsp. 29.39:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2, \ 0 \leq z \leq 2 - x \cdot y \right\}$$

$$\Rightarrow V(B) = \int_B 1 \, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-xy} 1 \, dz \, dy \, dx$$



$$= \int_0^1 \int_0^2 z \Big|_0^{2-xy} dy \, dx = \int_0^1 \int_0^2 2 - xy \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 2y - \frac{xy^2}{2} \Big|_0^2 dx = \int_0^1 4 - 2x \, dx = 4x - x^2 \Big|_0^1 = 4 - 1 = 3$$

§ 30 Der Transformationssatz für Integrale

A) Diffeomorphismen

Bem. 30.1

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\varphi'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ O.E. $\varphi'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ · φ streng monoton wachsend und injektiv

- $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$
- $\varphi(\partial [a,b]) = \varphi(\{a,b\}) = \{\varphi(a), \varphi(b)\} = \partial \varphi([a,b])$
- $\varphi(\mathring{[a,b]}) = \varphi((a,b)) = (\varphi(a), \varphi(b)) = \mathring{\big(\varphi([a,b])\big)}$

§ 26 $\Rightarrow$ · φ wie oben ist ein Diffeomorphismus

- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:
  - $\det D\varphi(x) \neq 0$ statt $\varphi'(x) \neq 0$
  - liefert nur noch lokaler Diffeo., injektiv fehlt

Prop. 30.2

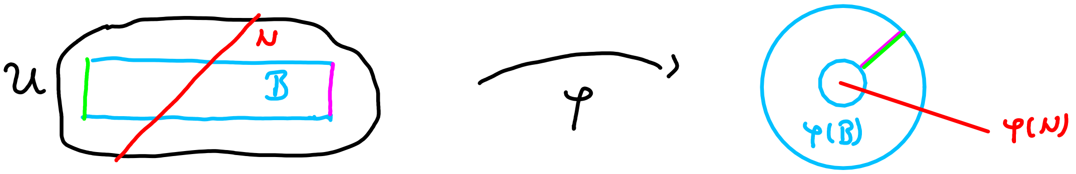
Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $B \subseteq \mathcal{U}$ Jordan-messbar und kompakt.

Dann ist $\varphi(B)$ Jordan-messbar, kompakt und $\partial \varphi(B) = \varphi(\partial B)$.

Lemma 30.3

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, N eine abgeschlossene Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, $B \subseteq \mathcal{U}$ Jordan-messbar und kompakt, φ lok. Diffeo. auf $\mathring{B} \setminus N$.

Dann ist $\varphi(B)$ Jordan-messbar, kompakt und $\partial \varphi(B) \subseteq \varphi(\partial B) \cup \varphi(N \cap B)$.



Beweis:

- B kompakt & φ stetig $\Longrightarrow$ $\varphi(B)$ kompakt

- B kompakt & ∂B abgeschl. in B $\Longrightarrow$ ∂B kompakt
  B Jordan-messbar $\Longrightarrow$ ∂B ist Nullmenge

  $$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \underset{28.9}{\overset{\varphi \in C^1}{\Longrightarrow}} \varphi(\partial B) \text{ ist eine kompakte Nullmenge } (*)$$

- $N \cap B$ ist abgeschl. in B, da N abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$

  $\Longrightarrow$ $N \cap B$ ist kompakt und eine Nullmenge

  B beschränkt als komp. Menge & N eine NM

  $\underset{\varphi \in C^1}{\overset{28.9}{\Longrightarrow}}$ $\varphi(N \cap B)$ ist eine kompakte Nullmenge $(**)$

- Es reicht zu zeigen: $\partial \varphi(B) \subseteq \underbrace{\varphi(\partial B) \cup \varphi(N \cap B)}_{\text{Nullmengen wegen } (*)\,(**)}$

  ($\Longrightarrow$ $\partial \varphi(B)$ ist eine Nullmenge $\Longrightarrow$ $\varphi(B)$ Jordan-mb.)

Dazu: $\mathring{B} \setminus N = \underbrace{\mathring{B} \cap (\mathbb{R}^n \setminus N)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n}$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

$\underset{\substack{\varphi \text{ lok. Diffeo.} \\ \text{auf } \mathring{B} \setminus N}}{\xrightarrow{26.22}}$ $\varphi(\mathring{B} \setminus N)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ $\varphi(\mathring{B} \setminus N) \subseteq \mathring{\overline{\varphi(B)}}$

$\Longrightarrow$ $\varphi(\mathring{B} \setminus N) \cap \partial \varphi(B) = \emptyset$

Beachte: $\varphi(B)$ kompakt $\Longrightarrow$ $\partial \varphi(B) \subseteq \varphi(B)$

Sei $y \in \partial \varphi(B)$ $\Longrightarrow$ $\exists\, x \in B: y = \varphi(x)$

$\Longrightarrow$ $x \notin \mathring{B} \setminus N$ $\Longrightarrow$ $x \in \partial B \cup (N \cap B)$

$\Longrightarrow$ $y = \varphi(x) \in \varphi(\partial B \cup (N \cap B)) = \varphi(\partial B) \cup \varphi(N \cap B)$ $\square$

Beweis von 30.2:

Setze: $N := \emptyset$ $\underset{\text{Vor. 30.2}}{\Longrightarrow}$ Vor. von 30.3 sind erfüllt

$\Rightarrow$ $\varphi(B)$ ist Jordan-messbar und kompakt

und $(*)$ $\partial\varphi(B) \subseteq \varphi(\partial B) \cup \underbrace{\varphi(N \cap B)}_{=\emptyset} = \varphi(\partial B)$

Zeige noch: $\varphi(\partial B) \subseteq \partial\varphi(B)$

φ Diffeo. $\Rightarrow$ $\exists\, \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist C^1,

sogar ein Diffeomorphismus

mit dem schon gezeigten $\Longrightarrow$

$$\underset{\partial B}{\underset{\|}{\partial\varphi^{-1}(\varphi(B))}} \subseteq \underset{\varphi^{-1}(\varphi(\partial B)) = \partial B}{\underset{\cap\!| \ (*)}{\varphi^{-1}(\partial\varphi(B))}}$$

$\Rightarrow$ $\partial B = \varphi^{-1}(\partial\varphi(B))$

$\Rightarrow$ $\varphi(\partial B) = \varphi(\varphi^{-1}(\partial\varphi(B))) = \partial\varphi(B)$

$\square$

Bsp. 30.4

$\underset{(a_1|\cdots|a_n)}{\underset{\|}{A}} \in Gl_n(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $f_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto A \circ x$

ist ein Diffeomorphismus mit $Df_A(x) = A$

Setze: $W := [0,1] \times \cdots \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Würfel

$\Rightarrow$ W ist Jordan-messbar & kompakt

$\Rightarrow$ $f_A(W) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid 0 \le \lambda_i \le 1\ \forall i\} = \underset{\text{das Parallelotop, das von } a_1, \dots, a_n \text{ aufgespannt wird}}{\underset{\|}{P(a_1, \dots, a_n)}}$

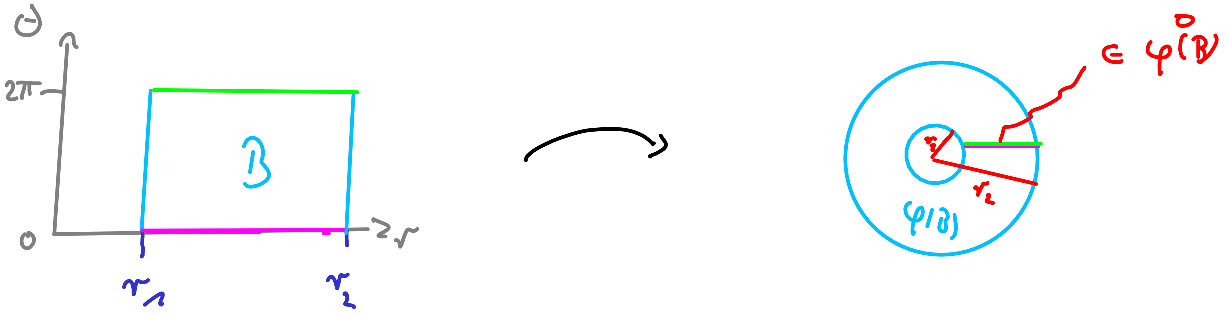
ist Jordan-messbar und kompakt

Bem. 30.5

- $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$ Polarkoordinaten

  ist stetig diffbar auf $\mathbb{R}^2$ und ein lok. Diffeo. auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$, aber nicht injektiv auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

- $B = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi]$, $r_2 > r_1 > 0$, ist Jordan-meß. & kompakt und φ ist lok. Diffeom. auf B



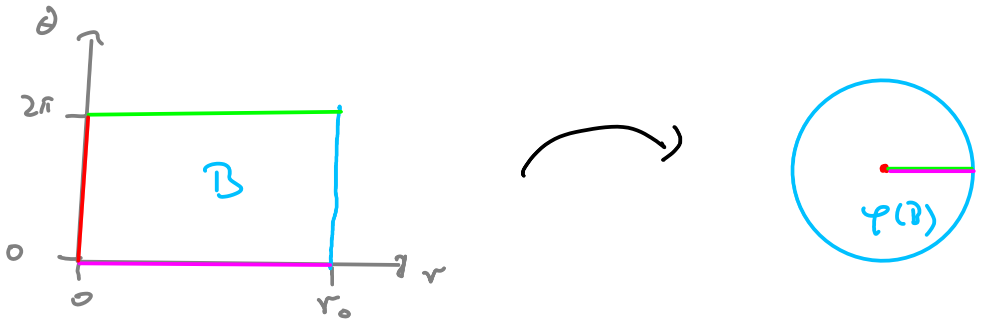
$$\xRightarrow[30.3]{N \neq \emptyset} \qquad \partial\varphi(B) \subsetneq \varphi(\partial B)$$

- $\tilde{B} := [0, r_0] \times [0, 2\pi]$, $r_0 > 0$, ist Jordan-meß. & kompakt

  $N := \{0\} \times \mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene NM in $\mathbb{R}^2$

  φ ist ein lok. Diffeo. auf $\tilde{B} \setminus N$

$$\underset{30.3}{\Longrightarrow} \qquad \partial\varphi(B) \subsetneq \varphi(\partial B) \cup \varphi(N \cap B)$$



B) Der Transformationssatz für Integrale

Bem. 30.6 (Substitutionsregel)

$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.bar, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

$$\parallel \rightsquigarrow \boxed{\varphi'(x) > 0 \ \forall x} \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\int_{\varphi([a,b])} f(x)\,dx \qquad\qquad \int_{[a,b]} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

Allgemeiner für $\varphi'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$

$$\int_{\varphi([a,b])} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\,dx$$

Ziel:

$$\boxed{\int_{\varphi(B)} f(x)\,dx = \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx}$$

Transformationssatz für Integrale 30.7

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeom. mit $\det(D\varphi(x))$ stets positiv oder stets negativ, $B \subseteq U$ Jordan-messbar & kompakt, $f : \varphi(B) \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $\varphi(B)$ Jordan-messbar, f integrierbar und

$$\boxed{\int_{\varphi(B)} f(x)\,dx = \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx}$$

Bemerkung 30.8 (Allgemeiner Transformationssatz)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, N Jordan-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, φ injektiv auf $\mathcal{U} \setminus N$ und $\det(D\varphi(x))$ stets positiv oder stets negativ auf $\mathcal{U} \setminus N$, $B \subseteq \mathcal{U}$ Jordan-mb & kompakt, $f : \varphi(B) \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $\varphi(B)$ Jordan-messbar, f integrierbar und

$$\int_{\varphi(B)} f(x)\,dx = \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx$$

Lemma 30.9

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ lokaler Diffeom. und $C \subseteq \mathcal{U}$ konvex, dann: $\forall x, y \in C : 0 < \det(D\varphi(x)) \cdot \det(D\varphi(y))$

Beweis:

Seien $x, y \in C \overset{C \text{ konvex}}{\Longrightarrow} \overline{xy} \subseteq C$

$\Rightarrow h : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \det\big(D\varphi(x + t\cdot(y-x))\big)$

ist stetig mit $h(0) = \det(\underset{\neq 0}{D\varphi(x)})$, $h(1) = \det(\underset{\neq 0}{D\varphi(y)})$

Ang.: $h(0) \cdot h(1) < 0$

$\underset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists\, t \in (0,1) : h(t) = 0$ ↯ φ lok. Diff.

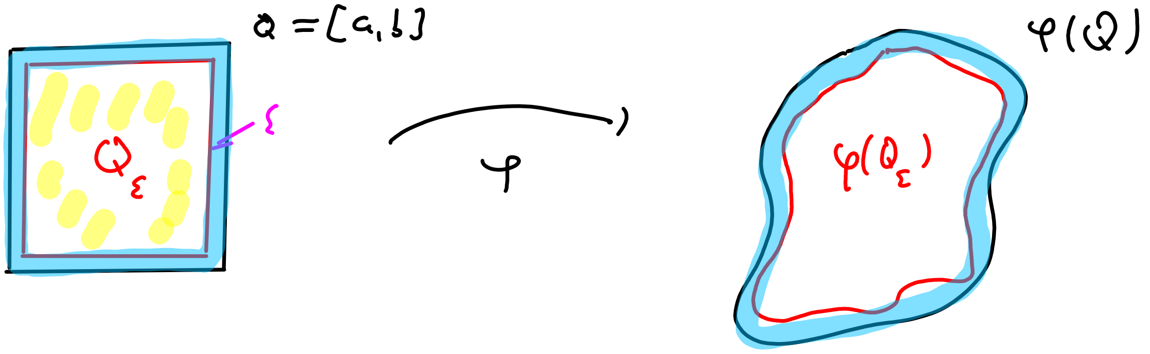
$\square$

Kor. 30.10 (Transformationssatz für Integrale auf Quadern)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, $Q \subseteq \mathcal{U}$ ein Quader, φ ein Diffeom. auf $\mathring{Q}$ und $f : \varphi(Q) \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann:
$$\boxed{\int_{\varphi(Q)} f(x)\,dx = \int_Q f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx.}$$

Beweis:



Bemerkung: $h: Q \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(\varphi(x))\cdot|\det(D\varphi(x))|$

ist stetig auf Q $\Longrightarrow$ h ist integrierbar auf Q

Setze: $Q_\varepsilon := [a_1+\varepsilon, b_1-\varepsilon]\times\dots\times[a_n+\varepsilon, b_n-\varepsilon] \subsetneq Q$, $\varepsilon>0$

$$\Longrightarrow V(Q_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i-3\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} V(Q)$$

$$\Longrightarrow \begin{tikzcd} \inf_{x\in Q} h(x)\cdot(V(Q)-V(Q_\varepsilon)) \arrow[d, "\varepsilon\to0"] & \le \int_{Q\setminus Q_\varepsilon} h(x)\,dx \le \arrow[dd, "\varepsilon\to0"] & \sup_{x\in Q} h(x)\cdot(V(Q)-V(Q_\varepsilon)) \arrow[d, "\varepsilon\to0"] \\ 0 \arrow[r, Rightarrow] & & 0 \arrow[l, Rightarrow] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \int_{Q_\varepsilon} h(x)\,dx = \int_Q h(x)\,dx - \int_{Q\setminus Q_\varepsilon} h(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} \int_Q h(x)\,dx$$

$\overset{!}{\|}$ 30.7

$$\int_{\varphi(Q_\varepsilon)} f(x)\,dx \xrightarrow[?]{\varepsilon\to0} \int_{\varphi(Q)} f(x)\,dx$$

Bemerkung:
- φ stetig diffbar, Q konvex & kompakt $\Longrightarrow$ φ Lipschitz-stetig mit Konst. $q>0$
- $W = \overline{U_r^{\|\cdot\|_\infty}(a)} \Longrightarrow \varphi(W) \subseteq U_{q\cdot r}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(a))$

$\Longrightarrow V(\varphi(W)) \le q^n\cdot V(W)$ ⊛

- offenbar: $\exists\ W_1, \dots, W_k$ Würfel : $Q \setminus Q_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} W_i$
(siehe Prop 28.4ⓒ)
mit $\sum_{i=1}^{k} V(W_i) \leq 2^n \cdot V(Q \setminus Q_\varepsilon)$ $(**)$

$$\Rightarrow \varphi(Q) \setminus \varphi(Q_\varepsilon) \subseteq \varphi(Q \setminus Q_\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \varphi(W_i)$$

$$\Rightarrow V(\varphi(Q) \setminus \varphi(Q_\varepsilon)) \leq \sum_{i=1}^{k} V(\varphi(W_i))$$

$$\underset{(*)}{\leq} q^n \cdot \sum_{i=1}^{k} V(W_i) \underset{(**)}{\leq} q^n \cdot 2^n \cdot V(Q \setminus Q_\varepsilon)$$

$$\leq q^n \cdot 2^n \cdot \underbrace{(V(Q) - V(Q_\varepsilon))}_{\downarrow\ \varepsilon \to 0 \atop 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} V(\varphi(Q) \setminus \varphi(Q_\varepsilon)) = 0$$

$$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \inf_{x \in \varphi(Q)} f(x) \underbrace{V(\varphi(Q) \setminus \varphi(Q_\varepsilon))}_{\downarrow\ \varepsilon \to 0 \atop 0} \leq \int_{\varphi(Q) \setminus \varphi(Q_\varepsilon)} f(x)\,dx \leq \sup_{x \in \varphi(Q)} f(x) \underbrace{V(\varphi(Q) \setminus \varphi(Q_\varepsilon))}_{\downarrow\ \varepsilon \to 0 \atop 0}$$

$$\searrow \quad \Big\downarrow \varepsilon \to 0 \quad \swarrow$$

$$0$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi(Q_\varepsilon)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(Q)} f(x)\,dx - \int_{\varphi(Q) \setminus \varphi(Q_\varepsilon)} f(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{Q} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$! ist gezeigt

$\square$

C) Anwendungen des Transformationssatzes

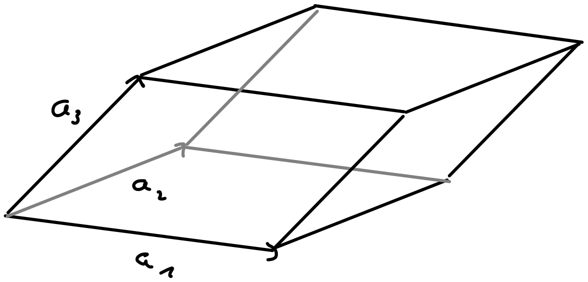
Bsp. 30.11

$A = (a_1|\dots|a_n) \in GL_n(\mathbb{R})$, $W = [0,1]^n$ = Würfel

$P = P(a_1,\dots,a_n)$ = Parallelotop zu A $= f_A(W)$, f_A ist Diffeom.

$$V(P) = \int_{f_A(W)} 1\,dx \overset{TS}{=} \int_W |\underbrace{\det(Df_A(x))}_{=\det(A)}|\,dx$$

$$= \int_W |\det(A)|\,dx = |\det(A)|$$

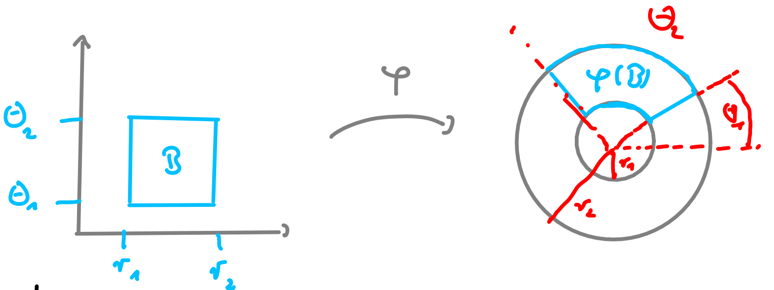


Bsp. 30,12 (Polarkoordinaten)

- $\varphi:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \binom{r}{\theta} \longmapsto \binom{r\cdot\cos(\theta)}{r\cdot\sin(\theta)}$ ist ein Diffeo. auf $\mathcal{U} = (0,\infty)\times(0,2\pi)$

  mit $\det(D\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\cdot\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cdot\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cdot(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) = r > 0$ auf $\mathcal{U}$

- $B = [r_1,r_2]\times[\Theta_1,\Theta_2] \subseteq \mathcal{U}$



$$\int_{\varphi(B)} f(x,y)\,d(x,y) \underset{TS}{=} \int_B f(\varphi(r,\theta))\cdot|\det D\varphi(r,\theta)|\,d(r,\theta)$$

$$= \int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cdot\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta))\cdot r\,dr\,d\theta$$ für $f: B\to\mathbb{R}$ stetig!

$$\Rightarrow V(\varphi(B)) = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\int_{r_1}^{r_2} r\,dr\,d\theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{r^2}{2}\Big|_{r_1}^{r_2}\,d\theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{r_2^2-r_1^2}{2}\,d\theta = (\Theta_2-\Theta_1)\cdot\frac{r_2^2-r_1^2}{2}$$

- $B = [0,r_0]\times[0,2\pi] \Rightarrow \mathring{B} \subseteq \mathcal{U}$ und $\varphi(B)$ = Kreisscheibe um 0 mit Radius r_0

$$\Rightarrow V(\varphi(B)) = \int_{\varphi(B)} 1\,dx \underset{\text{für Ränder}}{\overset{}{\underset{TS}{=}}} \int_B r\,d(\theta,r) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} r\,dr\,d\theta = \frac{r_0^2}{2}\cdot 2\pi = r_0^2\cdot\pi$$

Bsp. 30.13 (Zylinderkoordinaten)

$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$ ist ein Diffeom. auf $U = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

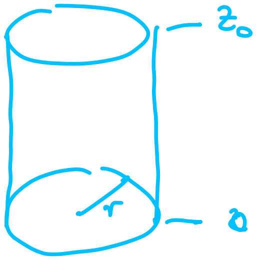
mit $\det D\varphi(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$ auf U

Für $Q = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [z_1, z_2]$ mit $\mathring{Q} \subseteq U$ und f stetig gilt:

$$\int_{\varphi(Q)} f(x,y,z) \, d(x,y,z) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), z) \cdot r \, dz \, d\theta \, dr$$

Insbesondere: für den Zylinder $Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 \leq r_0^2, \ 0 \leq z \leq z_0 \right\}$ gilt:

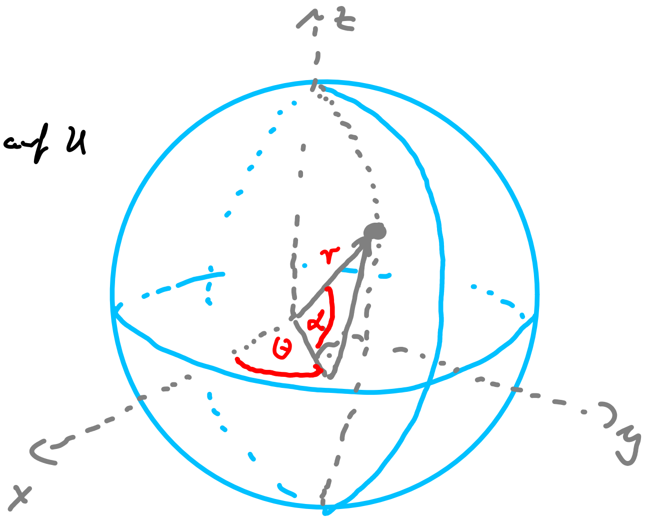
$$V(Z) = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{z_0} r \, dz \, d\theta \, dr = z_0 \cdot r_0^2 \cdot \pi$$



Bsp. 30.14 (Kugelkoordinaten)

$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \alpha \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ ist ein Diffeom. auf $U = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

mit $\det(D\varphi(r,\theta,\alpha)) = r^2 \cdot \cos(\alpha) > 0$ auf U



Für $Q = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\alpha_1, \alpha_2]$ mit $\mathring{Q} \subseteq \mathcal{U}$ und f stetig:

$$\int_{\varphi(Q)} f(x,y,z)\, d(x,y,z) =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(r\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\alpha),\ r\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\alpha),\ r\cdot\sin(\alpha)) \cdot r^2 \cdot \cos(\alpha)\, d\alpha\, d\theta\, dr$$

Insbesondere: $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\ x^2+y^2+z^2 \leq r_0^2 \right\}$ = Kugel von Radius r_0

$$V(K) = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos(\alpha)\, d\alpha\, d\theta\, dr = \frac{4 \cdot r_0^3 \cdot \pi}{3}$$

D) Beweis des Transformationssatzes 30.7

Transformationsatz für Integrale 30.7

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeom. mit $\det(D\varphi(x))$ stets positiv oder stets negativ, $B \subseteq \mathcal{U}$ Jordan-messbar & kompakt, $f : \varphi(B) \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $\varphi(B)$ Jordan-messbar, f integrierbar und

$$\boxed{\int_{\varphi(B)} f(x)\, dx = \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\, dx} \qquad \circledast$$

Beweisschritte

① $\varphi(B)$ ist kompakt & Jordan-messbar + Integrale in ⊛ existieren!

② Gilt ⊛ für Quader B, dann für alle B kompakt & Jordan-ms.

③ $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_n(x))^t \Longrightarrow$ ⊛ gilt.

④ U offener Quader, B Quader, $\varphi = \beta \circ \gamma$ mit β & γ Diffeom.
und $\beta(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_n(x))^t$, $\gamma(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), x_n)^t$,
zudem gelte 30.7 in $\mathbb{R}^{n-1}$ $\Longrightarrow$ ⊛ gilt

⑤ Zerlegungssatz: lokal besitzt φ eine Zerlegung wie in ④

⑥ ⊛ gilt in 30.7

Generalvoraussetzung: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, d.h. $U_\varepsilon(a) =$ Würfel

Zu ①: Zeige: $\varphi(B)$ kompakt & Jordan-messbar + Integrale in ⊛ existieren

- 30.2 $\Longrightarrow$ $\varphi(B)$ kompakt & Jordanmessbar

$$\underset{\substack{f \text{ stetig} \\ \text{auf } \varphi(B)}}{\Longrightarrow} \quad f \text{ ist integrierbar auf } \varphi(B), \quad \text{d.h.} \int_{\varphi(B)} f(x)\,dx \text{ existiert}$$

- B kompakt & Jordan-ms. + $B \to \mathbb{R} : x \mapsto f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|$ ist stetig

$$\Longrightarrow \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))| \, dx \text{ existiert}$$

∎

Zu ⑥: Zeige: $\circledast$ gilt (unter der Ann., dass ①–⑤ gelten)

- ② $\Rightarrow$ o.E.: B ist ein Quader

- Induktion nach n:

$n = 1$: Substitutionsformel 20.15 + Bem. 30.6

$n-1 \mapsto n$: Ind.vor. $\Rightarrow$ 30.7 gilt schon im $\mathbb{R}^{n-1}$

⑤ $\Rightarrow \forall x \in B \; \exists V_x =$ Umgebung von x : auf V_x hat φ eine Zerlegung wie in ④

Beachte: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty \Rightarrow$ o.E.: V_x ist ein offener Würfel

$\Rightarrow$ $B \subseteq \bigcup_{x \in B} V_x$ ist eine offene Überdeckung

$\underset{B \text{ kompakt}}{\Rightarrow}$ $\exists x_1, \dots, x_k \in B : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}$

$\overset{28.13}{\underset{B \text{ Quader}}{\Rightarrow}}$ $\exists$ Zerlegung Z von B : $\forall Q \in TQ(Z) : \exists i : Q \subseteq V_{x_i}$

$$\overset{④}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{Q \in TQ(Z)} \int_{\varphi(Q)} f(x)\, dx & \overset{④}{=} & \displaystyle\sum_{Q \in TQ(Z)} \int_Q f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\, dx \\ \| \; 29.29 + 302 & & \| \; 29.29 \\ \displaystyle\int_{\varphi(B)} f(x)\, dx & & \displaystyle\int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\, dx \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\circledast$

⑤

D) Beweis des Transformationssatzes 30.7 – Teil ②

Lemma 30.16:

Gilt $\circledast$ für Quader B, dann für alle B kompakt & Jordan-mb.

Genauer

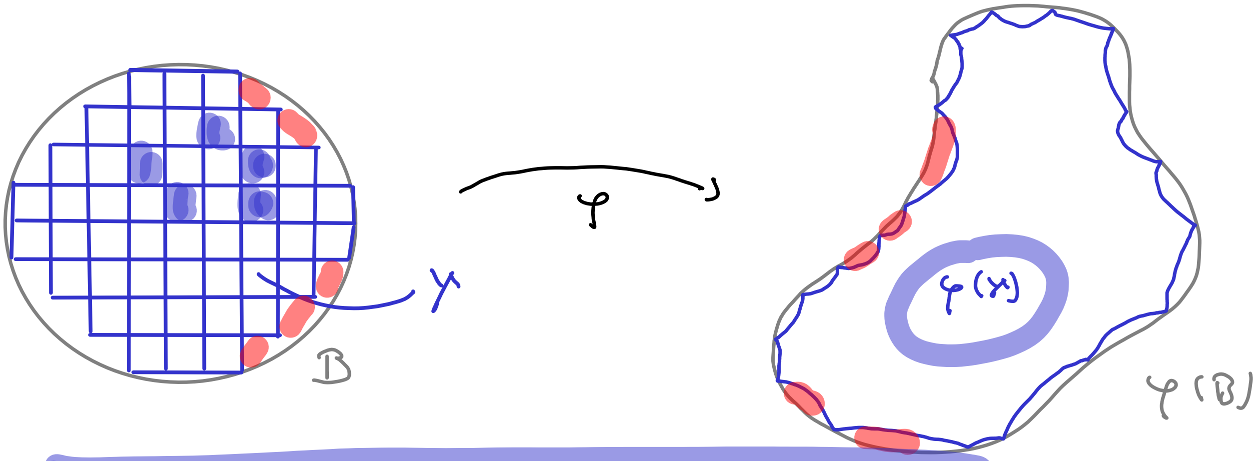
Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Diffeom. mit $\det D\varphi(x)$ stets pos. / stets neg.,

$\forall Q \subseteq \mathcal{U}$ Quader & $f : \varphi(Q) \to \mathbb{R}$ stetig gelte: $\int_{\varphi(Q)} f(x)\,dx = \int_Q f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx$.

Dann: $\left.\begin{array}{l} \forall B \subseteq \mathcal{U} \text{ komp. \& J-mb.} \\ \forall f : \varphi(B) \to \mathbb{R} \text{ stetig} \end{array}\right\}$ gilt: $\circledast$ $\int_{\varphi(B)} f(x)\,dx = \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx$.

Beweis:

Idee:



$$\boxed{\int_Y f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx = \int_{\varphi(Y)} f(x)\,dx}$$

$$\left| \int_{B \setminus Y} f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx \right|, \left| \int_{\varphi(B) \setminus \varphi(Y)} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

1. Schritt: $\exists\, x_1,\dots,x_k \in B : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_{\varepsilon_i}(x_i)}$ und $U_{4\varepsilon_i}(x_i) \subseteq U$

U offen $\Rightarrow \forall x \in B\ \exists\, U_{\delta_x}(x) \subseteq U$

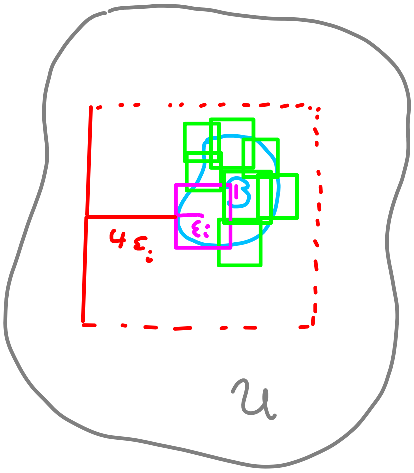
$\Rightarrow B \subseteq \bigcup_{x\in B} U_{\frac{\delta_x}{4}}(x)$ ist offene Überdeckung

$\overset{B \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists\, x_1,\dots,x_k \in B : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{\frac{\delta_{x_i}}{4}}(x_i)$

$$\cap$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_{\varepsilon_i}(x_i)}$$

Setze: $\varepsilon_i := \frac{\delta_{x_i}}{4} > 0$



2. Schritt: o.E.: $\exists\ L := \sup_{x\in U} \|D\varphi(x)\|_\infty < \infty$

Denn: $\overline{U_{3\varepsilon_i}(x_i)} \underset{1.\text{Schr.}}{\subseteq} U$ und $D\varphi$ stetig auf $\overline{U_{3\varepsilon}(x_i)}$

$\Rightarrow \|D\varphi(x)\|_\infty$ ist beschränkt auf $\overline{U_{3\varepsilon_i}(x_i)}$

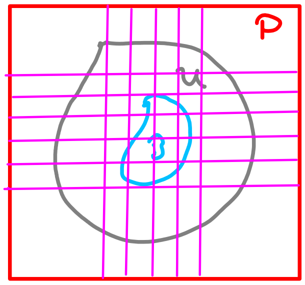
und damit auch auf $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_{3\varepsilon_i}(x_i)}$

Ersetze U durch $\bigcup_{i=1}^{k} U_{3\varepsilon_i}(x_i)$!

3. Schritt: Wähle Würfel P mit $B \subseteq P$ und setze $\ell := \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\}$.

Z = äquidistante Zerlegung von P mit $\ell(Z) < \ell$

$\Rightarrow \forall\, W \in TQ(Z)$ mit $W \cap B \neq \emptyset$ gilt: $W \subseteq U$



Beachte: $W = \overline{\mathcal{U}_{\frac{\ell(Z)}{2}}(z)}$ und $\exists\, x \in W \cap B$

$$\Rightarrow \exists\, i : \quad x \in \overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_i}(x_i)}$$

Sei $y \in W \Rightarrow \|y - x_i\|_\infty \leq \|y - z\|_\infty + \|z - x\|_\infty + \|x - x_i\|_\infty$

$$< \underbrace{\frac{\ell(Z)}{2}}_{<\varepsilon_i} + \underbrace{\frac{\ell(Z)}{2}}_{<\varepsilon_i} + \varepsilon_i < 3 \cdot \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow \quad y \in \mathcal{U}_{3\varepsilon_i}(x_i) \subseteq \mathcal{U} \qquad \Rightarrow \quad W \subseteq \mathcal{U}.$$

4. Schritt: $\forall\, m \geq 1 : \quad \left| \int_{\varphi(B)} f(x)\,dx - \int_{B} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx \right| < \frac{\text{Konstante}}{m}$

Sei $m \geq 1$ gegeben.

$\underset{27.16}{\Rightarrow}$ $\exists\, \delta_m > 0 : \forall\, Z$ Zerlegung von P mit $\ell(Z) < \delta_m$ gilt:

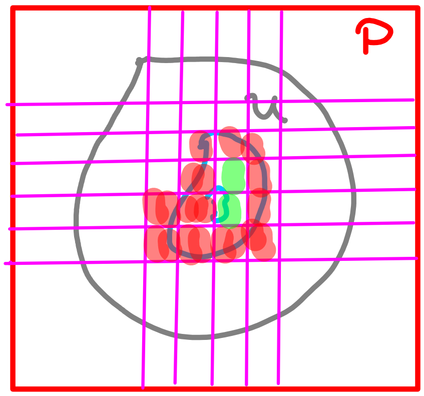
$$OS(1_{\partial B}, Z) - US(1_{\partial B}, Z) \boxed{< \frac{1}{m}}$$

$$\geq$$

$\boxed{!}$ $\boxed{OS(1_{\partial B}, Z) =}$ $OS(1_{\partial B}, Z) - \int_{\partial B} 1\,dx$

$$\int_{\partial B} 1\,dx = V(\partial B) \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ Jordan-messbar}}}{=} 0$$

Wähle eine äquidistante Zerlegung Z^m von P mit $\ell(Z^m) < \min\{\delta_m, \varepsilon\}$.



Setze: $X := \bigcup_{\substack{W \in TQ(Z^m) \\ W \cap \partial B \neq \emptyset}} W$ 🟥, $\quad Y := \bigcup_{\substack{W \in TQ(Z^m) \\ W \subseteq \mathring{B}}} W$ 🟩

Setze: $g(x) := f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$

$$(*)\quad \int_{Y} g(x)\,dx \overset{29.29}{=} \sum_{\substack{W\in TQ(2^{m})\\ W\subseteq \mathring{B}}} \int_W g(x)\,dx \underset{\text{Vsv.}}{=} \sum_{\substack{W\in TQ(2^{m})\\ W\subseteq \mathring{B}}} \int_{\varphi(W)} f(x)\,dx$$

29.29 ‖ ~ φ Diffeo. + 30.2

$$\int_{\varphi(Y)} f(z)\,dz$$

Beachte: $B \overset{\text{Def.}}{\subseteq} X \cup Y \overset{\substack{\text{3. Schritt}\\ \ell(z)\le \ell}}{\subseteq} \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \boxed{B\setminus Y \subseteq X} \Rightarrow \boxed{\varphi(B)\setminus\varphi(Y) \subseteq} \varphi(B\setminus Y) \subseteq \boxed{\varphi(X)}$$

Zudem: $\cdot\ V(X) = \sum_{\substack{W\in TQ(2^m)\\ W\cap\partial B\neq\emptyset}} V(W) = OS(1_{\partial B}, 2^m) < \frac{1}{m}$

$\cdot\ M := \sup_{y\in\varphi(B)} |f(y)|$, da f stetig & $\varphi(B)$ kompakt.

$$\cdot\ |\det(D\varphi(x))| \leq \sum_{\sigma\in S_n} \overbrace{\underbrace{|D_1\varphi_{\sigma(1)}(x)|}_{\substack{\le \|D\varphi(x)\|_\infty\\ \le L\\ \text{2. Schritt}}} \cdots \underbrace{|D_n\varphi_{\sigma(n)}(x)|}_{\substack{\le \|D\varphi(x)\|_\infty\\ \le L\\ \text{2. Schritt}}}}^{\le L^n} \cdot \overbrace{|\mathrm{sgn}(\sigma)|}^{=1}$$

$$\leq L^n \cdot n!$$ ← hängt nicht von m ab!

Damit:

$$(**)\quad \left|\int_{B\setminus Y} g(x)\,dx\right| \leq \int_{B\setminus Y} |g(x)|\,dx = \int_{B\setminus Y} \underbrace{|f(\varphi(x))|}_{\le M}\cdot\underbrace{|\det D\varphi(x)|}_{\le L^n\cdot n!}\,dx$$

$$\leq M\cdot L^n\cdot n!\cdot V(B\setminus Y) \underset{B\setminus Y\subseteq X}{\leq} M\cdot L^n\cdot n!\cdot V(X) < \frac{M\cdot L^n\cdot n!}{m}$$

Beweis dazu: $W = \overline{U_r(a)} \subseteq \mathcal{U}$

$\underset{25.19}{\Longrightarrow}$ φ Lipschitz-stetig mit Konstante $L = \sup_{x \in \mathcal{U}} \|D\varphi(x)\|_\infty$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(W) \subseteq \overline{U_{L\cdot r}(\varphi(a))}$$

$$\Longrightarrow \quad V(\varphi(W)) \le V\left(\overline{U_{L\cdot r}(\varphi(a))}\right) = L^n \cdot V(W)$$

$$\Longrightarrow \quad V(\varphi(X)) \le L^n \cdot V(X) \underset{\boxed{!?}}{<} \frac{L^n}{m} \qquad \boxed{!??}$$

Damit:

$$(***)\quad \left| \int_{\varphi(B)\setminus\varphi(X)} f(x)\,dx \right| \le \int_{\varphi(B)\setminus\varphi(X)} \overset{\le M}{|f(x)|}\,dx \le M \cdot V(\varphi(B)\setminus\varphi(X))$$

$$\underset{\boxed{\varphi(B)\setminus\varphi(X)\subseteq\varphi(X)}}{\le} M \cdot V(\varphi(X)) < \frac{M\cdot L^n}{m} \qquad \boxed{!??}$$

Also:

$$\left| \int_{\varphi(B)} f - \int_B g \right| = \left| \cancel{\int_{\varphi(X)} f} + \int_{\varphi(B)\setminus\varphi(X)} f - \cancel{\int_X g} - \int_{B\setminus X} g \right|$$

$$\underset{(*)}{=} \left| \int_{\varphi(B)\setminus\varphi(X)} f - \int_{B\setminus X} g \right| \le \left| \int_{\varphi(B)\setminus\varphi(X)} f \right| + \left| \int_{B\setminus X} g \right|$$

$$\underset{(**)\,(***)}{<} \frac{M\cdot L^n}{m} + \frac{M\cdot L^n \cdot n!}{m} = \frac{\boxed{M\cdot L^n\cdot(1+n!)}}{m}$$

= Konstante unabhängig von m

Damit:

$$\left| \int_{\varphi(B)} f - \int_B g \right| < \frac{\text{Konstante}}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_{\varphi(B)} f - \int_B g \right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\varphi(B)} f = \int_B g$$

$\boxed{\text{☒}}$

D) Beweis des Transformationssatzes 30.7 – Teil ③

Lemma 30.17

$$\varphi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_n(x))^t \implies ⊛ \text{ gilt.}$$

Beweis

o.E. wegen Vor. an φ

- $$\det D\varphi(x) = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hline D_1\varphi_n(x) & \cdots & \cdots & D_n\varphi_n(x) \end{array}\right| = D_n\varphi_n(x) > 0 \quad \forall x \in U$$

- ② $\implies$ o.E. $B = [a,b]$ ist ein Quader

- Seien $x_i \in [a_i, b_i]$ für $i = 1, \dots, n-1$ gegeben

$$\implies [a_n, b_n] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$$

ist streng monoton wachsend

$$\implies \varphi(B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} a_i \le x_i \le b_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \le x_n \le \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) \end{array} \right\}$$

ist Normalbereich bzgl. $(x_1, \dots, x_n)$

$$\implies \int_{\varphi(B)} f(x)\,dx \underset{29.37}{\overset{\text{Fubini}}{=}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \underbrace{\int_{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1},a_n)}^{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1},b_n)} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n}_{=} \cdots dx_1$$

$$\underset{\text{regel}}{\overset{\text{Substitutions-}}{=}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_n(x)) \cdot D_n\varphi_n(x)\,dx_n \cdots dx_1$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx_n \cdots dx_1$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx$$

$\square$

D) Beweis des Transformationssatzes 30.7 – Teil ④

Lemma 30.18

$\mathcal{U}$ offener Quader, B Quader, $\varphi = \beta \circ \gamma$ mit β, γ Diffeom.

und $\beta(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_n(x))^t$, $\gamma(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), x_n)^t$,

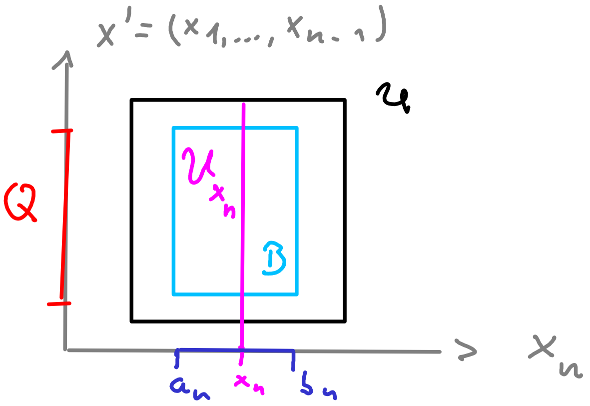
zudem gelte 30.7 in $\mathbb{R}^{n-1}$ $\Longrightarrow$ ⊛ gilt

Beweis:

Schreibe den Quader $B = [a,b]$ als:

$$B = Q \times [a_n, b_n]$$

mit $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$



Für $x_n \in [a_n, b_n]$ setze

- $\mathcal{U}_{x_n} := \left\{ y \in \mathbb{R}^{n-1} \,\middle|\, \begin{pmatrix} y \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offener Quader
- $\phi_{x_n} : \mathcal{U}_{x_n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} : y \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(y, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(y, x_n) \end{pmatrix}$ ist stetig diff'bar

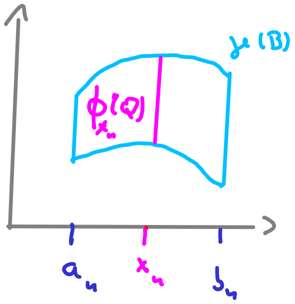
mit $\det\left(D\phi_{x_n}(y)\right) = \det\left(D\gamma(y, x_n)\right) \underset{\gamma \text{ Diffeo.}}{\neq} 0$

und ϕ_{x_n} ist injektiv, weil γ injektiv!

$\Longrightarrow$ ϕ_{x_n} ist ein Diffeomorphismus auf $\mathcal{U}_{x_n}$

$\underset{30.9}{\Longrightarrow}$ $\det(D\phi_{x_n}(y))$ ändert das Vorzeichen nicht, weil $\mathcal{U}_{x_n}$ konvex

Beachte: $\psi(B) = \bigcup_{x_n \in [a_n, b_n]} \phi_{x_n}(Q) \times \{x_n\} \subseteq \psi(U)$



$$\Rightarrow \quad g : \psi(B) \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} y \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto f(\beta(y, x_n)) \cdot |\det D\beta(y, x_n)|$$

ist stetig

$$\overset{30.7}{\underset{\text{im } \mathbb{R}^{n-1}}{\Longrightarrow}} \quad ⊛ \left\{ \begin{aligned} \int_{\phi_{x_n}(Q)} g(y, x_n)\, dy &= \int_Q g(\phi_{x_n}(y), x_n) \cdot |\det D\phi_{x_n}(y)|\, dy \\ &= \int_Q g(\psi(y, x_n)) \cdot |\det D\psi(y, x_n)|\, dy \end{aligned} \right.$$

Beachte:

- $\det(D\varphi(x)) = \det(D(\beta \circ \psi)(x)) = \det(D\beta(\psi(x)) \cdot D\psi(x))$

$$= \det(D\beta(\psi(x))) \cdot \det(D\psi(x))$$

- $g(\psi(x)) \cdot |\det(D\psi(x))| = f(\beta(\psi(x))) \cdot |\det D\beta(\psi(x))| \cdot |\det D\psi(x)|$ (⊛⊛)

$$= f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|$$

Damit: $\displaystyle\int_{\varphi(B)} f(x)\, dx = \int_{\beta(\psi(B))} f(x)\, dx \overset{③}{\underset{30.17}{=}} \int_{\psi(B)} f(\beta(x)) \cdot |\det D\beta(x)|\, dx$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \int_{\psi(B)} g(x)\, dx = \int_{\psi(B)} g(y, x_n)\, d(y, x_n)$$

$$\overset{29.42}{=} \int_{a_n}^{b_n} \boxed{\int_{\phi_{x_n}(Q)} g(y, x_n)\, dy}\, dx_n$$

$$\underset{(*)}{=} \int_{a_n}^{b_n} \int_Q g(\chi(y,x_n)) \cdot |\det D\chi(y,x_n)| \, dy \, dx_n$$

$$\underset{(**)}{=} \int_{a_n}^{b_n} \int_Q f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \, dy \, dx_n$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \, dx$$

$\square$

Bsp. 30.19

$A = \left(\begin{array}{c|c} D & b \\ \hline c^t & a_{nn} \end{array}\right) \in Gl_n(\mathbb{R})$ mit $D \in Gl_{n-1}(\mathbb{R})$ und $b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$

Setze:
- $B := \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{n-1} & 0 \\ \hline c^t \circ D^{-1} & a_{nn} - c^t \circ D \circ b \end{array}\right)$, $C = \left(\begin{array}{c|c} D & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$
- $\varphi = f_A$, $\beta = f_B$, $\chi = f_C$

$\Rightarrow$ φ, β, χ erfüllen die Voraussetzungen von 30.18

D) Beweis des Transformationssatzes 30.7 – Teil ⑤

Lemma 30.20 (Zerlegungssatz – lokal hat φ Zerlegung wie in ④)

$\forall x \in U$ $\exists$ (ggf. nach Umsortieren der Koordinaten) offene Umgebung V von x

sowie Diffeomorphismen

$$\left.\begin{array}{l} \chi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), x_n)^t \\[2em] \text{und} \\ \beta : \chi(V) \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_n(x))^t \end{array}\right\} \text{mit } \varphi_{|V} = \beta \circ \chi$$

Beweis:

φ ist Diffeom. $\Rightarrow \det(D\varphi(x)) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ (n-1)\times(n-1)$ – Minor ungleich 0

$\Rightarrow$ o.E.: es ist der $(n-1)\times(n-1)$ – Hauptminor

d.h. $$0 \neq \begin{vmatrix} D_1\varphi_1(x) & \cdots & D_{n-1}\varphi_1(x) \\ \vdots & & \\ D_1\varphi_{n-1}(x) & \cdots & D_{n-1}\varphi_{n-1}(x) \end{vmatrix} = \det(D\gamma(x))$$

$\xRightarrow[\text{Satz über die Umkehrfkt.}]{26.19}$ $\exists$ offene Umgebung V von x : $\gamma_| : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv

und $\gamma^{-1} : \gamma(V) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig diffbar

und $\det(D\gamma(y)) \neq 0 \ \forall y \in V$

$\Rightarrow$ $\gamma_|$ ist ein Diffeom. auf V

Sei γ^{-1} gegeben durch: $\gamma^{-1} : \gamma(V) \to \mathbb{R}^n : y \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(y) \\ \vdots \\ \alpha_n(y) \end{pmatrix}$

Setze: $\beta_n : \gamma(V) \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \varphi_n(\alpha_1(y), \dots, \alpha_{n-1}(y), y_n)$

ist stetig diffbar

$$\Rightarrow \beta(\gamma(z)) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z), \beta_n(\gamma(z)))$$

$$= (\varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z), \varphi_n(\alpha_1(\gamma(z)), \dots, \alpha_{n-1}(\gamma(z)), z_n)$$

$$= (\varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z), \varphi_n(z)) = \varphi(z) \qquad \forall z \in V$$

$$\Rightarrow \varphi_{|V} = \beta \circ \gamma \qquad \Rightarrow \beta = \underset{\text{Diffeom.}}{\underset{\vee}{\varphi \circ \gamma^{-1}}} \text{ ist Diffeom.}$$

$\square$

E) Beweis des Transformationssatzes 30.8

Bemerkung 30.8 (Allgemeiner Transformationssatz)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, N Jordan-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, φ injektiv auf $\mathcal{U} \setminus N$ und $\det(D\varphi(x))$ stets positiv oder stets negativ auf $\mathcal{U} \setminus N$, $B \subseteq \mathcal{U}$ Jordan-mb. & kompakt, $f : \varphi(B) \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $\varphi(B)$ Jordan-messbar, f integrierbar und

$$\int_{\varphi(B)} f(x)\,dx = \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx$$

Beweis

- N ist eine Jordan-Nullmenge $\overset{\text{ÜA}}{\underset{29.40}{\Rightarrow}}$ $\overline{N}$ ist Jordan-Nullmenge

  $\Rightarrow$ $\overline{N}$ ist eine abgeschlossene Nullmenge

  $\Rightarrow \forall\, x \in \mathring{B} \setminus \overline{N} : \det D\varphi(x) \neq 0$

  $\underset{\text{Satz über die Umkehrfkt.}}{\overset{26.19}{\Longrightarrow}}$ φ ist ein lokaler Diff. in x

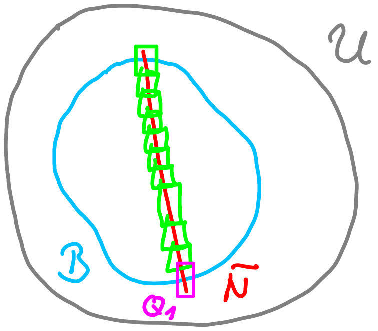
  $\underset{30.3}{\Longrightarrow}$ $\varphi(B)$ ist Jordan-messbar und kompakt

- B & $\varphi(B)$ Jordan-messbar & kompakt und f stetig auf $\varphi(B)$ & $x \mapsto f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$ stetig auf B

  $\Rightarrow$ Integrale in der Gleichung existieren!!!

- $\overline{N}$ ist eine Jordan-Nullmenge

  $\Rightarrow \forall\, m \geq 1 : \exists\, Q_1, \dots, Q_k$ Quader in $\mathcal{U}$ mit $\overline{N} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathring{Q}_i$ und $\sum_{i=1}^{k} V(Q_i) < \frac{1}{m}$



· Setze: · $X := \bigcup_{i=1}^{k} \mathring{Q}_i \subseteq \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad V(X) \le \sum_{i=1}^{k} V(Q_i) < \frac{1}{m}$

· $Y := B \setminus X$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ und beschränkt, also kompakt, und Jordan-messbar

Zudem: · $\mathcal{U} \setminus \overline{N}$ ist eine offene Umgebung von Y,

denn: $Y = B \setminus X \subseteq B \setminus \overline{N} \subseteq \mathcal{U} \setminus \overline{N}$

· φ ist Diffeom. auf $\mathcal{U} \setminus \overline{N}$, da injektiv auf $\mathcal{U} \setminus N$ & lokaler Diff.

$$\underset{30.7}{\Longrightarrow} \quad \int_{\substack{B \setminus X \\ \shortparallel \\ Y}} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \, dx = \int_{\varphi(Y)} f(x) \, dx$$

· Beachte: $V(\varphi(X)) \underset{\substack{\{ \\ \text{für eine geeignete} \\ \text{Konstante } L}}{\le} L^n \cdot V(X) < \frac{L^n}{m}$

· Fahre fort wie in Lemma 30.16 (4. Schritt)

$$\Longrightarrow \left| \int_{\varphi(B)} f(x) \, dx - \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \, dx \right| \le \underset{\substack{\Big\downarrow m \to \infty \\ 0}}{\frac{\text{Konstante}}{m}}$$

$\Longrightarrow$ Beh.

$\Box$

§ 31 Gewöhnliche Differentialgleichungen

GV: $\mathbb{R}^n$ stets als normierter Raum mit $\|\cdot\|_2$

A) Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Notation 31.1

$t \hat{=}$ Zeit $\quad x(t) \hat{=}$ Ort zum Zeitpunkt t

$I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall & $x: I \xrightarrow{\mathcal{C}^m} \mathbb{R}^n ; t \longmapsto x(t)$

$\Rightarrow$ · $\dot{x}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n ; t \longmapsto \dot{x}(t) := Dx(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) \end{pmatrix}$ Ableitung von x

· $x^{(k)}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ k-te Ableitung von x für $k \leq m$.

Def. 31.2

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$f: I \times \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

ⓐ Dann: $x \in \mathcal{C}^m(I, \mathcal{U})$ heißt Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL) m-ter Ordnung

$$x^{(m)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}),$$

falls $\forall\, t \in I$: $x^{(m)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(m-1)}(t))$.

ⓑ Sind zudem $t_0 \in I$ und $(\eta_0, \dots, \eta_{m-1}) \in (\mathbb{R}^n)^{m-1}$ gegeben und gilt zudem $x^{(k)}(t_0) = \eta_k$ für $k = 0, \dots, m-1$, dann heißt x Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$x^{(m)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)})$ zum Anfangswert $(\eta_0, \dots, \eta_{m-1})$

ⓒ Hängt die Abbildungsvorschrift von f nicht von t ab, so nennt man die DGL in ⓐ autonom, sonst nicht-autonom.

Bem. 31.3 (Reduktion auf Systeme 1. Ordnung)

Setze: · $V := \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^{n \cdot m}$ offen

· $F : I \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{n\cdot m};\ \begin{pmatrix} t \\ y_0 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{m-1}) \end{pmatrix}$ stetig

Dann: $z = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{m-1} \end{pmatrix} : I \longrightarrow V$ löst $\dot{z} = F(t, z)$

$\iff$ $z_0 : I \longrightarrow \mathcal{U}$ löst $x^{(m)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)})$

und $z_i = \dot{z}_{i-1}$ für alle $i = 1, \dots, m-1$

Zudem: ist verträglich mit Anfangswerten!

Bsp. 31.4

Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld und $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Bahnkurve eines Teilchens mit Masse m.

Physikalisches Gesetz: Masse × Beschleunigung = Kraft

$\Longrightarrow$ x löst die DGL $m \cdot \ddot{x} = f(x)$ ⊛ (autonome DGL + unabh. von $\dot{x}$)

Ansatz aus 31.3: $F : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6;\ \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{1}{m} \cdot f(y_0) \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ löst $\dot{z} = F(z)$ (**)

Idee: löse (**) $\Longrightarrow$ Projektion auf erste 3 Koordinaten löst ⊛

Bem. 31.5 (Reduktion auf autonome Systeme)

Gegeben DGL 1. Ordnung mit $f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Setze:
- $V := I \times U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen
- $F: V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}: \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x) \end{pmatrix}$ stetig

Dann: $z = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}: I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ löst $\dot{z} = F(z)$ mit $z(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$

$\iff$ $x = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ löst $\dot{x} = f(t,x)$ mit $x(t_0) = \eta_0$

denn $\dot{z}_0 \equiv 1$ und $z_0(t_0) = t_0 \implies z_0(t) = t$.

Bem. 31.6

- 31.3 + 31.5 $\implies$ für theoretische Untersuchungen, etwa zur Lösbarkeit, reicht es, autonome DGL 1. Ordnung $\dot{x} = f(x)$ zu betrachten, wobei $f: U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld ist.

B) Der Satz von Picard-Lindelöf

Beispiel 31.7

Löse das AWP: $\dot{x} = f(x)$ mit $x(t_0) = \eta_0$ für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ⓐ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto a \cdot x$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$, $t_0 = 0$, $\eta_0 \in \mathbb{R}$.

d.h. AWP: $\dot{x} = a \cdot x$ mit $x(0) = \eta_0$

Ansatz:
- $x(t) = c \cdot e^{a \cdot t}$, mit $c \in \mathbb{R}$ $\implies$ $\dot{x}(t) = a \cdot c \cdot e^{a \cdot t} = a \cdot x(t)$
- $\eta_0 = x(0) = c \cdot e^{a \cdot 0} = c$

Also: $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto \eta_0 \cdot e^{a \cdot t}$ löst AWP

ⓑ $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}: x \longmapsto \sqrt{|x|}$, $t_0 = 0$, $\eta_0 = 0$

d.h. AWP: $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ mit $x(0)=0$

Ansatz:
- $x(t)=0 \quad \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 = \sqrt{|x(t)|}$ und $x(0)=0$

  $\Rightarrow$ x löst AWP

- $$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: t\longmapsto \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t\geq 0\\ -\frac{t^2}{4}, & t<0\end{cases}$$

  $$\Rightarrow \dot{y}(t) = \left\{\begin{matrix}\frac{t}{2}, & t\geq 0 \\ -\frac{t}{2}, & t<0\end{matrix}\right\} = \sqrt{|y(t)|}$$

  und $y(0) = 0$

  $\Rightarrow$ y löst AWP

Also: AWP hat mindestens 2 Lösungen!

ⓒ $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}: x \longmapsto x^2$, $t_0 = -1$, $\eta_0 = 1$

d.h. AWP: $\dot{x} = x^2$ mit $x(-1) = 1$

Ansatz: $x:(-\infty,0)\to\mathbb{R}: t\longmapsto -\frac{1}{t}$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{t^2} = \left(-\frac{1}{t}\right)^2 = x(t)^2$ und $x(-1) = -\frac{1}{-1} = 1$

$\Rightarrow$ x löst das AWP

Beachte: Bsp. 31.26 $\Rightarrow$ $\nexists$ Lösung auf ganz $\mathbb{R}$!

Bem. 31.8

Ziel: finde Bedingungen an f, s.d. für (AWP) $\dot{x} = f(x)$ mit $x(t_0) = \eta_0$ gilt:

① $\exists$ Intervall I mit Lösung für (AWP) auf I

② Auf I ist die Lösung eindeutig.

③ Lösung hängt stetig von den Eingabedaten (f, t_0, η_0) ab.

Ansatz: Lipschitz-Bedingung !

Def. & Bem. 31.9

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in I$, $h : I \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Definiere:
$$\int_a^b h(s)\,ds := \begin{pmatrix} \int_a^b h_1(s)\,ds \\ \vdots \\ \int_a^b h_n(s)\,ds \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Dann gilt:
$$\left\| \int_a^b h(s)\,ds \right\|_2 \leq \left| \int_a^b \|h(s)\|_2\,ds \right|$$

Denn: $y := \int_a^b h(s)\,ds \in \mathbb{R}^n$

$$\underset{\text{o.E. } a \le b}{\Rightarrow} \quad \|y\|_2^2 = \langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \int_a^b h_i(s)\,ds = \int_a^b \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i \cdot h_i(s)}_{= \langle y, h(s) \rangle} ds$$

$$= \int_a^b \langle y, h(s) \rangle\,ds \leq \int_a^b \underbrace{|\langle y, h(s) \rangle|}_{\underset{CS}{\leq} \|y\|_2 \cdot \|h(s)\|_2} ds$$

$$\underset{CS}{\leq} \int_a^b \|y\|_2 \cdot \|h(s)\|_2\,ds = \|y\|_2 \cdot \int_a^b \|h(s)\|_2\,ds$$

Satz 31.10 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $\eta_0 \in \mathcal{U}$.

Dann: $\exists \delta > 0$, so dass es genau eine stetig diff.bare Lösung $x : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ des AWP $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta_0$ gibt.

Bemerkung 31.11 (Idee des Beweises)

$x : (-\delta, \delta) \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$ löst das AWP $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta_0$

$$\underset{\text{HDIR}}{\Longrightarrow} \quad x(t) - \underbrace{x(0)}_{\overset{\shortparallel}{\eta_0}} = \int_0^t \dot{x}(s)\, dx = \int_0^t f(x(s))\, ds \quad , \quad t \in (-\delta, \delta)$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = \eta_0 + \int_0^t f(x(s))\, ds$$

Ansatz:

$$\mathcal{J} : \mathcal{C}((-\delta,\delta), \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}((-\delta,\delta), \mathbb{R}^n)$$

$$y \longmapsto \left(t \mapsto \eta_0 + \int_0^t f(y(s))\, ds \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(x) = x$$

D.h.: Wir suchen einen Fixpunkt von $\mathcal{J}$!

Beweis von 31.10

① Finden eines Kandidaten für δ:

- $\mathcal{U}$ offen & $\eta_0 \in \mathcal{U} \Longrightarrow \exists r > 0 :$ $M := \overline{\mathcal{U}_r(\eta_0)} \subseteq \mathcal{U}$

  $\underset{\substack{M \text{ kompakt} \\ 23.38}}{\overset{f \text{ lok. L-st.}}{\Longrightarrow}}$ f ist Lipschitz-stetig auf M mit Konstante $q > 0$

- f stetig & M kompakt $\Longrightarrow$ f beschränkt auf M $\Rightarrow \exists c > 0 : \forall x \in M :$ $\|f(x)\|_2 \le c$

- Setze: $\delta := \min \left\{ \frac{1}{q}, \frac{r}{c} \right\} > 0$.

② Finde geeigneten Def.bereich für den Integraloperator $\mathcal{I}$:

Wähle ein $0 < \varepsilon < \delta$.

Setze: $V := \mathcal{C}([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^n)$ mit $\|x\|_\infty := \max\limits_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \|x(t)\|_2$

$\underset{23.42}{\Rightarrow}$ $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banach-Raum

Setze: $A := \{ x \in V \mid x(0) = \eta_0 \,,\; \mathrm{Im}(x) \leq \Omega \}$

Zeige: A abgeschlossen in V

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $x_n \to x$

$\Rightarrow$ $x_n \to x$ glm. & x_n stetig $\forall n$ $\Rightarrow$ x ist stetig, d.h. $x \in V$

Zudem: · $\eta_0 = x_n(0) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(0)$ $\Rightarrow$ $x(0) = \eta_0$

· $\Omega \ni x_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(t)$ $\underset{\Omega \text{ abgeschl.}}{\Rightarrow}$ $x(t) \in \Omega$ $\forall t$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(x) \leq \Omega$

Also: $x \in A$ $\Rightarrow$ A abgeschlossen!

Damit: A abgeschlossen im Banachraum V

$\Rightarrow$ A ist als metrischer Raum vollständig

③ Zeige: $\mathcal{I} : A \to A$; $x \mapsto \left(t \mapsto \eta_0 + \int\limits_0^t f(x(s))\, ds \right)$

ist eine strikte Kontraktion.

· $x \in A$ $\underset{\text{HDIR}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{I}(x)$ ist stetig-diffbar $\Rightarrow$ $\mathcal{I}(x)$ ist stetig

Zudem: $\mathcal{I}(x)(0) = \eta_0 + \int\limits_0^0 f(x(s))\, ds = \eta_0$

Zeige noch: $\mathrm{Im}(\mathcal{I}(x)) \leq \overline{\mathcal{U}_r(\eta_0)}$

$$\|\mathcal{I}(x)(t) - \eta_0\|_2 = \left\| \int_0^t f(x(s))\, ds \right\|_2 \underset{31.9}{\leq} \left| \int_0^t \underbrace{\|f(x(s))\|_2}_{\leq C} ds \right| \leq |t| \cdot C \leq \varepsilon \cdot C < \delta \cdot C \leq r$$

Damit: $\mathcal{I}(x) \in A$

- Seien $x, y \in A$

$$\Rightarrow \|\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(y)\|_\infty = \max_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \left\| \int_0^t f(x(s)) - f(y(s))\, ds \right\|_2$$

$$\underset{31.9}{\leq} \max_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \left| \int_0^t \underbrace{\|f(x(s)) - f(y(s))\|_2}_{\leq q\cdot\|x(s)-y(s)\|_2} ds \right|$$

f L-st.

$$\leq \max_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \left| \int_0^t q\cdot \underbrace{\|x(s)-y(s)\|_2}_{\leq \|x-y\|_\infty} ds \right|$$

$$\leq \max_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \left| \int_0^t q\cdot \|x-y\|_\infty \, ds \right|$$

$$= \max_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} |t|\cdot q\cdot \|x-y\|_\infty \leq \varepsilon\cdot q\cdot \|x-y\|_\infty$$

Dabei: $\varepsilon\cdot q < \delta\cdot q \leq 1 \Rightarrow \mathcal{J}$ ist strikt Kontraktion.

④ Löse AWP auf $[-\varepsilon,\varepsilon]$ eindeutig

Fixpunktsatz von Banach $\Rightarrow \exists_1\, x_\varepsilon \in A : \mathcal{J}(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$

$\Rightarrow x_\varepsilon : [-\varepsilon,\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $x_\varepsilon(t) = \mathcal{J}(x_\varepsilon(t)) = \eta_0 + \int_0^t f(x_\varepsilon(s))\, ds$

$\underset{HDIR}{\Rightarrow}$ x_ε ist stetig diff'bar mit $\dot{x}_\varepsilon(t) = f(x_\varepsilon(t)) \ \forall t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$

und $x_\varepsilon(0) = \eta_0$

$\Rightarrow$ x_ε löst das AWP und ist eindeutig damit!!!

⑤ Setzen x_ε auf $(-\delta,\delta)$ fort:

Sei $\varepsilon < \nu < \delta$ gegeben

$\underset{④}{\Rightarrow}$ $\exists_1 x_\nu$ mit x_ν löst AWP auf $[-\nu,\nu]$

$\Rightarrow$ $x_\nu|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ löst das AWP auf $[-\varepsilon,\varepsilon]$

$\Rightarrow$ $x_\nu|_{[-\varepsilon,\varepsilon]} = x_\varepsilon$

Definiere: $x : (-\delta,\delta) \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto x_\varepsilon(t)$, wenn $|t| \le \varepsilon$

$\Rightarrow$ x löst das AWP auf $(-\delta,\delta)$ und ist eindeutig!

$\boxed{5}$

Bem. 31.12

ⓐ Picard-Lindelöf liefert Lösung nur lokal um η_0
d.h. für kurzen Zeitraum $(-\delta,\delta)$

ABER: Wenn r, q, C bekannt sind, dann können wir
$\delta = \min\{\frac{1}{q}, \frac{r}{C}\}$ a priori abschätzen!

DAMIT: ① & ② in Bem. 31.8 erfüllt!

ⓑ Fixpunktsatz liefert Rekursionsverfahren, um x zu approximieren:

$$x_0 \equiv \eta_0, \quad x_k(t) = \mathcal{J}(x_{k-1})(t) = \eta_0 + \int_0^t f(x_{k-1}(t))\,dt \quad \text{für } k \geq 1.$$

Für die Güte der Konvergenz gibt es zudem Abschätzungen!

Bsp. 31.13

31.7⑤ $\Rightarrow$ AWP $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ mit $x(0) = 0$ hat keine eindeutige Lösung,
weil $\sqrt{|\cdot|}$ in 0 nicht lokal Lipschitz-stetig!

C) Existenz und Eindeutigkeit im Großen

Def. 31.14

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $y : I \to U$ und $z : J \to U$ seien zwei Lösungen des (AWP) $\dot{x} = f(x)$ mit $x(t_0) = \eta_0$.

ⓐ Wenn $I \subseteq J$ und $z_{|I} = y$, dann heißt z Fortsetzung von y.

ⓑ Hat y keine echte Fortsetzung, so heißt y eine maximale Lösung.

Korollar 31.15

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $\eta_0 \in U$.

Dann: jede Lösung des (AWP) $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta_0$ lässt sich zu einer maximalen Lösung fortsetzen und es gibt genau eine maximale Lösung $x : (t_-(\eta_0), t_+(\eta_0)) \longrightarrow U$.

Beweis:

Seien $y : \underset{\text{offene Intervalle}}{I} \to U$ und $z : J \to U$ Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta_0$.

Ziel: $\quad y(t) = z(t) \quad \forall t \in I \cap J$

Setze: $\cdot$ $K := \{ s \in I \cap J \mid y(t) = z(t) \; \forall\, 0 \le t \le s \} \cup \{ s \in I \cap J \mid y(t) = z(t) \; \forall\, 0 \ge t \ge s \}$

ist ein Intervall in $\mathbb{R}$

$\cdot$ $a := \inf(K) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b := \sup(K) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Zeige: $\quad a \notin K$

Ang: $\quad a \in K \overset{31.10}{\Longrightarrow}$ (AWP) $\dot{x} = f(x)$ mit $x(a) = y(a) \overset{!}{=} z(a)$
hat eindeutige Lösung in $y(a) = z(a)$

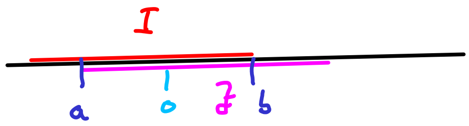
$\Rightarrow$ y & z besitzen eine übereinstimmende Fortsetzung links von a ↯ $a = \inf(K)$

Zu zeigen: $a \notin I \cap J$

Ang: $a \in I \cap J$

$$\Rightarrow \quad y(a) \underset{y \text{ stetig}}{=} \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} y(t) = \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} z(t) \overset{z \text{ stetig}}{=} z(a)$$

$$\overset{\text{Def. von } K}{\underset{\text{und } a}{\Longrightarrow}} \quad a \in K \quad \lightning \quad a \notin K$$



Damit: a ist Randpunkt von I oder von J

Analog: b " " " " " " J

Also: $K = I \cap J$ und $y(t) = z(t) \quad \forall\, t \in K = I \cap J$

Satz: $x : I \cup J \longrightarrow \mathcal{U} : t \longmapsto \begin{cases} y(t), & t \in I \\ z(t), & t \in J \end{cases}$

ist wohldefiniert und eine gemeinsame Fortsetzung von y und z

Betrachte: $\mathcal{Y} := \{ y : I_y \longrightarrow \mathcal{U} \mid y \text{ ist Lös. von } \dot{x} = f(x) \text{ mit } x(0) = \eta_0 \}$

Definiere: $x : \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} I_y \longrightarrow \mathcal{U} : t \longmapsto y(t)$, wenn $t \in I_y$

ist offenbar wohldefiniert und ist offenbar die eindeutige maximale Lösung des AWP $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta_0$

$\square$

Bsp. 31.16

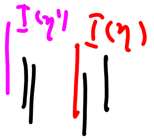
ⓐ $\dot{x} = a \cdot x$ mit $x(0) = \eta_0$ hat $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \eta_0 \cdot e^{at}$ als max. Lösung

ⓑ $\dot{x} = x^2$ mit $x(-1) = 1$ hat $x : (-\infty, 0) \to \mathbb{R} : t \mapsto -\frac{1}{t}$ als max. Lösung, da sich die Fkt. nicht nach 0 stetig fortsetzen lässt!

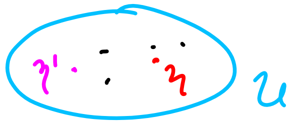
Bem. 31.17

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig.

Setze:
- $I(\eta_0) := (t_-(\eta_0), t_+(\eta_0))$ = max. Existenzintervall einer Lsg. zu $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta_0$
- $\varphi^t(\eta_0) := x(t)$, wenn $x: I(\eta_0) \to \mathcal{U}$ die max. Lsg. ist
- $\Omega := \{(t,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} \mid t \in I(\eta)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$



Dann gilt:



- Ω ist offen in $\mathbb{R}^{n+1}$
- Die Endpunkte von $I(\eta)$ hängen stetig von η ab.
- $\varphi: \Omega \to \mathcal{U}, (t,\eta) \mapsto \varphi^t(\eta)$ ist stetig.
- Falls f stetig diff.bar ist, so ist φ stetig diff.bar.
- Insbesondere: max. Lsg. hängt stetig bzw. stetig diffbar vom Anfangswert ab!
- Wenn man f mittels Parametern stetig variiert, erhält man entsprechende stetige Abhängigkeit von f!

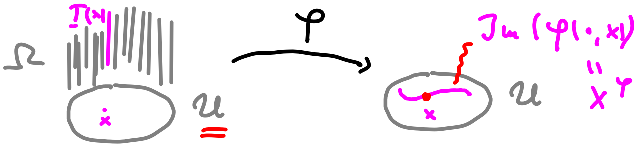
D) Flüsse und dynamische Systeme

Def. 31.18:

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und für $x \in \mathcal{U}$ sei $I(x)$ ein offenes Intervall mit $0 \in I(x)$.

Ferner sei $\Omega = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{U}} I(x) \times \{x\} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} \mid t \in I(x)\}$ offen in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dann heißt
$$\begin{array}{ccc} \varphi : \Omega & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{U} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (t,x) & \longmapsto & \varphi^t(x) = \varphi(t,x) \end{array}$$
ein Fluß oder dynamisches System auf $\mathcal{U}$,



falls: ① $\varphi^0 = id_{\mathcal{U}}$

② $t \in I(x) \Longrightarrow \left(s+t \in I(x) \Longleftrightarrow s \in I(\varphi^t(x)) \right)$

③ $\forall\, t, s+t \in I(x) : \quad \varphi^{s+t}(x) = \varphi^s(\varphi^t(x))$

Notation:

- $\mathcal{U}$ heißt der Phasenraum des Flusses
- $x^\varphi := \{ \varphi^t(x) \mid t \in I(x) \}$ heißt die Bahn von x unter φ
- φ heißt globaler Fluss, wenn $I(x) = \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{U}$.

Bsp. 31.19

$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R} : (t,x) \longmapsto x \cdot e^t$ ist ein globaler Fluss

mit Phasenraum $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

und Bahn
$$x^\varphi = \begin{cases} (-\infty, 0), & \text{falls } x < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } x = 0 \\ (0, \infty), & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U} = \mathbb{R} = (-1)^\varphi \,\dot{\cup}\, 0^\varphi \,\dot{\cup}\, 1^\varphi$$

ist disjunkte Vereinigung von Bahnen!

Lemma 31.20

Sei $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \Omega$ ein Fluss.

Dann:
- je zwei Bahnen sind disjunkt oder identisch
- der Phasenraum ist die disjunkte Vereinigung von Bahnen!

Beweis:

Definiere für $x, y \in \mathcal{U}$: $\quad x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; y \in x^{\varphi}$

Es reicht zu zeigen: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

und x^{φ} = Äquivalenzklasse von x

Reflexivität: $\quad x = \varphi^0(x) \in x^{\varphi} \implies x \sim x$

Symmetrie: Sei $x \sim y \implies y \in x^{\varphi} \implies \exists\, t \in I(x) : y = \varphi^t(x)$

$$\implies x \underset{①}{=} \varphi^0(x) = \varphi^{-t+t}(x) \underset{③}{=} \varphi^{-t}(\varphi^t(x)) = \varphi^{-t}(y) \in y^{\varphi}$$

$t,\ \underset{0}{\underset{\shortparallel}{-t+t}} \in I(x)$

$\implies y \sim x$

Transitivität: $\quad x \sim y,\ y \sim z \implies \exists\, t \in I(x),\ s \in I(y) : y = \varphi^{t}(x)$

und $z = \varphi^s(y)$

$$\implies z = \varphi^s(y) = \varphi^s(\varphi^t(x)) \underset{③}{=} \varphi^{s+t}(x) \in x^{\varphi}$$

$t,\ s+t \in I(x)$

B.1

$s \in I(\varphi^t(x)) = I(y)$

$\implies x \sim z$

Zudem: $\quad$ Äkl. von $x = \{ y \in \mathcal{U} \mid x \sim y \} = \left\{ y \in \mathcal{U} \;\middle|\; \begin{matrix} \exists\, t \in I(x): \\ y = \varphi^t(x) \end{matrix} \right\}$

$= x^{\varphi}$

$\square$

Bild zu 31.20

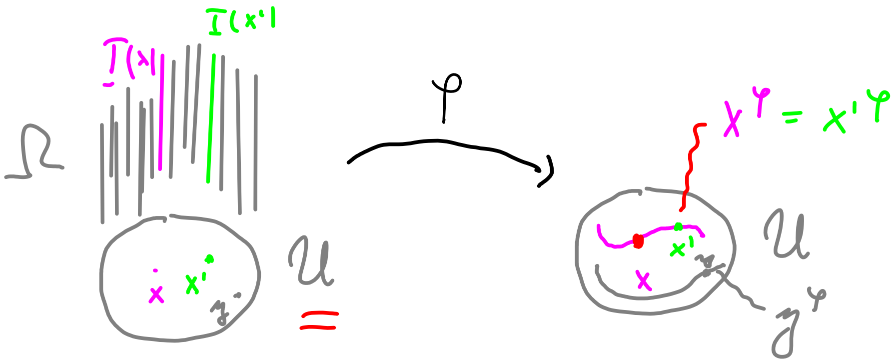
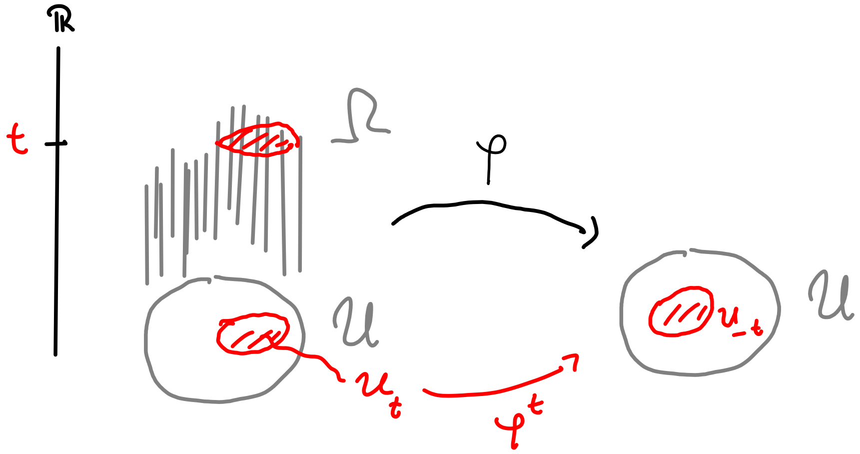


Bild zu 31.21



Lemma 31.21

Sei $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathcal{U}$ ein stetig diff.barer Fluss.

Dann: · $\forall t \in \mathbb{R}$: $\mathcal{U}_t := \{x \in \mathcal{U} \mid t \in I(x)\}$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

· $\varphi^t : \mathcal{U}_t \longrightarrow \mathcal{U}_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus

Insbesondere: wenn φ ein globaler Fluss ist,

dann: $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ und $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathrm{Diff}(\mathcal{U}), \circ) : t \mapsto \varphi^t$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis:

- Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathcal{U}_t \neq \emptyset$
- Zeige: $\mathcal{U}_t$ ist offen

Sei $x \in \mathcal{U}_t \Rightarrow (t,x) \in \Omega$ und Ω ist offen in $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{U}_\delta(t,x) \subseteq \Omega \Rightarrow \mathcal{U}_\delta(t,x) \cap \left(\{t\} \times \mathcal{U}\right)$ ist eine offene Umgebung von x in U

$\Rightarrow \mathcal{U}$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.

- Zeige: $\varphi^t : \mathcal{U}_t \longrightarrow \mathcal{U}$ mit $\varphi^t(\mathcal{U}_t) = \mathcal{U}_{-t}$

und $\varphi^t : \mathcal{U}_t \longrightarrow \mathcal{U}_{-t}$ ist ein Diffeom.

Beachte: $\left[\ t \in I(x) \Leftrightarrow -t \in I(\varphi^t(x))\ \right]$

② , weil $-t+t=0 \in I(x)$

$$\Rightarrow \varphi^t(\mathcal{U}_t) = \left\{ \varphi^t(x) \;\middle|\; \begin{matrix} x \in \mathcal{U} \text{ mit} \\ t \in I(x) \end{matrix} \right\} = \left\{ y \;\middle|\; \begin{matrix} y \in \mathcal{U} \text{ mit} \\ -t \in I(y) \end{matrix} \right\} = \mathcal{U}_{-t}$$

$\Rightarrow \varphi^t$ ist surjektiv auf $\mathcal{U}_{-t}$ und

$\varphi^{-t} : \mathcal{U}_{-t} \longrightarrow \mathcal{U}_{-(-t)} = \mathcal{U}_t$ ist die Umkehrabb.,

denn:
$$\varphi^t \circ \varphi^{-t} \overset{③}{\underset{②}{=}} \varphi^{t-t} = \varphi^0 = id_{\mathcal{U}_{-t}}$$
$$\varphi^{-t} \circ \varphi^{t} \overset{③}{\underset{②}{=}} \varphi^{-t+t} = \varphi^0 = id_{\mathcal{U}_{t}}$$

$\Rightarrow \varphi^t$ ist ein Diffeom. von $\mathcal{U}_t$ nach $\mathcal{U}_{-t}$

φ_{-t} stetig diffbar

$\boxed{3}$

Bsp. 31.22:

$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ (t,x) \longmapsto x\cdot e^t$ ist globaler Fluss

$$\Rightarrow \quad (\mathbb{R},+) \xrightarrow[\text{homomorphismus}]{\text{Gruppen-}} (\mathrm{Diff}(\mathbb{R}),\circ) \ : \ t \longmapsto \varphi^t$$

mit $\varphi^t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x\cdot e^t$ (ist linear)

E) Differentialgleichungen und Flüsse

Prop. 31.23

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar.

Für $\eta \in \mathbb{R}^n$ sei $I(\eta) \to \mathcal{U} : t \mapsto \varphi^t(\eta)$ die max. Lsg von $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta$.

Dann ist $\varphi : \Omega = \bigcup\limits_{\eta\in\mathcal{U}} I(\eta)\times\{\eta\} \longrightarrow \mathcal{U} : (t,\eta) \mapsto \varphi^t(\eta)$ ein

stetig diffbarer Fluss auf $\mathcal{U}$.

Beweis:

- 31.17 $\Rightarrow$ Ω offen und φ stetig diffbar
- $t \mapsto \varphi^t(\eta)$ löst AWP mit Anfangswert η $\Rightarrow \varphi^0(\eta) = \eta$ $\Rightarrow$ ①
- Sei $t \in I(\eta)$ und $\tau_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto s - t$

$\Rightarrow$ (AWP) $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \varphi^t(\eta)$ hat die maximalen

Lösungen:
- $\tau_t(I(\eta)) \longrightarrow \mathcal{U} ; s \longmapsto \varphi^{s+t}(\eta)$
- $I(\varphi^t(\eta)) \longrightarrow \mathcal{U} : s \longmapsto \varphi^s(\varphi^t(\eta))$

$$\overset{31.15}{\Longrightarrow} \quad I(\varphi^t(\eta)) = \tau_t(I(\eta)) \quad \text{und} \quad \varphi^s(\varphi^t(\eta)) = \varphi^{s+t}(\eta)$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$s \in I(\varphi^t(\eta)) \Leftrightarrow s+t \in I(\eta)$ $\qquad$ ③

$\Downarrow$

②

Bsp. 31.24:

$f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R} : x \longmapsto a \cdot x$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; (t, \eta) \longmapsto \eta \cdot e^{a \cdot t}$

ist der globale Fluß zu $\dot{x} = f(x)$

mit Phasenraum $\mathbb{R}$

Sei $a \neq 0$.

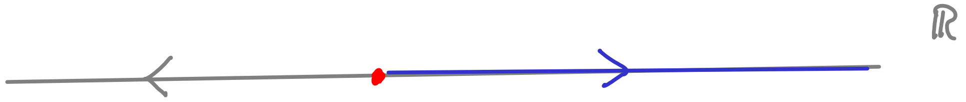
$\Rightarrow \varphi$ hat genau 3 Bahnen:

$(-1)^{\varphi} = (-\infty, 0)$

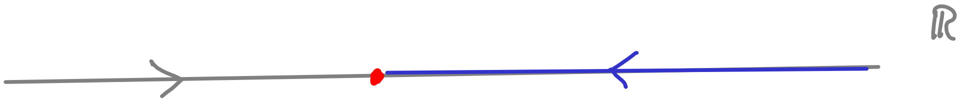
$0^{\varphi} = \{0\}$

$1^{\varphi} = (0, \infty)$

$\Rightarrow$ $a > 0$:



$a < 0$



Prop. 31.25

Sei $\varphi : \Omega \to \mathcal{U}$ ein stetig diff.barer Fluß.

Dann: • $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n : \eta \longmapsto \frac{d\varphi}{dt}(0, \eta)$ ist stetig

• $\forall \eta \in \mathcal{U}$: $x : I(\eta) \longrightarrow \mathcal{U} : t \mapsto \varphi^t(\eta) = \varphi(t,\eta)$ löst das (AWP) $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = \eta$.

Beweis:

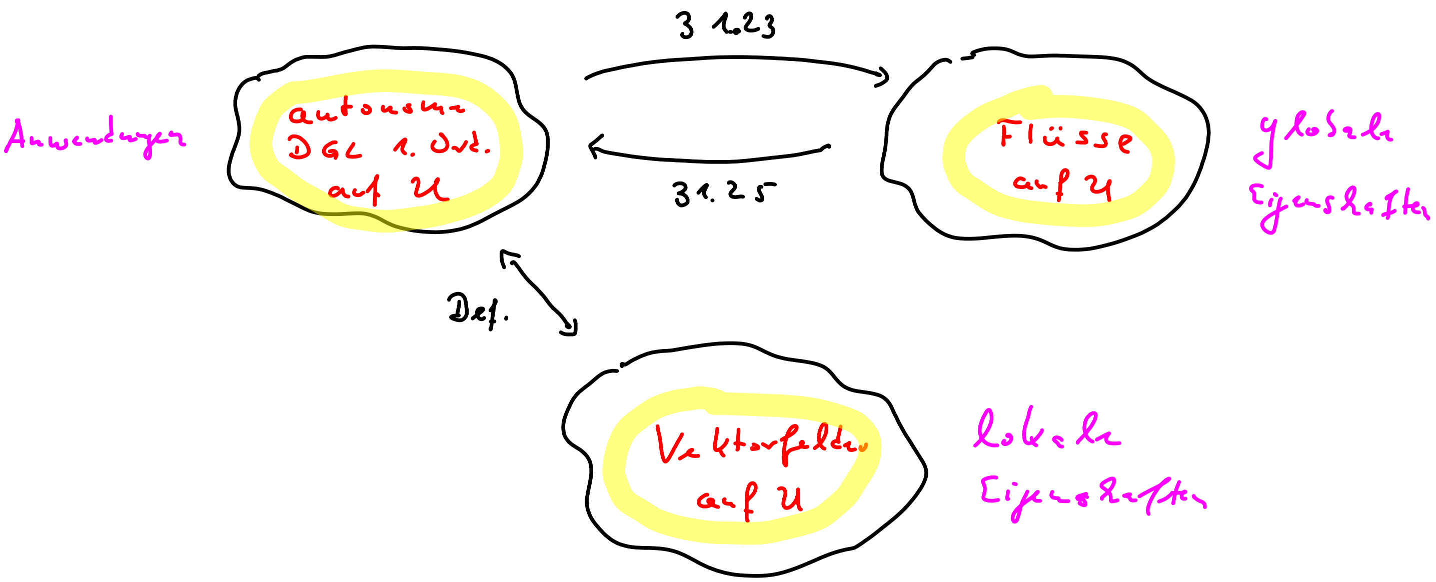
- φ stetig diffbar $\Rightarrow$ $\frac{d\varphi}{dt}$ ist stetig $\Rightarrow$ $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = f$ ist stetig
- $\varphi(t+s, \eta) = \varphi^{t+s}(\eta) \overset{③}{=} \varphi^t(\varphi^s(\eta)) = \varphi(t, \varphi(s, \eta))$

$\Rightarrow f(x(s)) = \left.\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \varphi(s,\eta))\right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t+s, \eta) \underset{\text{KR}}{=} \left.\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \eta)\right|_{t=s} = \dot{x}(s)$

und $x(0) = \varphi^0(\eta) \overset{②}{=} \eta$

□

Bem. 31.26: 3 Möglichkeiten, dasselbe dynamische Phänomen zu beschreiben



F) Lösung separabler Differentialgleichungen

Def. 31.27

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $h \in C^1(I,\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Eine nicht-autonome DGL 1. Ordnung der Form $\dot{x} = g(x) \cdot h(t)$ heißt separabel.

Bem. 31.28 (Lösung durch Separation der Variablen)

Ansatz: $\dot{x}(t) = g(x(t)) \cdot h(t)$

$$\overset{\cancel{?}}{\Rightarrow} \quad h(t) = \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))}$$

$$\Rightarrow \underbrace{H(t) :=}_{\text{Stammfkt. von } h} \int^t h(t)\,dt + C \ \boxed{?} = \int^t \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))}\,dt \overset{\substack{\text{Substituiere}\\ x = x(t)}}{=} \underset{\overset{!!}{\phi(x)}}{\int^x \frac{1}{g(x)}\,dx}$$

$$\overset{(\cancel{?})}{\underset{\text{Wende die Inverse von } \phi \text{ an! } ?}{\Rightarrow}} \quad x = \phi^{-1}(H(t))$$

Probleme:

① $\boxed{g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$??

Wenn ja $\Rightarrow$ $g(x) > 0 \ \forall x$ oder $g(x) < 0 \ \forall x$

$$\overset{\Rightarrow}{\phi : x \mapsto \int^x \frac{1}{g(x)}\,dx} \qquad \phi'(x) = \frac{1}{g(x)} > 0 \ \forall x \ \text{ oder } \ \phi'(x) < 0 \ \forall x$$

$\Rightarrow$ ϕ ist streng monoton und stetig

$\Rightarrow$ $\exists\ \phi^{-1}$ existiert !!!

ABER: Können wir ϕ^{-1} ausrechnen,

d.h. können $\phi(x) = H(t)$ nach x auflösen?

② Können wir eine Stammfkt. H von h ausrechnen?

Bsp. 31.29

ⓐ $\dot{x} = a \cdot x = g(x) \cdot h(t)$ mit $g(x) = x$, $h(t) = a$

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \underset{\ln|x|}{\underset{\shortparallel}{\int^x \frac{1}{x}\,dx}} = \underset{a\cdot t + C}{\underset{\shortparallel}{\int^t a\,dt + C}} = H(t)$$

$$\Rightarrow \quad |x| = e^{at+c} = e^{a\cdot t} \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ \eta\, > 0}}{e^{c}}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \underbrace{\pm\eta}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \cdot e^{a\cdot t} \qquad \text{(siehe 31.7 ⓐ)}$$

ⓑ $\dot{x} = x^2 = g(x) \cdot h(t)$ mit $g(x) = x^2$ und $h(t) = 1$

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \underset{= -\frac{1}{x}}{\int^x \frac{1}{x^2}\,dx} = \underset{= t + C}{\int^t 1\,dt + C} = H(t)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{1}{t+C} \qquad \text{(siehe 31.7 ⓑ)}$$

§ 32 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Generalvoraussetzung:

- $\mathbb{R}^n$ stets mit euklidischer Norm
- $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit submultiplikativer Norm, z.B. $\|\cdot\|_2$ oder Operatornorm

  d.h. $\|A\circ B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$

A) Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Def. 32.1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A: I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ & $b: I \to \mathbb{R}^n$ stetig.

ⓐ $\dot{x} = A(t)\circ x + b(t)$ heißt ein lineares System gewöhnlicher DGL 1. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten.

ⓑ Wenn A konstant ist, heißt $\dot{x} = A\circ x + b(t)$ ein lineares System gewöhnlicher DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeff.

ⓒ $b \equiv 0$, dann heißen die Systeme homogen, sonst inhomogen.

Bsp. 32.2

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \dot{x} = a\cdot x$ homogene lin. GDGL mit konst. Koeff.

Allgemeine Lösung: $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: t \mapsto e^{at}\cdot c$ für $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Lösungsraum $L_h = \{ t \mapsto e^{at}\cdot c \mid c \in \mathbb{R} \}$

Satz 32.3 (Existenz und Eindeutigkeit im homogenen Fall)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A : I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ stetig, $t_0 \in I$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt: (AWP) $\dot{x} = A(t) \circ x$ mit $x(t_0) = \eta_0$

hat genau eine maximale Lösung $x : \underline{I} \to \mathbb{R}^n$.

Beweis

① Wähle einen geeigneten Funktionenraum

Sei $[a,b] \subseteq I$ mit $t_0 \in [a,b]$ beliebig.

$\Rightarrow$ $V := \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ ist normiert mit $\|x\|_\infty := \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$

und $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum

② Übergang zu einer Integralgleichung.

$x \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ löst (AWP) $\dot{x} = A(t) \circ x$ mit $x(t_0) = \eta_0$

$$\underset{31.11}{\Longleftrightarrow} \quad x(t) = \eta_0 + \int_{t_0}^{t} A(s) \circ x(s)\, ds$$

Definiere: $J : V \longrightarrow V : x \longmapsto \left(t \mapsto \int_{t_0}^{t} A(s) \circ x(s)\, ds \right)$

Gesucht: $x \in V \Rightarrow \eta_0 = x - J(x) = (id_V - J)(x)$ (*)

Ziel: zeige $id_V - J$ ist invertierbar,

denn dann: $x = (id_V - J)^{-1}(\eta_0)$ ist die eindeutige Lösung von (*)

Es reicht: $J \in L(V,V)$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|J^k\|$ ist konvergent

wobei $\|\cdot\|$ Operatornorm auf $L(V,V)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Erinnerung:

Prop. 23.56 (Neumannsche Reihe)

Sei V ein Banachraum und $f \in L(V,V)$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \|f^{\ell}\|$ konvergent, wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf $L(V,V)$ bezeichnet.

Dann gelten:

① $id_V - f$ ist bijektiv mit $(id_V - f)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{\ell}$

② $\|f\| < 1 \implies \|(id_V - f)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|f\|}$.

③ Zeige: $\forall x \in V$ und $\forall t \in [a,b]$: $\|J^{k}(x)(t)\|_2 \leq \frac{C^{k} \cdot |t - t_0|^{k}}{k!} \cdot \|x\|_\infty$

wobei $C := \max_{t \in [a,b]} \|A(t)\|$

Operatornorm von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : y \mapsto A(t) \circ y$ bzgl. $\|\cdot\|_2$

④ Damit:

③ $\implies \|J^{k}(x)\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} \|J^{k}(x)(t)\|_2 \leq \frac{C^{k} \cdot (b-a)^{k}}{k!} \cdot \|x\|_\infty$

$\implies \|J^{k}\| = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|J^{k}(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{C^{k} \cdot (b-a)^{k}}{k!}$

$\implies$ · $k=1$: $\|J\| \leq \frac{C \cdot (b-a)}{1} < \infty \implies J \in L(V,V)$

· $\sum_{k=0}^{\infty} \|J^{k}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^{k} \cdot (b-a)^{k}}{k!} = e^{C \cdot (b-a)} < \infty$

$\implies \sum_{k=0}^{\infty} \|J^{k}\|$ ist konvergent $\implies id_V - J$ ist invertierbar

$\implies x = (id_V - J)^{-1}(\eta_0)$ ist die eindeutige Lösung des (AWP) auf dem Intervall $[a,b]$

⑤ Setze die Lösung auf I fort:

Beachte: Wenn $[a,b] \subseteq [c,d]$ und x ist die eind. Lösung auf $[a,b]$ und y die auf $[c,d]$, dann folgt wegen der Eindeutigkeit: $y_{|[a,b]} = x$

$\Rightarrow$ die Lösung besitzt eindeutige Fortsetzung auf I, wie im Beweis der Existenz & Eindeutigkeit im Großen:

$$x : I \to \mathbb{R}^n : t \longmapsto y(t), \text{ wenn } y \text{ die eind. Lösung auf } [a,b] \text{ ist und } t \in [a,b] \subseteq I$$

Zeige noch ③: Induktion nach k:

$k = 0$: $\|J^0(x)(t)\|_2 = \|x(t)\|_2 \le \|x\|_\infty = \underbrace{\frac{C^0 \cdot |t-t_0|^0}{0!}}_{=1} \cdot \|x\|_\infty$

$k \mapsto \ell+1$: $\|J^{\ell+1}(x)(t)\|_2 = \|J(J^\ell(x))(t)\|_2 =$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} A(s) \circ J^\ell(x)(s)\, ds \right\|_2 \le \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|A(s) \circ J^\ell(x)(s)\|_2}_{\le \|A(s)\| \circ \|J^\ell(x)(s)\|_2} ds \right|$$

$\|A(s)\|$ = Operatornorm bez. $\|\cdot\|_2$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|A(s)\|}_{\le C} \cdot \underbrace{\|J^\ell(x)(s)\|}_{\overset{\le}{\text{Ind}}} \, ds \right| \quad \frac{C^\ell \cdot |s-t_0|^\ell}{\ell!} \cdot \|x\|_\infty$$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} \frac{C^{\ell+1} \cdot |s-t_0|^\ell}{\ell!} \cdot \|x\|_\infty \, ds \right| = \frac{C^{\ell+1}}{\ell!} \cdot \|x\|_\infty \cdot \frac{|s-t_0|^{\ell+1}}{\ell+1} \Bigg|_{t_0}^{t}$$

$$= \frac{C^{\ell+1} \cdot |t-t_0|^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \cdot \|x\|_\infty \qquad \square$$

Bem. 32.4

n = 1: $a : I \to \mathbb{R}$ stetig und $t_0 \in I$ und $\eta_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $x : I \to \mathbb{R} : t \mapsto e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot \eta_0$

ist die eindeutige Lösung des

(AWP) $\dot{x} = a(t) \cdot x$ mit $x(t_0) = \eta_0$

$[\xi]$

B) Fundamentalsysteme

Korollar 32.5

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A : I \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig

ⓐ $L_h := \{ x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{x} = A(t) \circ x \}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

ⓑ Für $x^1, \ldots, x^k \in L_h$ sind $\circlearrowleft$: ① $(x^1, \ldots, x^k)$ ist linear unabhängig in L_h

② $\forall t \in I : (x^1(t), \ldots, x^k(t))$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$ ③ $\exists t \in I : (x^1(t), \ldots, x^k(t))$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$.

ⓒ $\dim_{\mathbb{R}} L_h = n$

ⓓ $(x^1, \ldots, x^n)$ Basis von L_h $\Rightarrow$ · $X : I \to Gl_n(\mathbb{R}) : t \mapsto (x^1(t) \ldots x^n(t))$ stetig differenzierbar

· $I \longrightarrow Gl_n(\mathbb{R}) : t \mapsto (X(t))^{-1}$ stetig differenzierbar

Wir nennen X ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = A(t) \circ x$.

ⓔ x Lösung von $\dot{x} = A(t) \circ x + b(t)$ $\Longrightarrow$ $L_i := x + L_h = \{ x + y \mid y \in L_h \} \overset{!}{=}$ Menge aller Lösungen von $\dot{x} = A(t) \circ x + b(t)$

Beweis:

ⓐ Seien $x, y \in L_h$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (\lambda x + \mu y)' = \lambda \cdot \dot{x} + \mu \cdot \dot{y} = \lambda \cdot A(t) \circ x + \mu \cdot A(t) \circ y = A(t) \circ (\lambda x + \mu y)$

$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in L_h \quad \Longrightarrow \quad L_h \leq \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$

(b) ① ⇒ ②: Sei also $(x^1,\dots,x^k)$ lin. unabh. in L_h, $t_0 \in I$.

Ansatz: $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot x^1(t_0) + \dots + \lambda_k \cdot x^k(t_0) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot x^1 + \dots + \lambda_k \cdot x^k \underset{(a)}{\in} L_h$ mit $\lambda_1 x^1(t_0) + \dots + \lambda_k x^k(t_0) = 0$,

d.h. $\lambda_1 \cdot x^1 + \dots + \lambda_k \cdot x^k$ ist Lsg. des (AWP) $\dot{x} = A(t) \circ x$ mit $x(t_0) = 0$

Aber: $y \equiv 0$ löst das (AWP) auch!

$\underset{\substack{32.3\\ \text{Eindeutigkeit}}}{\Rightarrow}$ $0 = y \overset{!}{=} \lambda_1 \cdot x^1 + \dots + \lambda_k \cdot x^k \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

$\Rightarrow (x^1(t_0),\dots,x^k(t_0))$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$

② ⇒ ③: ✓

③ ⇒ ①: Sei $t_0 \in I$ mit $(x^1(t_0),\dots,x^k(t_0))$ lin. unabh.

Ansatz: $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k \cdot x^k \equiv 0$

$\Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot x^1(t_0) + \dots + \lambda_k \cdot x^k(t_0) \Rightarrow \lambda_1,\dots,\lambda_k = 0$

$\Rightarrow (x^1,\dots,x^k)$ ist lin. unabh. in L_h.

(c) Wähle ein $t_0 \in I$.

$i \in \{1,\dots,n\} \overset{32.3}{\Rightarrow}$ (AWP) $\dot{x} = A(t) \circ x$ mit $x(t_0) = e_i$ hat eine eindeutige Lsg $x^i \in L_h$

$\Rightarrow (x^1(t_0),\dots,x^n(t_0)) = (e_1,\dots,e_n)$ ist lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$

$\underset{(b)}{\Rightarrow} (x^1,\dots,x^n)$ ist lin. unabh. in L_h

Sei $x^0 \in L_h$ $\Rightarrow (x^0(t_0),\dots,x^n(t_0))$ ist lin. abh. in $\mathbb{R}^n$

$\underset{(b)}{\Rightarrow} (x^0,\dots,x^n)$ lin. abh. in L_h

$\Rightarrow (x^1,\dots,x^n)$ ist max. lin. unabh. in L_h,

also eine Basis $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} L_h = n$

(d) Sei $(x^1, \dots, x^n)$ eine Basis von L_h

$\underset{(b)}{\Longrightarrow}$ $\forall t \in I$: $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ $X(t) := (x^1(t) \dots x^n(t))$ ist invertierbar

$\Rightarrow$ $X : I \to Gl_n(\mathbb{R})$; $t \mapsto X(t)$ ist stetig diffbar, weil $x^1, \dots, x^n$ stetig diffbar

Zudem: $(X(t))^{-1} \in Gl_n(\mathbb{R}) \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow$ $I \to Gl_n(\mathbb{R}) : t \mapsto (X(t))^{-1}$ ist definiert

$$(X(t))^{-1} = \frac{1}{\det(X(t))} \cdot X(t)^{\#}$$

die Abb. ist stetig diffbar! $\Longleftarrow$ Komponentenfkt. sind rationale Fkt. in den Einträgen von $X(t)$

(e) Sei x eine Lsg. von $\dot{x} = A(t) \circ x + b(t)$.

Zeige: $x + L_h$ = Menge aller Lsg. von $\dot{x} = A(t) \circ x + b(t)$

„$\subseteq$" Sei $y \in L_h$ $\Rightarrow$ $(x+y)' = \dot{x} + \dot{y} = (A(t) \circ x + b(t)) + A(t) \circ y$

$= A(t) \circ (x+y) + b(t)$

$\Rightarrow$ $x + y \in$ r.S.

„$\supseteq$" Sei $z \in$ r.S. $\Rightarrow$ $(z-x)' = \dot{z} - \dot{x} = (A(t) \circ z + \cancel{b(t)}) - (A(t) \circ x + \cancel{b(t)})$

$= A(t) \circ (z - x)$

$\Rightarrow$ $z - x \in L_h$ und $z = x + (z-x) \in x + L_h$

□

c) Variation der Konstanten

Satz 32.6 (Variation der Konstanten)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A : I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ stetig, $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig,

X ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = A(t) \circ x$, $t_0 \in I$ und $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dann hat das (AWP) $\dot{x} = A(t) \circ x + b(t)$ mit $x(t_0) = \eta_0$

genau eine maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ und es gilt:

$$x(t) = X(t) \circ \left(X(t_0)^{-1} \circ \eta_0 + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \circ b(s) \, ds \right).$$

Beweis:

Setze: $c : I \to \mathbb{R}^n : t \longmapsto X(t_0)^{-1} \circ \eta_0 + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \circ b(s) \, ds$

ist definiert und stetig diffbar

32.5: $t \mapsto X(t)^{-1}$ stetig diffbar

HDIR

$\overset{32.5}{\Longrightarrow}$ $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto X(t) \circ c(t)$ ist stetig diffbar

X stetig diffbar

Dann: $\dot{c}(t) = X(t)^{-1} \circ b(t)$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) \underset{PR}{=} \underbrace{\dot{X}(t)}_{\|} \circ c(t) + X(t) \circ \underbrace{\dot{c}(t)}_{\|}$$

$$= A(t) \circ \underbrace{X(t) \circ c(t)}_{\|} + \cancel{X(t)} \circ \cancel{X(t)}^{-1} \circ b(t)$$

$$= A(t) \circ x(t) + b(t)$$

d.h. x löst das (AWP) und x ist maximal!

Ang: $z : J \to \mathbb{R}^n$ ist eine zweite maximale Lsg mit $J \subseteq I$

$\Rightarrow$ $x|_J - z$ ist eine Lösung von $\dot{x} = A(t) \circ x$

denn: $(x|_J - z)' = \dot{x} - \dot{z} = (A(t) \circ x + \cancel{b(t)}) - (A(t) \circ z + \cancel{b(t)})$

$= A(t) \circ (x - z)$

$$\underset{\substack{32.3\\ \text{Eindeutigkeit}}}{\Rightarrow} \quad x|_J \equiv z \quad \underset{\substack{\text{Maximalität}\\ \text{von } z}}{\Rightarrow} \quad I = J$$

$\boxed{\text{q}}$

Bem. 32.7

Idee: Hole die Formel für die Variation der Konstanten her

Variierende Konstante

Ansatz: $x(t) = X(t) \circ c(t)$ für c geeignet!

$$\underset{x \text{ Lsg.}}{\Rightarrow} \quad \dot{x}(t) = A(t) \circ x(t) + b(t) = A(t) \circ \cancel{X(t) \circ c(t)} + b(t)$$

$$\|$$

$$\dot{X}(t) \circ c(t) + X(t) \circ \dot{c}(t) = A(t) \circ \cancel{X(t)} \circ c(t) + X(t) \circ \dot{c}(t)$$

$$\Rightarrow \quad X(t) \circ \dot{c}(t) = b(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{c}(t) = X(t)^{-1} \circ b(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c(t) = \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \circ b(s)\, ds + \underset{\substack{\in \\ \mathbb{R}^n \text{ geeignet}}}{\tilde{c}}}$$

$$\Rightarrow \quad \eta_0 = x(t_0) = X(t_0) \circ c(t_0) = X(t_0) \circ \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{c} = X(t_0)^{-1} \circ \eta_0}$$

Bsp. 32.8

(AWP) $\dot{x} = 2t\cdot x - 2t^3$ mit $x(0) = 1$

① Fundamentalsystem von $\dot{x} = 2tx$:

$$x_h(t) = e^{\int_0^t 2\cdot s\,ds} = e^{s^2|_0^t} = e^{t^2}$$ ist ein Fundamentalsystem!

② Variation der Konstanten

$$x_i(t) = e^{t^2}\cdot\left(e^{-0^2}\cdot 1 + \int_0^t e^{-s^2}\cdot(-2s^3)\,ds\right)$$

$$= e^{t^2} + e^{t^2}\cdot\left(e^{-t^2}\cdot t^2 + e^{-t^2} - 1\right) = t^2 + 1$$

denn: $$\int_0^t e^{-s^2}\cdot(-2\cdot s^3)\,ds = \int_0^t \underbrace{(-2s)\cdot e^{-s^2}}_{= v'(s)}\cdot\underbrace{s^2}_{= u(s)}\,ds$$

$$= v(s)\cdot u(s)\Big|_0^t - \int_0^t v(s)\cdot u'(s)\,ds$$

$$= e^{-s^2}\cdot s^2\Big|_0^t + \int_0^t e^{-s^2}\cdot(-2s)\,ds$$

$$= e^{-t^2}\cdot t^2 + e^{-s^2}\Big|_0^t = e^{-t^2}\cdot t^2 + e^{-t^2} - 1$$

D) Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Def. 32.9

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a_0, \dots, a_{m-1}, b : I \to \mathbb{R}$ seien stetig.

ⓐ Eine DGL der Form $x^{(m)} = a_{m-1}(t) \cdot x^{(m-1)} + \dots + a_0(t) \cdot x + b(t)$ heißt lineare gewöhnliche DGL mit veränderlichen Koeffizienten der Ordnung m.

ⓑ Sind $a_0, \dots, a_{m-1}$ konstant, so heißt $x^{(m)} = a_{m-1} \cdot x^{(m-1)} + \dots + a_0 \cdot x + b(t)$ eine lineare GDGL mit konstanten Koeffizienten der Ordnung m.

ⓒ Die DGL heißt homogen, falls $b \equiv 0$, sonst heißt sie inhomogen.

Bem. 32.10 (Reduktion auf 1. Ordnung)

Setze:
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^m$$

Dann: $\underset{\begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{m-1} \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{z}} : I \to \mathbb{R}^m$ löst das (AWP) $\dot{z} = A(t) \cdot z + \tilde{b}(t)$ mit $z(t_0) = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{m-1} \end{pmatrix}$

$\overset{31.3}{\Longleftrightarrow}$ z_0 löst $x^{(m)} = a_{m-1}(t) \cdot x^{(m-1)} + \dots + a_0(t) \cdot x(t) + b(t)$ mit $x^{(i)}(t_0) = \eta_i \;\; \forall i = 1, \dots, m-1$

und $z_i = \dot{z}_{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, m-1$

Korollar 32.11

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a_0, \dots, a_{m-1}, b : I \to \mathbb{R}$ seien stetig.

ⓐ $L_h = \{ x \in C^m(I, \mathbb{R}) \mid x^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) \cdot x^{(i)} \}$ ist ein Untervektorraum von $C^m(I, \mathbb{R})$ der Dim. m.

ⓑ x Lösung von $x^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) \cdot x^{(i)} + b(t) \Rightarrow L_i = x + L_h = \{ x + y \mid y \in L_h \}$

= Menge aller Lösungen von der DGL

ⓒ $\forall\, t_0 \in I \;\wedge\; \eta = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$; (AWP) $x^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t)\cdot x^{(i)} + b(t)$ mit $x^{(i)}(t_0) = \eta_i$

hat genau eine maximale Lsg. $x \in C^m(I,\mathbb{R})$

ⓓ Variation der Konstanten.

Sei $(x_1, \dots, x_m)$ Basis von L_h und $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ \dot{x}_1 & & \dot{x}_m \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(m-1)} & \cdots & x_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem

sowie $W := \underset{\text{Wronski-Determinante}}{\underset{\shortparallel}{\det(X)}}$ und $W_i := \det(X_{mi})$ mit $X_{mi} = X$ ohne Zeile m und Spalte i

Dann ist $x : I \to \mathbb{R} ;\; t \mapsto \sum_{i=1}^{m} x_i(t)\cdot(-1)^{m+i}\cdot \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(s)\cdot b(s)}{W(s)}\, ds$

eine Lösung der DGL $x^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t)\cdot x^{(i)} + b(t)$.

Beweis:

ⓐ - ⓒ: 32.6 + 32.5 + 32.10

ⓓ Ansatz: $z(t) = X(t)\circ c(t)$

$$\underset{32.7}{\rightsquigarrow} \quad \boxed{X(t)\circ \dot{c}(t) = \tilde{b}(t)} \qquad \frac{(-1)^{m+i}\cdot W_i(t)\cdot b(t)}{W(t)}$$

$$\shortparallel$$

Cramersche Regel $\Rightarrow$ $\dot{c}_i(t) = \frac{\det(B(t))}{\det(X(t))} = \frac{b(t)\cdot(-1)^{m+i}\cdot\det(X_{mi}(t))}{\det(X(t))}$

dabei: $B(t) = $ ersetze in $X(t)$ die i-Spalte durch $\tilde{b}(t)$ $= \begin{pmatrix} x_1 & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{matrix}} & x_m \\ \dot{x}_1 & & \dot{x}_m \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(m-1)} & & x_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$

$\uparrow$ i-te Spalte

$$\Rightarrow \quad c_i(t) = (-1)^{m+i} \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(s)\cdot b(s)}{W(s)}\, ds$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = z_1(t) = (1.\text{ Zeile von } X(t)) \circ c(t) = (x_1(t) \cdots x_m(t)) \circ c(t$$

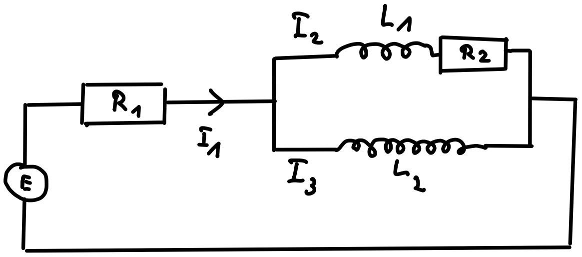
$$= \sum_{i=1}^{m} x_i(t) \cdot c_i(t)$$

$\square$

E) Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten – 1. Ordnung

Beispiel 32.12 (Gekoppelter Schwingkreis)

- Spannung $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Widerstände R_1, R_2
- Spuleninduktivitäten L_1, L_2



- Dann: $$\begin{pmatrix} \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{R_1+R_2}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & \frac{R_1}{L_2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E(t)}{L_1} \\ \frac{E(t)}{L_2} \end{pmatrix}$$

Satz 32.13

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $b: I \to \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 \in I$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$.

ⓐ • $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n: t \mapsto e^{A\cdot(t-t_0)} \circ \eta_0$ ist die eindeutige maximale Lösung des (AWP) $\dot{x} = A \circ x$ mit $x(t_0) = \eta_0$

• $X: \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}): t \mapsto e^{A\cdot t}$ ist ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = A \circ x$.

• $\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n: \binom{t}{\eta} \longmapsto e^{A\cdot t} \circ \eta$ ist der zugehörige globale Fluss.

ⓑ Variation der Konstanten $\Rightarrow x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n: t \mapsto e^{A\cdot(t-t_0)} \circ \eta_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A\cdot(t-s)} \circ b(s)\, ds$

ist die eindeutige Lösung des (AWP) $\dot{x} = A \circ x + b(t)$ mit $x(t_0) = \eta_0$

Beweis

ⓐ · 25.32 $\Longrightarrow$ $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto e^{A\cdot(t-t_0)} \circ \eta_0$ ist stetig diffbar.

mit $\dot{x}(t) = A \circ e^{A\cdot(t-t_0)} \circ \eta_0 = A \bullet x(t)$ und $\underset{e^{A\cdot 0}\circ\eta_0 = \eta_0}{\overset{}{x(t_0)} \atop \|}$

$\Longrightarrow$ x ist eine (maximale) Lösung der (AWP)

und die ist nach 32.3 eindeutig !!!

· $\mathbb{R} \xrightarrow{x^i} \mathbb{R}^n : t \mapsto e^{At} \cdot e_i$ ist "die" Lösung zu $\dot{x} = A \circ x$ mit $\overset{e_i}{\overset{\|}{x(0)}}$

$\underset{32.5}{\Longrightarrow}$ $(x^1, \dots, x^n)$ ist Basis von L_h

$\Longrightarrow$ $X : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : t \mapsto \overset{e^{A\cdot t}}{\overset{\|}{\left(x_1(t) \cdots x_n(t)\right)}} = e^{A\cdot t} \circ \mathbb{1}_n$

ist ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = A \circ x$

ⓑ Setze: $c : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto e^{-A\cdot t_0} \circ \eta_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A\cdot s} \circ b(s)\, ds$

und

$x : I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto e^{A\cdot t} \circ c(t)$

$\underset{32.6}{\overset{\text{ⓐ}}{\Longrightarrow}}$ Beh. $\square$

Bemerkung 32.14

Wie kann man $e^{A\cdot t}$ berechnen?

① $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$

② A symmetrisch $\Rightarrow \exists\, T = (u_1 \cdots u_n) \in Gl_n(\mathbb{R}) : T^{-1} \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T^{-1} \circ e^{At} \circ T \underset{25.32}{=} e^{(T^{-1} \circ A \circ T) \cdot t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{A \cdot t} \circ T = T \circ \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \left(e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, e^{\lambda_n t} \cdot u_n \right)$$

Selber Spaltenraum wie $e^{A \cdot t}$ $\Rightarrow$ ist ein Fundamentalsystem

ⓒ $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in Mat_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow e^{N \cdot t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

Einträge sind Polynome mit Grad < Nilpotenzindex von N

ⓓ $A = \lambda \cdot \mathbb{1}_n + N \overset{25.32}{\underset{\lambda \cdot \mathbb{1}_n \circ N = N \circ \lambda \cdot \mathbb{1}_n}{\Longrightarrow}} e^{At} = e^{\lambda \mathbb{1}_n \cdot t} \circ e^{N \cdot t} = e^{\lambda t} \cdot e^{N t}$

$\overset{\|}{J(\lambda)}$

ⓓ $A = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k) \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{J(\lambda_1) \cdot t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J(\lambda_k) \cdot t} \end{pmatrix}$

Einträge sind von der Form $p(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}$ mit λ Eigenwert von A & p = Polynom mit $\deg(p) <$ Nilpotenzindex von λ

(f) Jordansche NF $\Rightarrow \exists\, T \in GL_n(\mathbb{C}) : T^{-1} \circ A \circ T = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k) \end{pmatrix}$

1. Fall: $\lambda = \lambda_j \in \mathbb{R}$ und zugehöriger Vektor in T reell

$\Rightarrow$ wir bekommen im Fundamentalsystem Einträge der Form $p(t) \cdot e^{\lambda t}$ wie in (e)

2. Fall: $\lambda = \lambda_j = \alpha + i \cdot \beta$

$$\Rightarrow \quad e^{\lambda \cdot t} = e^{\alpha \cdot t} \cdot (\cos(\beta \cdot t) + i \cdot \sin(\beta t))$$

$\Rightarrow$ wir bekommen im Fundamentalsystem Einträge der Form $p(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$ und $p(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t)$

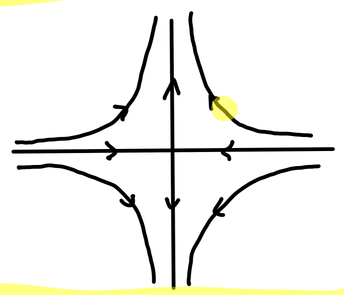
Bem. 32.15 (2-dim. lineare Flüsse)

Bestimme das qualitative Verhalten des Flusses $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

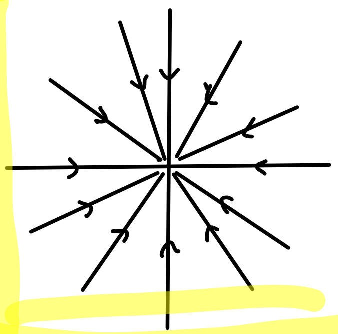
$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto e^{A \cdot t} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

① $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(t, x, y) = (e^{\lambda t} \cdot x,\ e^{\mu t} \cdot y)$

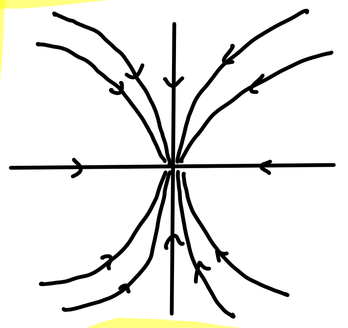
Mögliche Phasen-portraits



$\lambda < 0 < \mu$



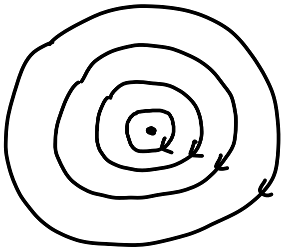
$\lambda = \mu < 0$



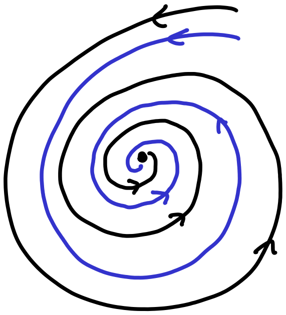
$\lambda < \mu < 0$

② $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\varphi(t,x,y) = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{Streckung}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } \beta \cdot t} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Mögliche Phasenportraits



$\alpha = 0, \ \beta < 0$



$\alpha < 0 < \beta$

E) Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten - höherer Ordnung.

Satz 32.17

Seien $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die DGL $x^{(m)} = a_{m-1} \cdot x^{(m-1)} + \dots + a_0 \cdot x$ und ihr charakteristisches Polynom $\chi = t^m - a_{m-1} \cdot t^{m-1} - \dots - a_0$.

ⓐ $\lambda \in \mathbb{R}$ k-fache Nullstelle von χ

$\Longrightarrow$ $\left(x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; \ t \longmapsto t^i \cdot e^{\lambda t} \ \middle| \ i = 0, \dots, k-1 \right)$ ist lin. unabh. in L_h

ⓑ $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ k-fache Nullstelle von χ

$\Longrightarrow$ $\left(x_i^c , x_i^s \ \middle| \ i = 0, \dots, k-1 \right)$ ist lin. unabh. in L_h,

mit $x_i^c(t) = t^i \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$ und $x_i^s(t) = t^i \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$

Beweis:

32.10 $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} \end{pmatrix}$ ist die Matrix der zugehörigen DGL 1. Ordnung

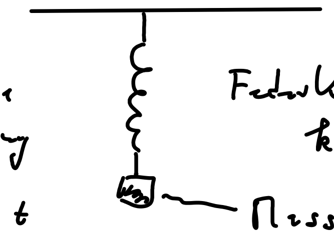
und $\chi_A = t^m - a_{m-1} \cdot t^{m-1} - \dots - a_0$

$= $ char. Polynom von A.

$\underset{32.14}{\Rightarrow}$ Beh.

$\square$

Bsp. 32.17 (Hooksches Gesetz)



$x(t) =$ vertikale Auslenkung zum Zeitpunkt t

Federkonstante $k > 0$

Masse m

auf $\boxed{m}$ wirkt die Kraft $F(x) = -k \cdot x$

Bewegungsgleichung:

Masse × Beschleunigung ≙ Kraft

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

$$\Downarrow$$

$$\chi = t^2 + \frac{k}{m} = (t - i \cdot \omega) \cdot (t + i \cdot \omega) \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x^c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos(\omega t) \\ x^s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \sin(\omega t) \end{array}\right\} \hat{=} \text{ Fundamentalsystem}$$

$\square$