Analysis 2 / Mathe für Physiker:innen 3

Themen:

- metrische + normierte Räume
- topologische Begriffe (offen, abgeschlossen, Rand, Inneres, HP, ...)
- kompakte Mengen + BW + HB
- Folgen in metrischen Räumen
- Äquivalenz von Normen
- Banachräume + Reihen in Banachräumen
- Grenzwerte von Abbildungen in metr. Räumen
- Stetigkeit und einfache Eigenschaften

Fragen

- $\mathbb{Z}^3$ als metrischer Raum

$\to$ $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$

$\leadsto$ $d(x,y) := \|x-y\|_2$

$\leadsto$ $(\mathbb{R}^3, d)$ ist ein metr. Raum

$\Longrightarrow$ $(\mathbb{Z}^3, d)$ " " " "

Was gilt dann für $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

Ist $\mathcal{U}$ offen oder abgeschlossen?

$\mathcal{U}$ offen $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein innerer Punkt

$\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathcal{U}$

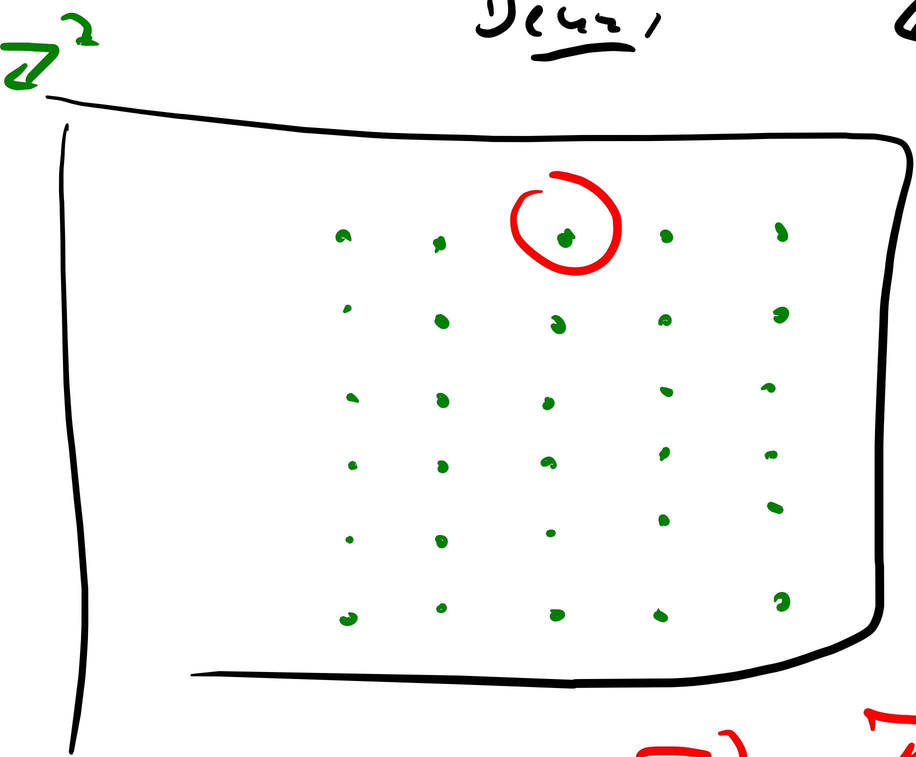
z.B.: $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ x \in \mathbb{Z}^3 \mid d\left(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) < \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{U}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{U}$ ist offen

Beh: $\mathcal{U}$ ist abgeschlossen!

Denn: $\mathbb{Z}^3 \setminus \mathcal{U} = \mathbb{Z}^3 \setminus \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$= \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^3 \setminus \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}} \{x\}$$



ist offen, weil $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \subseteq \{x\}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}^3 \setminus \mathcal{U}$ ist als Vereinigung offener Mengen wieder offen

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ abgeschlossen!

Bemerkung: d ist eine diskrete Metrik auf $\mathbb{Z}^3$

Zeige alternativ: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \underbrace{U}_{=\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\}}$ Folge in U

mit $a_n \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}^3}{\underset{\cap}{a}}$ $\implies$ $a \in U$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche Folge,

$\implies$ $a_n = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\implies$ $a = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in U$.

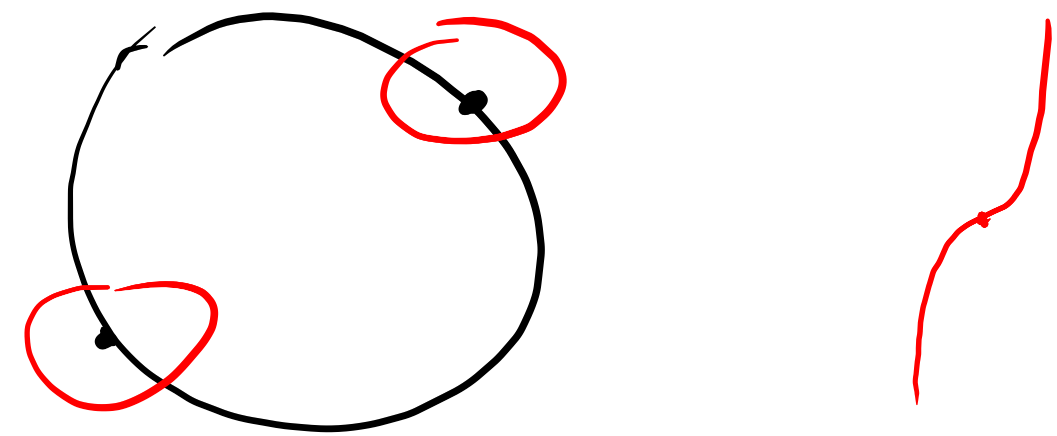
Beachte: (M,d) metrischer Raum, $x \in M$

$\implies$ $\{x\}$ ist abgeschlossen (Argument wie oben)

$\square$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto x + y$$

NB: $x^2 + y^2 = 1$



stetig

$$f_1 : \underline{\left\{ \binom{x}{y} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}} \to \mathbb{R}$$

kompakt

$= g^{-1}(\{1\})$

abgeschlossen + beschränkt

f nimmt $\Leftarrow$ Max + Min an

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto x^2 + y^2$$

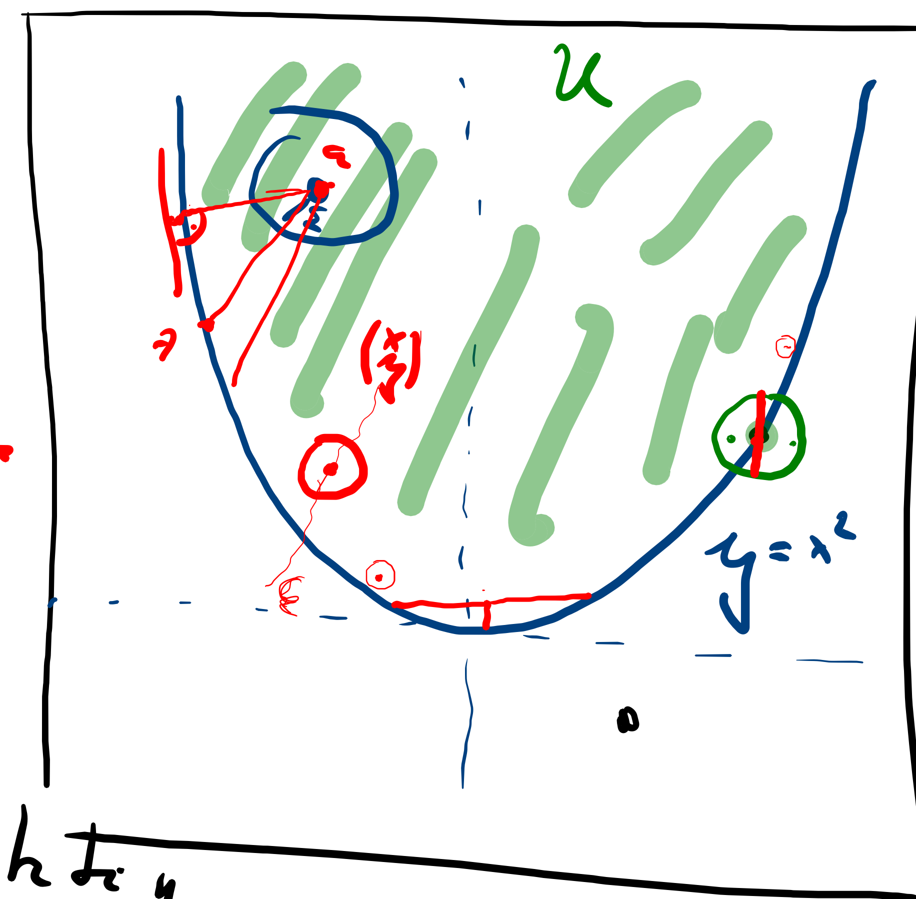
stetig

Beispiele für Mengen: offen, abgeschl., kompakt, Rand

$\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_2$

$$U = \left\{ \binom{x}{y} \;\middle|\; y > x^2 \right\}$$

Bild



Zeige: U ist offen

1. Möglichkeit:

Sei $\binom{x}{y} \in U$. Benutze ein $\varepsilon > 0$,
s.d. $U_\varepsilon\left(\binom{x}{y}\right) \subset U$

unangenehm

2. Möglichkeit

- $y > x^2 \iff y - x^2 > 0$

elegant: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto y - x^2$ ist stetig

$\Rightarrow f^{-1}((0,\infty)) = \left\{ \binom{x}{y} \;\middle|\; 0 < f(x,y) = y - x^2 \right\} = U$ ist offen

Idee: $\partial\mathcal{U} = \{y = x^2\} \Rightarrow \mathcal{U} \cap \partial\mathcal{U} = \emptyset$

$\overset{!}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ ist offen

Bew: $\mathcal{U} \cap \partial\mathcal{U} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}$ offen

z.z: $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U}$

Ang: nicht $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \not\subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ · $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (\Pi \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset$

· $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \partial\mathcal{U}$ ↯ $x \in \mathcal{U}$ & $\mathcal{U} \cap \partial\mathcal{U} = \emptyset$

$\boxed{\S}$

Zeig: $\partial \mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 = y \right\}$

"$\supseteq$" Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $y = x^2$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Betrachte: $\begin{pmatrix} x \\ y + \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\varepsilon\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

weil $d\left(\begin{pmatrix} x \\ y + \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \right\|_2$

$= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

und $\left(y + \frac{\varepsilon}{2}\right) > y = x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y + \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \\ &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\varepsilon\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \partial \mathcal{U}$$

"$\subseteq$" zeige: $\partial U \subseteq \left\{ \binom{x}{y} \mid y = x^2 \right\}$

Alternativ: $x^2 \neq y \Rightarrow \binom{x}{y} \notin \partial U$

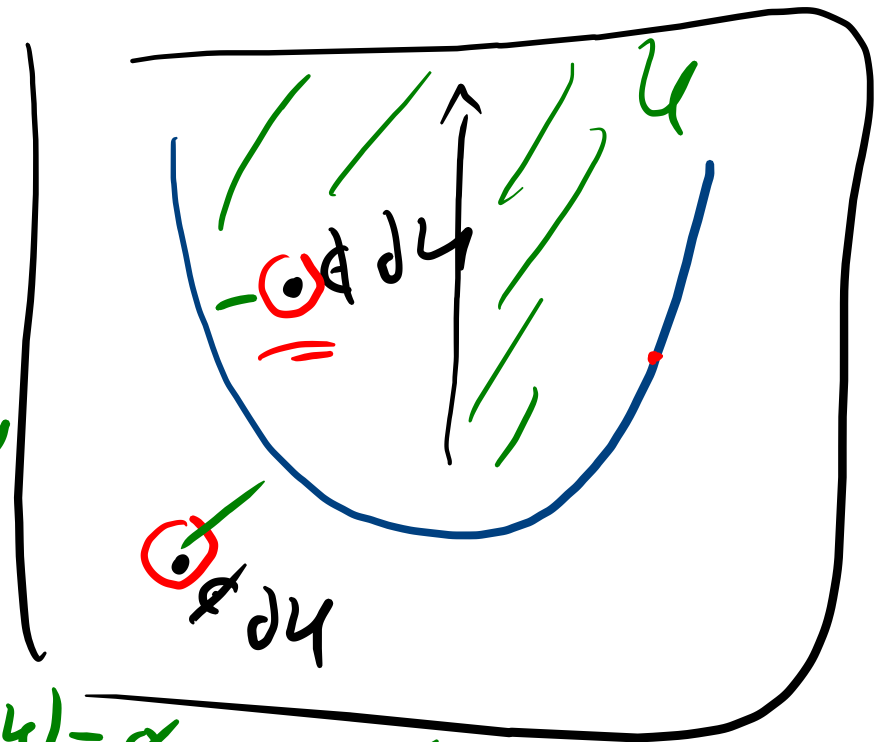
Sei $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 \neq y$

1. Fall: $y > x^2$

$\Rightarrow \binom{x}{y} \in U \overset{U \text{ offen}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon\left(\binom{x}{y}\right) \subseteq U$

$\Downarrow$

$U_\varepsilon\left(\binom{x}{y}\right) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus U) = \emptyset \Rightarrow \binom{x}{y} \notin \partial U$



2. Fall: $y < x^2$

Analog: $\left\{ \binom{x}{y} \mid y < x^2 \right\} = g^{-1}((-\infty, 0))$ ist offen

$\Rightarrow \binom{x}{y} \notin \partial U$ ∎

Ang: U wäre abgeschlossen

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\parallel \\ \left\{ \binom{x}{y} \,\middle|\, y > x^2 \right\}}}{U} = \overline{U} = U \cup \partial U \supseteq \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ \left\{ \binom{x}{y} \,\middle|\, x^2 = y \right\}}}{\partial U}$$

$\lightning$

Also: U nicht abgeschlossen

$\Rightarrow$ U nicht kompakt!

Ändern: U nicht beschränkt!!!

Frage: K abgeschlossen & beschränkt

$\longrightarrow$ K kompakt???

Bsp: $M = \mathbb{R}^n$ mit Metrik durch Norm

$\Longrightarrow$ ja! (Heine-Borel)

Bsp: $M = C([0,1], \mathbb{R})$, d kommt von $\|\cdot\|_\infty$

$\Longrightarrow$ nein!

Stetigkeit

$f: M \longrightarrow M'$ ist stetig in a

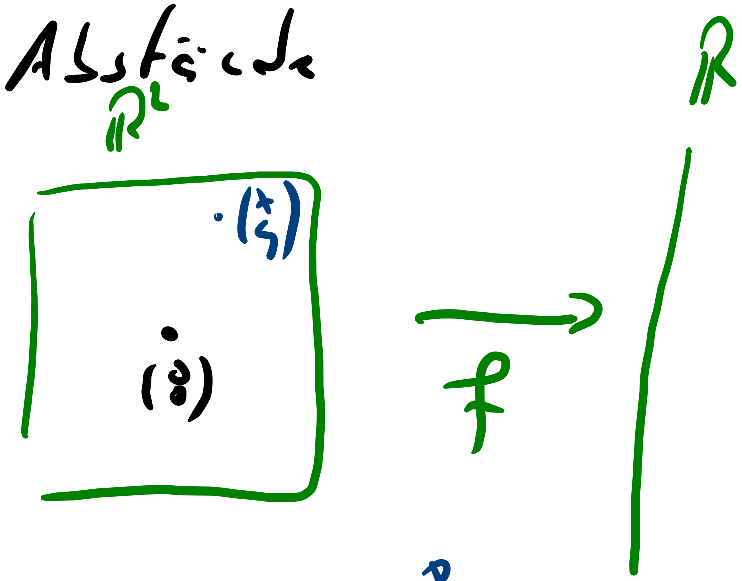
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y$ mit $d(x,y) < \delta_\varepsilon : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \longrightarrow a$ gilt: $f(a_n) \longrightarrow f(a)$

Fk

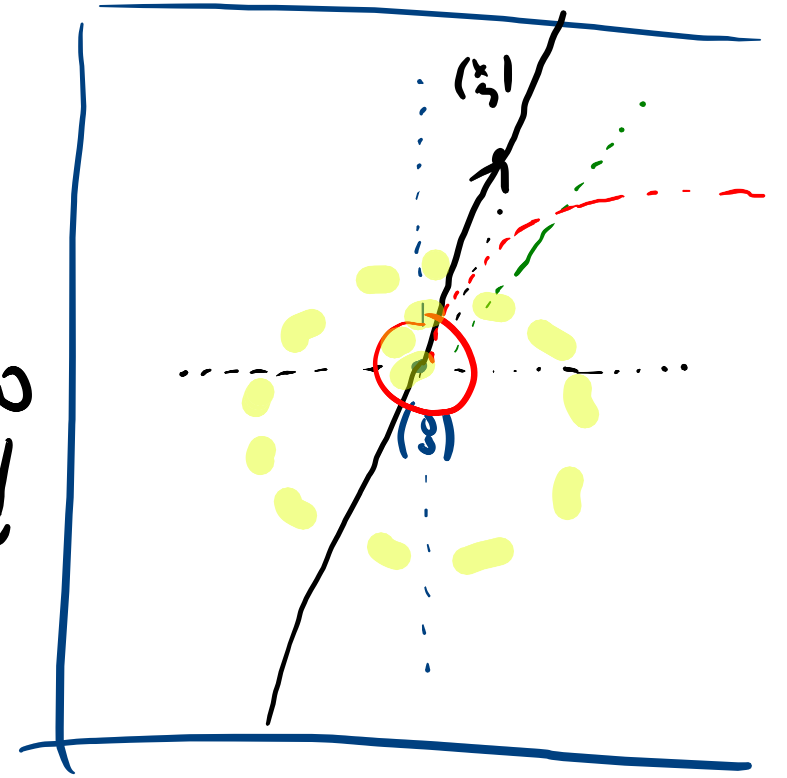
Bsp: $M = \mathbb{R}^2$, $M' = \mathbb{R}$, euklidische Abstände

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$



f rational auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

<u>Frage</u>: ist f stetig in $\binom{0}{0}$



<u>Folgenkriterium anwenden</u>

<u>z.B.</u>: $a_n = \binom{\frac{1}{n}}{0} \Rightarrow f(a_n) = \dfrac{\left(\frac{1}{n}\right) \cdot 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^4} = 0 \longrightarrow 0$

$a_n = \binom{0}{\frac{1}{n}} \Rightarrow f(a_n) = \dfrac{0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} = 0 \longrightarrow 0$

$a_n = \binom{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \Rightarrow f(a_n) = \dfrac{\frac{1}{n} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\cancel{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{4}\,2}} = \dfrac{\frac{1}{n} \to 0}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \longrightarrow \dfrac{0}{1+0} = 0$

$f\binom{x}{y} = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$

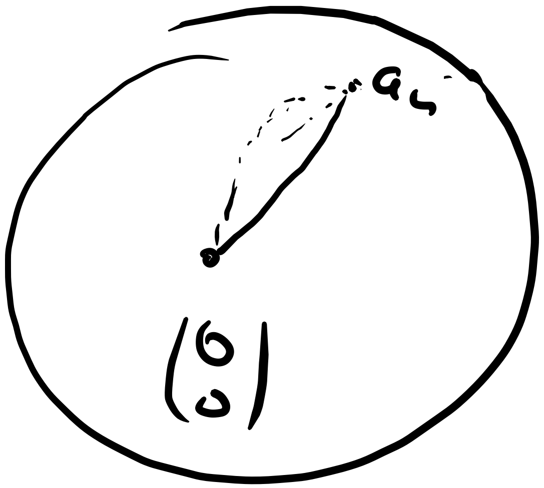
$a_n = t_n \cdot \binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ mit $t_n \to 0$ $\Rightarrow f(a_n) = \dfrac{t_n \cdot x \cdot \cancel{t_n}^{2} \cdot y^2}{\cancel{t_n^2} \cdot x^2 + t_n^{\cancel{4}\,2} \cdot y^4} = \dfrac{t_n \cdot x \cdot y^2}{x^2 + t_n^2 \cdot y^4} \longrightarrow 0$

Folge auf der Geraden durch $\binom{x}{y}$ und $\binom{0}{0}$

Betrachte: $a_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(a_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{2 \cdot \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

Also: $\nexists \lim\limits_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} f\binom{x}{y} \Rightarrow f$ nicht stetig in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Reihen in Banachräumen

$V = \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit eukl. Norm,

d.h. $\|(a_{ij})\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (a_{ij})^2}$

$\Rightarrow$ V ist Banachraum.

Konkret: $n=3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_n = A^n \cdot \frac{1}{n!}$

Ist $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent? Wenn ja, was ist der GW?

$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Idee: !
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|_2}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|_2^n}{n!} = \exp(\|A\|_2) < \infty$$

$\Rightarrow \sum a_n$ abs. konvergent $\Rightarrow$ konvergent.

GW: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall n \geq 3$ $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bsp:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot y^2}{\cos(x^2+y^2)-1} & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ 0 & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

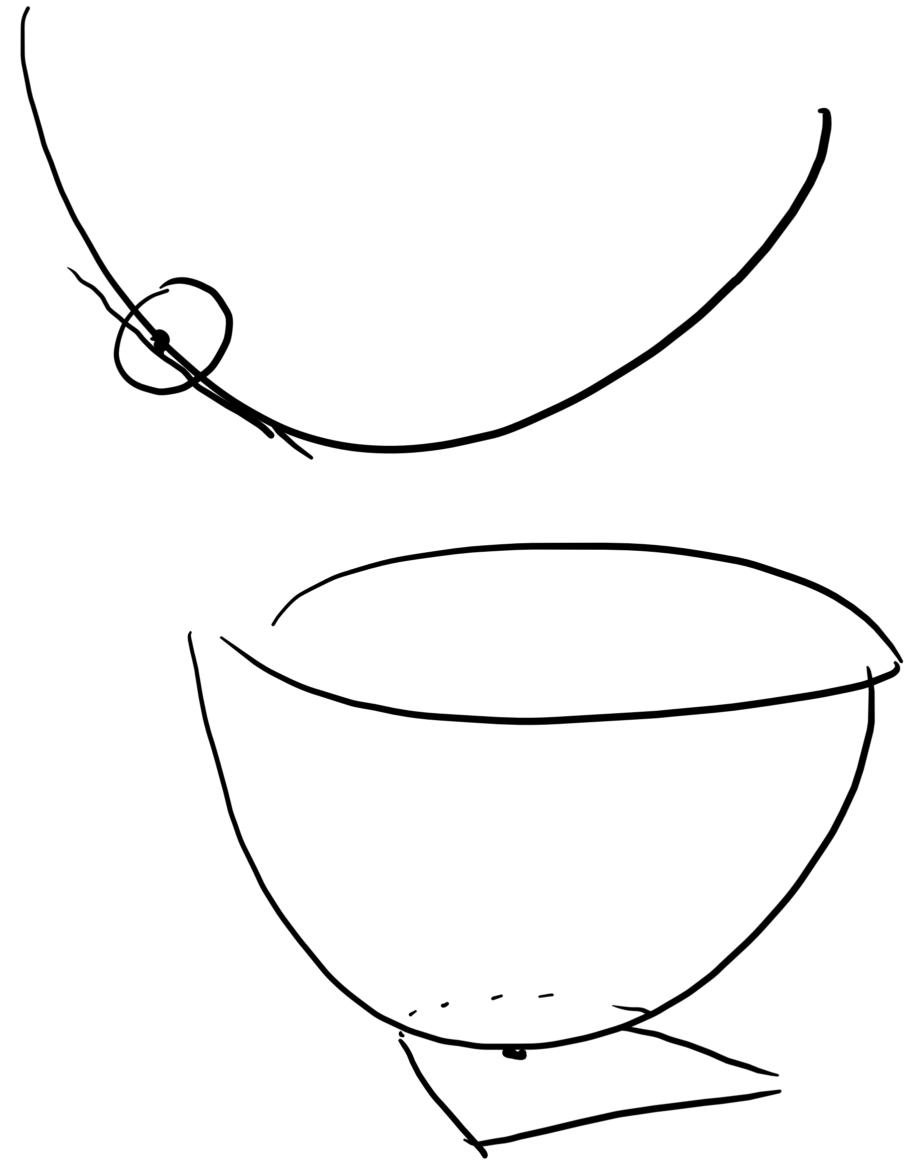
$$\leadsto\ \cos(x^2+y^2)-1=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(x^2+y^2)^{2k}}{(2k)!}-1$$

$$=-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}+\frac{(x^2+y^2)^4}{4!}-\ldots$$

$$\frac{x^2\cdot y^2}{-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}=(-2)\cdot\frac{x^2\cdot y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}$$

$$a_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\longrightarrow\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+2\cdot\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^8}}\longrightarrow 0$$

$$b_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to f(b_n)=\frac{1}{4}\neq 0$$



Analysis II

STETIGKEIT

o.schoen@gmx.de

Was bisher geschah:

- ε-δ Kriterium

$f: M \to M'$, $a \in M$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in M$ mit $d(x, a) < \delta_\varepsilon : d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$

- Folgenkriterium

"Funktion und Limes vertauschen"

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a)$$

- Urbilder offener Mengen sind offen

Lineare Abbildungen

$f: V \to W$, V, W normierte Räume

f linear

Dann sind äqui.

(i) f stetig

(ii) f "beschränkt": $\|f(x)\|_W \leq r \cdot \|x\|_V$

(iii) f ist stetig in 0

Suche Abbildung ℓ linear aber nicht stetig

$$\ell : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt \quad \text{Norm}$$

$$\ell(f) = f(0)$$

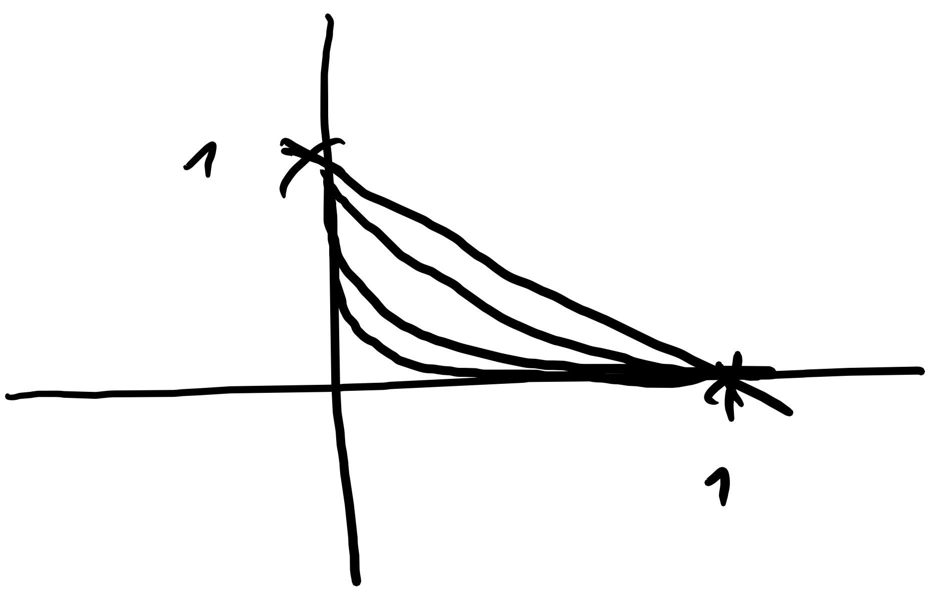
$$\ell(f+g) = (f+g)(0) = f(0) + g(0) = \ell(f) + \ell(g)$$

$$\ell(\alpha f) = (\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha \cdot \ell(f)$$

Ziel $\quad \lim_{n\to\infty} \ell(f_n) \neq \ell(\lim_{n\to\infty} f_n)$

$$f_n(x) = (1-x)^n = (-x+1)^n$$

$$f_n(0) = (1-0)^n = 1^n = 1$$



Idee

$\|f_n\|_1 \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 \neq f\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)$$

$$\| f - g \|_1 = 0 \Rightarrow f = g$$

(i) 0 offen aber $f(0)$ nicht offen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$$

Dann ist $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ offen aber

$$f((0,1)) = \{0\} \text{ nicht offen}$$

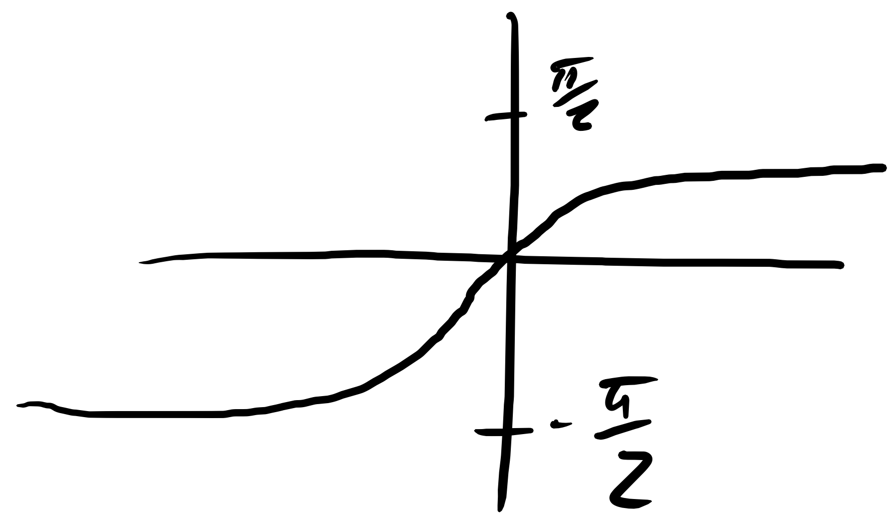
A abg. aber $f(A)$ $\neg$ abg.

$f(x) = e^x$

$f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ nicht abg.

abg.

$f(x) = \arctan(x)$



$f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

offen $\wedge$ nicht abg.

$$f: (0,1) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0$$

$$f((0,1)) = \{0\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = (0,1)$$

Bsp.: Gegenbsp

zu Urbilder kompakte Mengen sind kompakt.

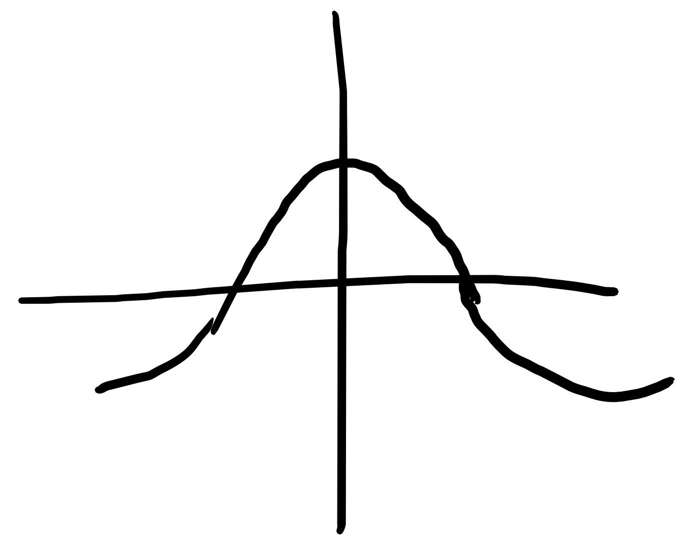
Bsp. zu Stetigkeit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x\cdot y)}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$\cos(y) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0$$



$$f(x,y) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!}(x\cdot y)^{2k}}{y}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4!}x^4 y^3 + \dots \to 0 = f(x_0, 0)$$

Operator

$$D: C^1([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto f'$$

linear (Analysis 1)

$$\|\cdot\|_{max}: C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f \mapsto \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

Zeige: <u>Nicht stetig</u> : $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$

$$f_n'(x) = x^{n-1}$$

$$\| f_n \|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad f_n \to f \quad , \; f(x) = 0$$

$$\| D(f_n) \|_\infty = \| x^{n-1} \|_\infty = 1 \not\to 0$$

$$D(f_n) \not\to D(f)$$

C^1 mit Norm $\| \cdot \|_{C_1} : C^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$f \to \max\{ |f(x)| + |f'(x)| \mid x \in [0,1] \}$$

Möchte

$$\| D(f) \|_\infty \leq r \, \| f \|_{C^1} \quad , \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\| D(f) \|_\infty = \max \{ |f'(x)| : x \in [0,1] \}$$

$$\leq \max \{ \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} + |f'(x)| : x \in [0,1] \}$$

$$= \underbrace{1}_{=: r} \cdot \| f \|_{C^1}$$

$\Rightarrow$ D stetig

Kompakte Mengen

$K \subseteq M$ heißt kompakt, falls

$\forall \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i offen

reichen endlich viele.

Satz

(M, d) metrischer Raum

$$K \subseteq M \text{ kompakt} \Rightarrow K \text{ abg.} \wedge \text{beschränkt}$$

$\overset{?}{\Leftarrow}$ $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ✓ Heine Borel

Satz (Bolzano-Weierstraß)

(M, d) metrischer Raum

$K \subseteq M$ kompakt $\Leftrightarrow$ Jede Folge in K besitzt konvergente TF

Anm 1 Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt kgt. TF.

Bsp (abg. $\wedge$ beschränkt $\wedge$ $\neg$ kompakt)

Betrachte $\left(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \right)$

und $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^n$

Wähle TF $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, dann

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k \to \infty} x^{n_k} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ TF kvgt nie gegen ein

$f \in C([0,1],\mathbb{R})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Betrachte weiter $\overline{U_1(0)} \subseteq C([0,1],\mathbb{R})$

0- Fkt
$x \mapsto 0 \in \mathbb{R}$

Dann ist $\overline{U_1(0)}$ beschränkt $\wedge$ abg.

Wissen (Arzelà - Ascoli)

M kompakt, $(C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Dann

$K \subseteq C(M, \mathbb{R})$ kompakt

$\Leftrightarrow$ (i) K beschränkt

(ii) K abg.

(iii) K gleichstetig

Wäre $\overline{U_1(0)}$ gleichstetig

$\overset{(23.46)}{\Rightarrow}$ Jede Folge in $\overline{U_1(0)}$ besitzt kgl TF.

Aber $\quad f_n \in \overline{U_1(0)}$, da

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq 1$$

$\Rightarrow \quad \overline{U_1(0)} \quad \neg$ gleichstetig

A.A.

$\Rightarrow \quad \overline{U_1(0)}$ <u>nicht kompakt</u>.

Differenzierbarkeit

Ana 1 $\qquad f$ diff'bar $\Rightarrow f$ stetig

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|_2$

$$
\begin{array}{ccccc}
f \text{ stetig} & & f \text{ stetig} & & f \text{ stetig} \\
\Uparrow \;\; \not\Downarrow & & \Uparrow \;\; \not\Downarrow & & \not\Uparrow \;\; \not\Downarrow \\
f \text{ stetig diff'bar} & \Rightarrow & f \text{ total diff'bar} & \Rightarrow & f \text{ partiell diff'bar} \\
 & \not\Leftarrow & & \not\Leftarrow &
\end{array}
$$

$m \times n \cdot n = m$

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) + \rho(x)$$

n-dim Vektor

m-Vektor

Matrix $(m \times n, \mathbb{R})$

Bedingungen !

$$Df(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = ?$$

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + A \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \rho(\vec{x})$$

$$= 0 + \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}^t \cdot \vec{x} + \rho(\vec{x})$$

Bsp.: (partiell diff'bar $\wedge$ $\neg$ total diff'bar)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\frac{x_1^2}{x_2}\right)\right) \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & x_2 \neq 0 \\ 0 & x_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{x} \neq \vec{0}$

$$\left| f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \left(1 - \cos\left(\frac{x_1^2}{x_2}\right)\right) \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0 \right|$$

$-1 \leq \cos \leq 1$

$$\leq 2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$= 2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= 2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f stetig in $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

partielle Ableitungen (Richtungsableitung)

$\partial_v f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $\|\vec{v}\|_2 = 1$ oBdA $v_2 \neq 0$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) - f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\cancel{t}} \left[\left(1 - \cos\left(t \frac{v_1^2}{v_2}\right)\right) \cdot \underbrace{\sqrt{(t v_1)^2 + (t v_2)^2}}_{\cancel{t} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right] = \lim_{t \to 0} \left[\left(1 - \cos\left(t \frac{v_1^2}{v_2}\right)\right) \cdot \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_2 \right]$$

cos stetig $\nearrow$ $= \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_2 \cdot \left(1 - \cos\left(\lim_{t \to 0} t \frac{v_1^2}{v_2}\right)\right)$

$= 0$

$\Rightarrow$ partiell diff'bar in $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \nabla f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

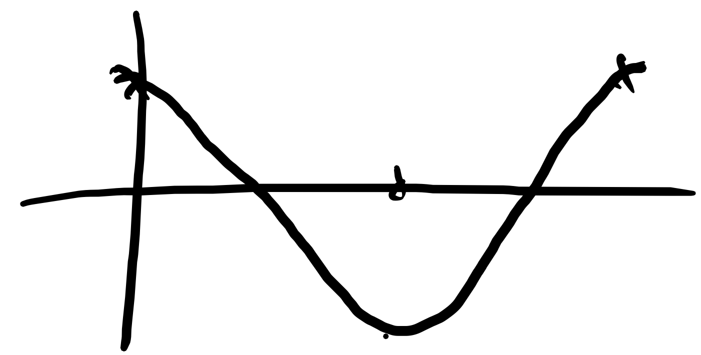
Müssen prüfen:

$$\lim_{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \frac{\rho\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2} \overset{?}{=} 0$$

$$\rho\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \underbrace{f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} - \underbrace{\nabla f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{=0} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Betrachte: $a_n = \begin{pmatrix} 1/n \\ \frac{1}{n^2\cdot\pi} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\rho(a_n)}{\|a_n - \vec{0}\|_2} = \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{(1/n)^2}{\frac{1}{n^2\cdot\pi}}\right)\right)\cdot \cancel{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2\cdot\pi}\right)^2}}}{\cancel{\|a_n - \vec{0}\|_2}}$$



$$= 1 - \cos(\pi)$$

$$= 1 - (-1) = \underline{\underline{2}} \not\to 0$$

$\Rightarrow$ f nicht total diff'bar

$\Rightarrow$ f nicht stetig diff'bar

12.05.'23

Ausflug in die Lineare Algebra

$\mathbb{K}$ Körper , $m, n \in \mathbb{N}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K} \quad \forall\ i = 1, \dots, m$

$\qquad\qquad \forall\ j = 1, \dots, n$

Wo taucht sowas auf in Ana II ?!

(i) Jacobi - Matrix

(ii) Hesse - Matrix

(iii) Gradient

$$f \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad f_i : U \to \mathbb{R}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$$

(i) $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$, f part. diff'bar in U

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$\to \nabla f_1(a)^t$

$\to \nabla f_m(a)^t$

1. Spezialfall $m = 1$

$f : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}$, $a \in U$, f partiell diff'bar in $a \in U$

$$\underbrace{J_f(a)^t}_{\text{Zeilenvektor}} = \underbrace{\nabla f(a)}_{\substack{\text{Spaltenvektor} \\ \text{im } \mathbb{R}^n}} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 (a) \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n (a) \end{pmatrix}$$

Zeigt in die steilste Richtung

2. Spezialfall $m = n$

$\Rightarrow$ Jacobi Matrix ist quadratisch

$f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^n$

↪ $\exists$ Determinante (Funktionaldeterminante)

↪ Koordinatenwechsel

↪ Transformationssatz

Gradient aus Skalarprodukt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$f : U \to \mathbb{R}$, total diff'bar, $a \in U$

$$D_f(a)\cdot h = \langle \underbrace{\nabla f(a)}_{\text{Eindeutig definiert}}, h \rangle, \quad h \in \mathbb{R}^n$$

$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, V Vektorraum

(i) linear in beiden Argumenten $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \langle y, z \rangle$ $\quad \forall x,y,z \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(ii) symmetrisch $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\quad \forall x,y \in V$

(iii) positiv definit $\langle x, x \rangle \geq 0 \wedge \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) Hesse-Matrix

$f: U \to \underbrace{\mathbb{R}}_{}$ $\;\Rightarrow\;$ reellwertig

$$\underbrace{\text{2x stetig diff'bar}}_{(\text{Technisch: } f \in C^2(U,\mathbb{R}))}$$

$\Rightarrow f' \in C^1(U,\mathbb{R})$

$\Downarrow$

$f'' \in C(U,\mathbb{R})$

$a \in U$

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\Delta f = \mathrm{Spur}(H_f)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$

Satz von Schwarz

$\Rightarrow \quad H_f(a)$ symmetrisch

(partielle Ableitung vertauschen)

Insbesondere $H_f(a) = \underbrace{J\,\underbrace{\nabla f}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}(a)}_{\mathbb{R}^{n\times n}}$

$f : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R} \quad \in \quad C^2(U, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad \nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Wie viele 2. Abl. gibt es?

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimension des VR der symmetrischen Matrizen

Extremwerte

Schule: 1. $f'(x) = 0$ lösen, x_0 ist Lösung

2. $f''(x_0) = \begin{cases} < 0 & \text{HP} \\ > 0 & \text{TP} \\ = 0 & ? \end{cases}$

Definitheit

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

falls $\underbrace{x^T A x}_{\in \mathbb{R}} \begin{cases} > 0 & \text{positiv definit} \\ \geq 0 & \text{positiv semidefinit} \\ < 0 & \text{negativ definit} \\ \leq 0 & \text{negativ semidefinit} \\ = 0 & \ldots \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

Es gilt $(f: U \to \mathbb{R},\ f \in C^2(U, \mathbb{R}),\ \nabla f(a) = \vec{0},\ a \in U)$

$H_f(a)$ pos. def. $\Rightarrow$ $f(a)$ iso. lok. min.

$H_f(a)$ neg. def. $\Rightarrow$ $f(a)$ iso. lok. max.

$H_f(a)$ indefinit $\Rightarrow$ $f(a)$ Sattelpunkt

Wie Definitheit bestimmen ?!

<u>Satz</u> A pos. def. $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte positiv

$\Leftrightarrow$ Determinante aller Haupt-Untermatrizen positiv

Hapt Untermatrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = \det\big((a_{11})\big) = a_{11}$$

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Unsere Maschinerie für Extrema

0.) $f \in C^2(U, \mathbb{R})$?

1.) Gradient berechnen (n Ableitungen)

2.) Gradient $= 0$ setzen (n Gleichungen)

3.) Hesse-Matrix berechnen ($\frac{n(n+1)}{2}$ Ableitungen)

4.) Unterdeterminanten (n Stück)

oder Eigenwerte berechnen (einfach für Diagonalmatrizen, sonst kompliziert)

Beispiel:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2$$

0.) ✓

1. Gradient berechnen

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4xy^2 - 6x^2 - 2y^2 + 2x \\ 4x^2y + 4y^3 - 4xy + 2y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $y = 0$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \quad 4x^3 - 6x^2 + 2x \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x(4x^2 - 6x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1/2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $y \neq 0$

$$4x^2y + 4y^3 - 4xy + 2y$$

$$\left(= y\left(4x^2 + 4y^2 - 4x + 2\right)\right)$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x + 2 = \underbrace{(2x-1)^2 + 4y^2 + 1}_{> 0}$$

$\Rightarrow$ oben sind alle kritisch Punkte

3. Hesse Matrix:

$$H_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2+4y^2-12x+2 & 8xy-4y \\ 8xy-4y & 4x^2+12y^2-4x+2 \end{pmatrix}$$

(1) $H_f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Eigenwerte 2 und 2 beide positiv

$\Rightarrow$ $H_f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ pos. def

$\Rightarrow$ $f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ iso. lok. Minimum

$$H_f\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad H_f\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$ indefinit

$\Rightarrow \quad f\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$ Sattelpunkt

Satz über implizite Funktionen

Implizite Funktion

$$7 = f(x) + 2 \quad \rightarrow \quad f(x) = 5$$

$$0 = f(x)^5 + \quad \ldots \quad + f(x)^1 + c$$

Satz

U muss höher-dimensional sein.

Es seien (i) $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen

(ii) $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar — viel ∇

$(f_1, \dots, f_m)$

(iii) $f(a,b) = 0$ wobei $(a,b) \in U$

$f(a,b) = c \Downarrow \underbrace{f(a,b) - c}_{g(a,b)} = 0$

(iv) $\det(D_y(f(a,b))) \neq 0$ — nicht so viel

oftmals viel Arbeit

$= (y_1, \dots, y_n)$

$m \times m$ Matrix

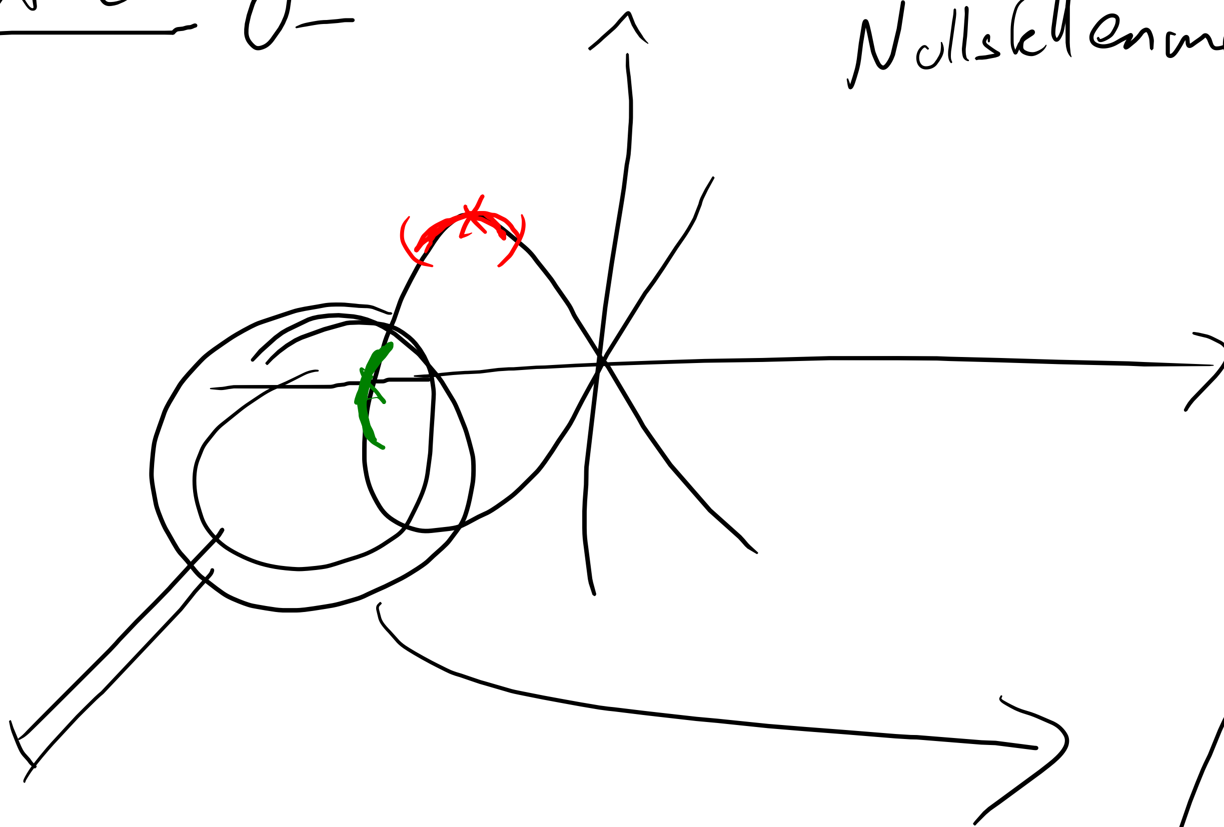
beide Werte im $\mathbb{R}^m$

$$\Longrightarrow \underbrace{\exists\, \varepsilon, r > 0 \;\wedge\; U_\varepsilon(a) \times U_r(b) \subseteq U}_{\text{„es gibt kleinen Bereich"}} \;\wedge$$

$$\exists!\; \rho: \underbrace{U_\varepsilon(a)}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \to \underbrace{U_r(b)}_{\subseteq \mathbb{R}^m}$$

mit (i) $\underbrace{\rho(a) = b}_{\text{„nach ‚b' aufgelöst"}} \;\wedge\; \underbrace{D_\rho(a) = -\left(D_y(f(a,b))\right)^{-1} \circ D_x(f(a,b))}_{\text{DGL für } \rho\,!}$

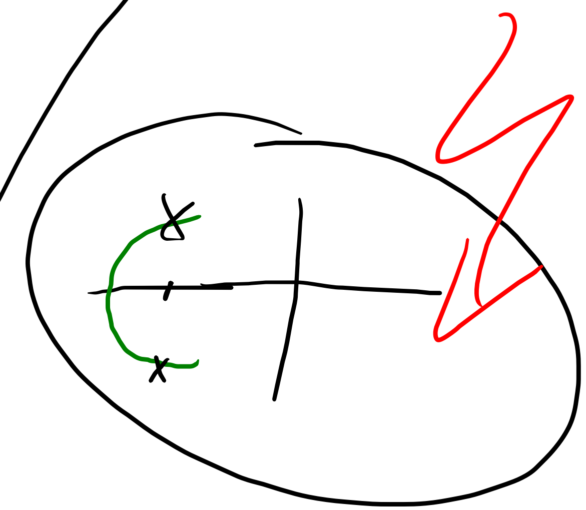
Anschauung



Nullstellenmenge

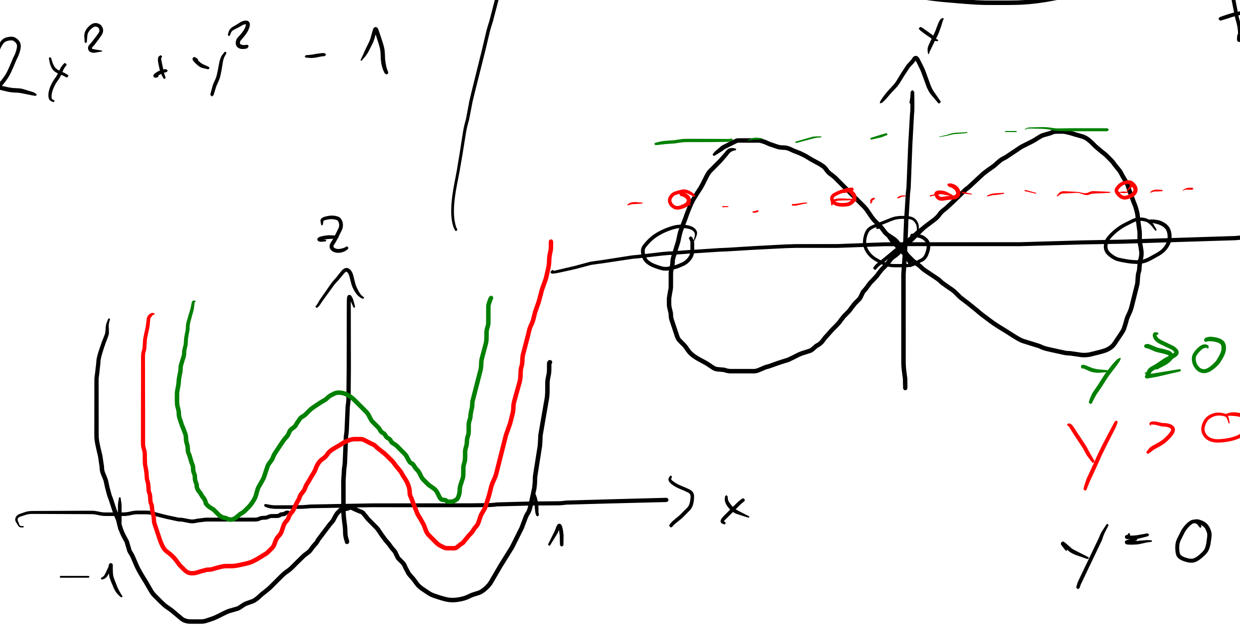
$z(x) = x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

$f(x,y) = x^2 \cdot (x^2-1) + y^2$



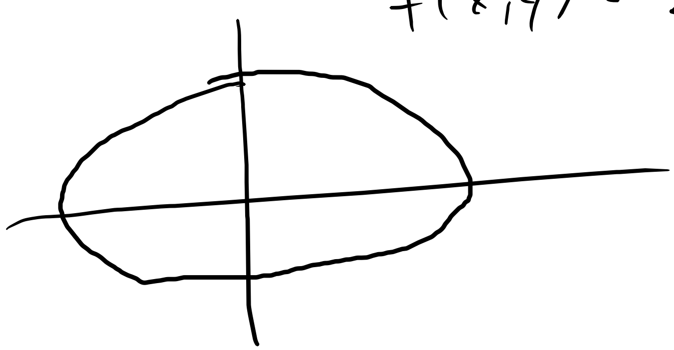
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$z = f(x,y)$



Bsp konstruieren

$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$



Also $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \left(\mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}^1 \right)$ $m=1$, $n=1$

$$f(x,y) = x^2(x^2-1) + y^2 \quad \text{(lässt sich eh auflösen)}$$

Überprüfe Voraussetzungen

(i) ✓ ($\mathbb{R}$ offen)

(ii) Polynom $\Rightarrow$ stetig diffbar ✓

(iii) :

(iv) :

Funktional determinante

($D_y f(x,y)$ ist 1×1 Matrix)

$$D_y f(x,y) = \partial_y f(x,y) \quad \text{mod Objekt}$$

$$= 2y \neq 0 \quad \text{für } y \neq 0$$

Nach Satz $\varphi'(x) = D_y \varphi(y,y) = -\left(D_y f(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x(f(x,\varphi(x)))$

$$= \frac{-1}{2\varphi(x)} \cdot (4x^3 - 2x)$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{-2x^3 + x}{f(x)}$$

$$f'(x) \cdot f(x) = -2x^3 + x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f(x)^2 = -\frac{2}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2$$

$$f(x)^2 = -x^4 + x^2$$

$$f(x,y) = x^2(x^2-1) + y^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow y^2 = -\left(x^2(x^2-1)\right)$$

$$= -x^4 + x^2$$

Satz dankeschön

$\Downarrow$

0

26.05.'23

Haus der Morphismen

Morphismus (abstrakter Begriff)

Homomorphismus $\longrightarrow$ Isomorphismus

(Gruppen, Ring, ...)

$f: (A, \circ) \to (B, *)$

$\underbrace{f(\underbrace{a \circ a'}_{\in A})}_{\in B} = \underbrace{f(a)}_{\in B} * \underbrace{f(a')}_{\in B}$

↳ Homomorphismus + bijektiv

„Räume ‚sehr' gleich"

In Analysis II

Homöomorphismus $\Longleftarrow$ Diffeomorphismus

$\not\Longrightarrow$ 1963

$\left(\Longrightarrow \quad n \leq 3\right)$

Homöomorphismus

$f: X \to Y$

topologische Mengen

i) bijektiv

ii) stetig

iii) f^{-1} auch stetig

(Idee: Suche f stetig + bij.
aber f^{-1} nicht stetig)

Diffeomorphismus

$f: X \to Y$

Teilmengen $\mathbb{R}^n$

i) bijektiv

ii) f stetig diff'bar

iii) f^{-1} stetig diff'bar

$$\left(\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}\right)$$

Extremwerte unter Nebenbedingungen

(z.B. Cola-Dose mit 330 ml und wenig Aluminium)

"Frage: Möglichst viel Volumen und möglichst wenig Oberfläche."

$$\left(\frac{\pi r^{\cancel{2}} \cdot h}{2\pi \cancel{r} \cdot 2 + 2\pi \cancel{r} \cdot \cancel{h}} = \frac{\cancel{\pi} r h}{4\cancel{\pi} + 2\cancel{\pi} h} = \frac{r h}{4 + 2h} \right)$$

2. Strategien

1.) Parametrisierung einsetzen

↳ Immer besser

2.) Lagrange-Multiplikatoren.

Spektralsatz für symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch (d.h. $A = A^T$)

$\Rightarrow$ $\exists$ Eigenwerte $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $\exists$ Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ mit

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ ONB von $\mathbb{R}^n$, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

(Anwendung später in Funktionalanalysis oder Quantenmechanik)

Bsp: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ONB von $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}e\\\pi\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \pi \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Großes Bsp.

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto \langle Ax, x \rangle, \quad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \wedge \text{ symmetrisch } (A^T = A)$$

$$M(Y) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1 \wedge \langle x, y \rangle \ \forall y \in Y \} \subseteq S^{n-1}$$

$Y \subseteq \mathbb{R}^n$

$$S^{n-1} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1 \}$$

Also $\quad M(\emptyset) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1 \} = S^{n-1}$

(i) $\exists$ $y_1, \dots, y_n$ s.d.

$$\lambda_1 := f(y_1) = \max\{f(x) \mid x \in M(\emptyset)\}$$

$$\lambda_2 := f(y_2) = \max\{f(x) \mid x \in M(\{y_1\})\}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i := f(y_i) = \max\{f(x) \mid x \in M(\{y_1, \dots, y_{i-1}\})\}$$

$$\vdots$$

Bew. Es ist $M(\emptyset) = S^{n-1}$ kompakt (Heine-Borel)

$\Rightarrow$ f nimmt Maximum an $\Rightarrow$ $\exists y_1$ s.d. $f(y_1) = \max$

$M(\{y_1\}) = S^{n-1} \cap g^{-1}(\{0\})$, $g(x) = \langle x, y_1 \rangle$

kompakt da g stetig $\Rightarrow$ $\exists y_2$ sd: $f(y_2) = \max \dots$

(ii) $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$

<u>Beweis</u>

Es gilt $\mathcal{M}(\phi) \supseteq \mathcal{M}(\{y_1\}) \supseteq \mathcal{M}(\{y_1, y_2\}) \ldots$

$\Rightarrow f(\mathcal{M}(\phi)) \geq f(\mathcal{M}\{y_1\}) \geq \ldots$

$\geq$

$\max\{f(\mathcal{M}(\phi))\} \geq \max\{f(\mathcal{M}\{y_1\})\}$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & & & \\ \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq \ldots & \geq \lambda_n \end{array}$$

(iii) Es gilt $A y_i = \lambda_i y_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

<u>Beweis</u> (Induktion)

<u>$i = 1$</u>: Für y_1 ist NB $g(x) = \|x\|_2 - 1$

$\hookrightarrow \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\|x\|_2 = 1$: $\operatorname{rang}(\underbrace{Dg(x)}_{1 \times n \text{ Matrix}}) = \operatorname{rang}\left(\frac{x_1}{\|x\|_2}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|_2}\right) = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\|x\|_2 - 1\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} - 1\right)$$

$$= \frac{x_1}{\|x\|_2}$$

$f(x) = \langle Ax, x \rangle$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Lagrange

$\Rightarrow \quad \exists\, b_1 \in \mathbb{R}: \boxed{\underbrace{Df(y_1)}_{1 \times n} = b_1 \cdot \underbrace{Dg(y_1)}_{1 \times n}}$

$$Df(y_1) = b_1 \cdot Dg(y_1)$$

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$2 \cdot A y_1 = b_1 \cdot y_1$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\Rightarrow \boxed{A y_1 = \frac{b_1}{2} \cdot y_1}$$

$\Rightarrow$ $\frac{b_1}{2}$ EW zu EV y_1

$$\lambda_1 := f(y_1) = \langle A y_1, y_1 \rangle = \left\langle \frac{b_1}{2} y_1, y_1 \right\rangle = \frac{b_1}{2} \langle y_1, y_1 \rangle = \frac{b_1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\underbrace{\delta_{ik}}_{1 \text{ falls } i=k} x_j + \delta_{jk} x_i \right)$$

$$\overset{A \text{ sym.}}{=} 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = 2 \cdot (Ax)_k$$

$$\Rightarrow \quad A y_1 = \lambda_1 y_1$$

$\vdots$ I.S.

$$A y_i = \lambda_i y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$ Spektralsatz

16.06.23

Integrierbarkeit

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, beschränkt

$a_i < b_i$
$\forall\ i = 1, \ldots, n$

f integrierbar $:\Longleftrightarrow$ $\overline{I} = \underline{I}$

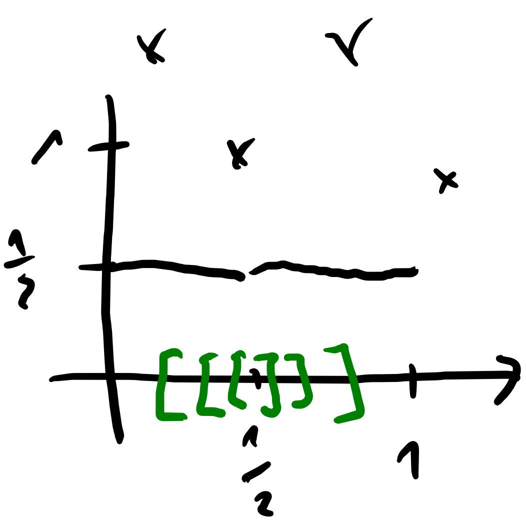
$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists Z: OS(Z) - US(Z) < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ Riem. Folgenkriterium

$\Longleftrightarrow$ Riem. Zwischensummenkriterium

$\Longleftrightarrow$ f stetig f.ü.

$\Longleftarrow$ f stetig



!

$\underbrace{\text{fast überall}}$ stetig $\Leftrightarrow$ stetig außerhalb einer Nullmenge

f. ü.

a. e. (eng.)

$\Downarrow$

"wenig"

"Überdeckung mit Quadern mit beliebig kleinem Volumen"

Bsp.: $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist eine Nullmenge.

$\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ —— " ——.

$$f: \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ $\exists\, x_i$ beliebig nah an $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\lightning$

$\exists \ (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $a_n \to \frac{\sqrt{2}}{2}$ $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ bel.

Dann

$$0 = f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) = f(a) = 1$$

Ausflug

$$e^x \qquad e^2 = e \cdot e$$

$$e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{in 2 Wochen})$$

Bsp. zum Übungsblatt

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 1/N(x) & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei $N(x) = \dfrac{b}{\operatorname{ggT}(a,b)}$ wobei $x = \dfrac{a}{b}$.

$N(0) := 1$

x	0	1	$1/2$	$1/3$	$2/3$	$1/4$	$3/4$	$2/4$
$N(x)$	1	1	2	3	3	4	4	2
$1/N(x)$	1	1	$1/2$	$1/3$	$1/3$	$1/4$	$1/4$	$1/2$

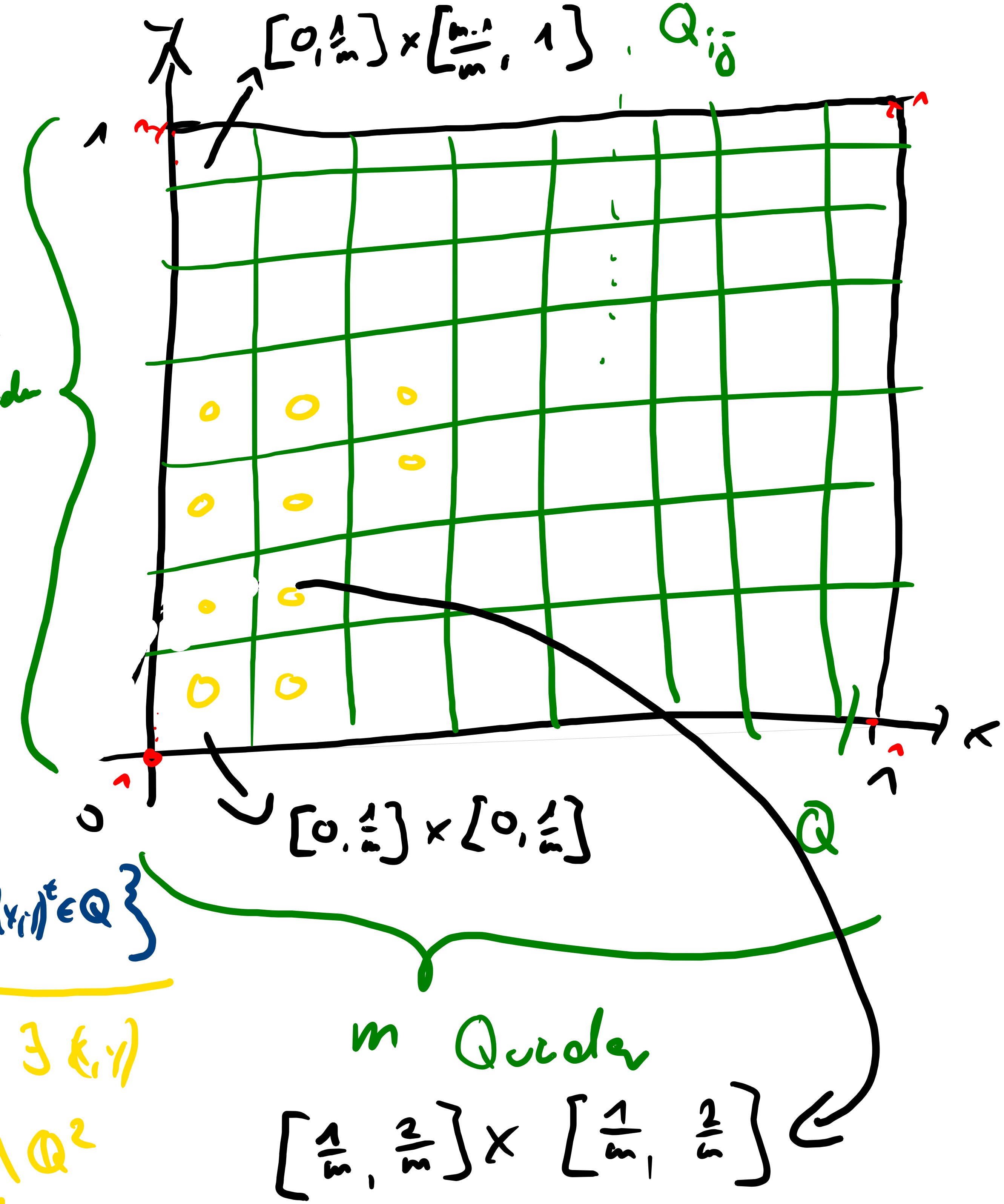
Integrierbar ?

äquid. Zerlegung Z^m

$Z^m = Z_x^m \times Z_y^m$

$Q = Q^x \times Q_y \in TQ(Z^m)$

$\hookrightarrow |TQ(Z^m)| = m^2$



$$US(f,Z^m) = \sum_{Q\in TQ(Z^m)} \overset{1/m^2}{V(Q)} \cdot \underbrace{\inf\{f \mid (x,y)^t \in Q\}}_{0,\ \text{da } \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2 \text{ in jedem Quader}}$$

$\hookrightarrow m^2$ Summanden

$= 0$

$\Rightarrow UI(f) = 0$

Obersumme

$$OS(f, Z^n) = \sum_{Q \in \bar{Q}(Z^n)} \overset{1/n^2}{V(Q)} \cdot \sup\{ f \mid (x,y)^t \in Q \}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \overset{1/n^2}{V(Q_{ij})} \cdot \sup\{ f \mid (x,y)^t \in Q_{ij} \}$$

$$= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \cdot \sup\left\{ \frac{1}{N(x)} \;\middle|\; x \in Q \cap Q_{ij}^* \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup\left\{ \frac{1}{N(x)} \;\middle|\; x \in Q \cap Q_{ij}^* \right\}$$

$$< \frac{1}{n} \cdot \left(2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + (n-1) \cdot \frac{1}{n} \right)$$

$$n = 2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = 2 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)+4} \cdot \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)+4} \cdot \left(2 + n - 1 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1}}_{\geq 0}\right) \quad (\ddot{u})$$

$$< \frac{2}{n(n-1)+4} \cdot (2 + n - 1)$$

$$= \frac{2 \cdot (2+n-1)}{n(n-1)+4} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \overline{OI}(f) = 0 = \underline{UI}(f) \Rightarrow f \text{ integrierbar}$$

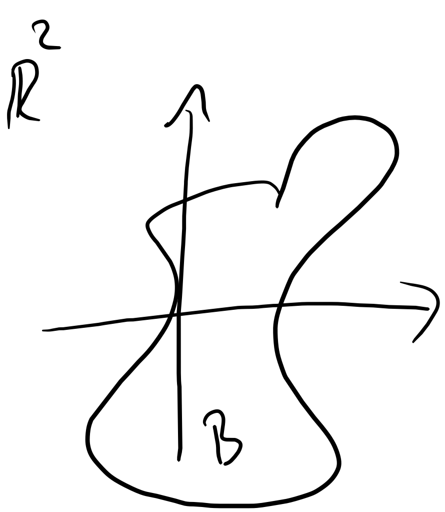
30.06.2025

Problem bisher: Integration nur auf Quader

Lösung: Jordan Messbare Mengen !

Kriterium: $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan messbar

$\iff$ ∂B ist eine Nullmenge



Das Prinzip von Cavalieri

„Eingeschlossene Mengen sind Jordan messbar"

! **Transformationssatz** !

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, U offen, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismus

mit $\det(D\varphi(x))$ Vorzeichen nicht wechselt,

$B \subseteq U$ J.m. $\wedge$ kompakt $f: \varphi(B) \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \int_{\varphi(B)} f(x)\,dx = \int_B f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\,dx$$

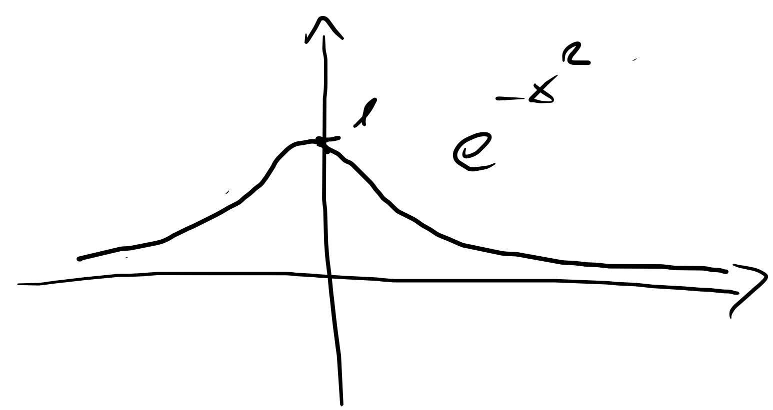
Beispiele :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}_{\text{reeller Zusammenhang}}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

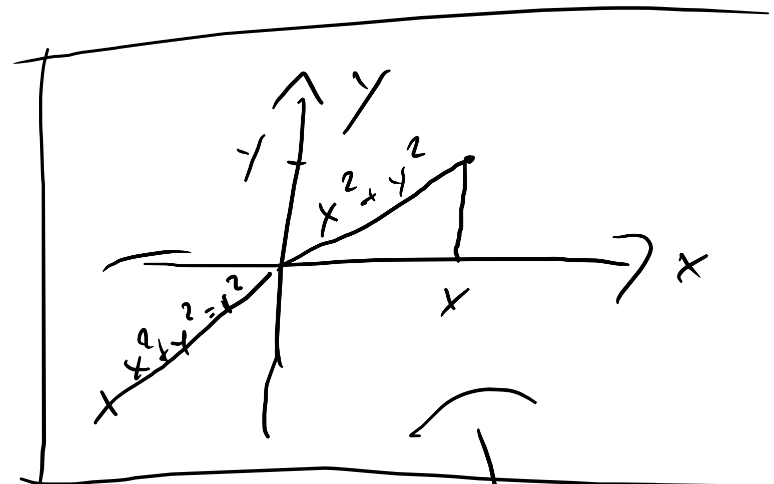
$$-\frac{1}{2x} \cdot e^{-x^2}$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx =$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad \Big|\ (\ )^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \pi$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\,dx\,dy = \pi$$

$$f(x) \cdot f(y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2} = f(r)$$

S. d. Py.

$$f(x) \oplus f(y) = f(r)$$
$$x^2 \oplus y^2 = r^2$$

$\Rightarrow$ π durch Kreis

$$f(x) \cdot f(y) = e^{-(x^2+y^2)}$$ rotationssymmetrisch

Idee: Polarkoordinaten:

$$\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D(\rho(r,\theta)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \to \det(D\rho) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)$$
$$= r\,(\underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_{=1}) = r$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Identisch bis auf Nullmenge

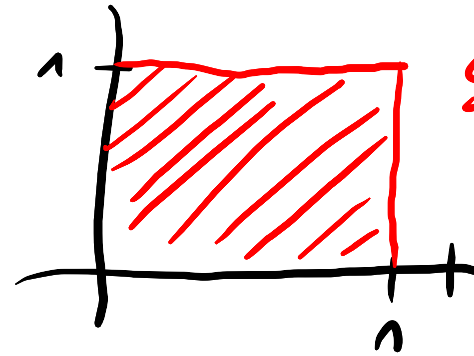
$$= \int_{\varphi([0,\infty)\times[0,2\pi))} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot \overbrace{|\det D\varphi(r,\theta)|}^{=r}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \pi$$

07.07.2023

Georg Cantor

$\mathbb{R}$ "="  $\subseteq \mathbb{R}$ "="  $\subseteq \mathbb{R}^2$ "≠"

$\mathbb{N}$ "=" 'gerade Zahlen' "=" $\mathbb{Q}$

Kontinuumshypothese ?!

Cantor Menge

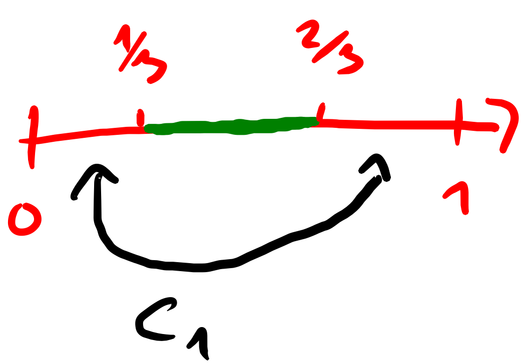
$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

$$U_n := \left\{ \frac{x}{3}, \frac{x+2}{3} \;\middle|\; x \in U_{n-1} \right\}$$

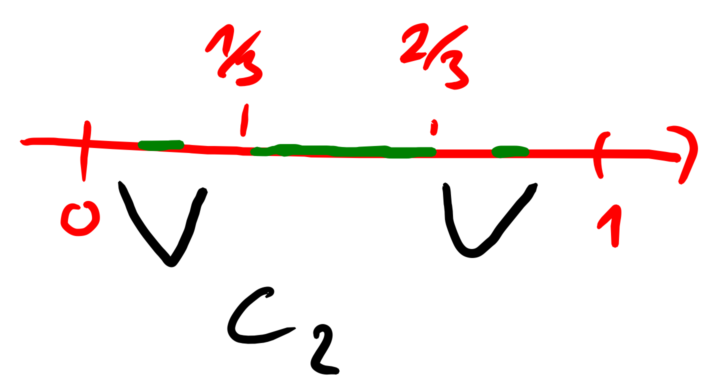
$$U_1 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$C_n := [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k$$

C_1



C_2



. . . .

Beweisidee

$\subseteq [0,1]$

$$\# \{0,1\}^{\mathbb{N}} \leq \# C \leq \# \mathbb{R}$$

Injektiv

$=$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ Alle Abb $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \ni$

$\|$

Abb: $\mathbb{N} \to \{0,1\}$, $(0,0,1,1,0,1,\ldots)$

$(0,0,0,\ldots)$

$(1,1,1,\ldots)$

Zahl zwischen 0 und 1 in Binär

$$0{,}5 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$0{,}75 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} \dots$$

$\rightarrow (1, 0, \dots)$

$\rightarrow (1, 1, 0, 0, \dots)$

$\rightarrow$ wegen eindeutiger Darstellung im Binärsystem

$$0{,}5 = 5 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10^2} + 0 \cdot \frac{1}{10^3} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \# \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \# [0,1] = \# \mathbb{R}$$

$1 = 0,\overline{9}$

$0,1 = 0,0\overline{9}$ $\quad$! Bijektion

Haben $\# \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \# \mathbb{R}$

$$\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow C$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\, a_{k-1}}{3^k}$$

Wohldefiniert? (i) Konvergenz: konst. 1 Folge $\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$

(↳) Majorantenkriterium $= 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ ✓

(ii) Nach C abbilden?

Wollen zeigen: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2a_{k-1}}{3^k} \in [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k = C_n$

Induktion: $n=1$

$a_0 \in \{0,1\}$ → (i) $\frac{2a_0}{3} = \frac{2}{3} \in C_1$ ✓

→ (ii) $\frac{2a_0}{3} = 0 \in C_1$

I.B. $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2a_{k-1}}{3^k} \in C_n$$

I.S. $n \mapsto n+1$ $\quad y = \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} \overset{\text{I.B.}}{\in} C_n$

$x = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2a_{k-1}}{3^k} \in \left\{ \frac{y}{3}, \frac{y+2}{3} \right\}$

$\Rightarrow x \in C_{n+1}$ ✓

2. Injektiv ?

$$\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_{k-1}}{3^k}$$

Ja da 3-adische Darstellung eindeutig

$\hookrightarrow$ injektiv

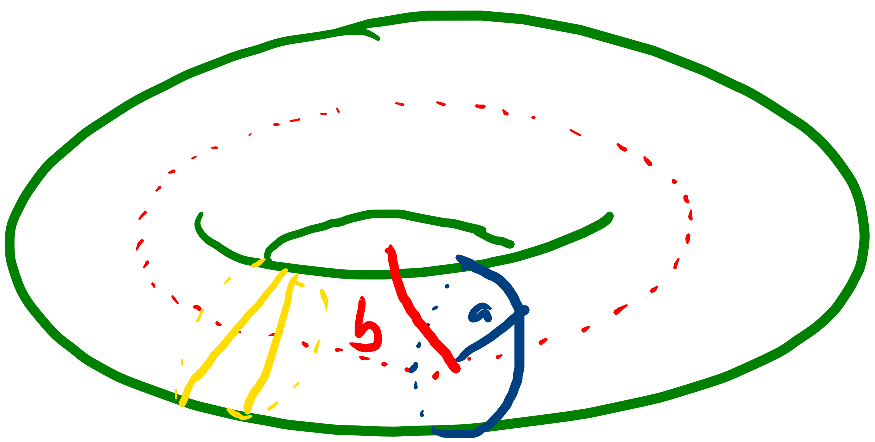
$0,\overline{33} \hat{=} 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots$

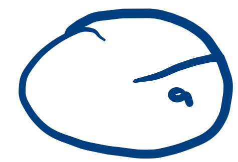
$0,\overline{6} \hat{=} 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots$

$\Rightarrow \quad \# \{0,1\}^{\mathbb{N}} \leq \# C \leq \# \mathbb{R} \Rightarrow C$ überabzählbar

IV. Donut

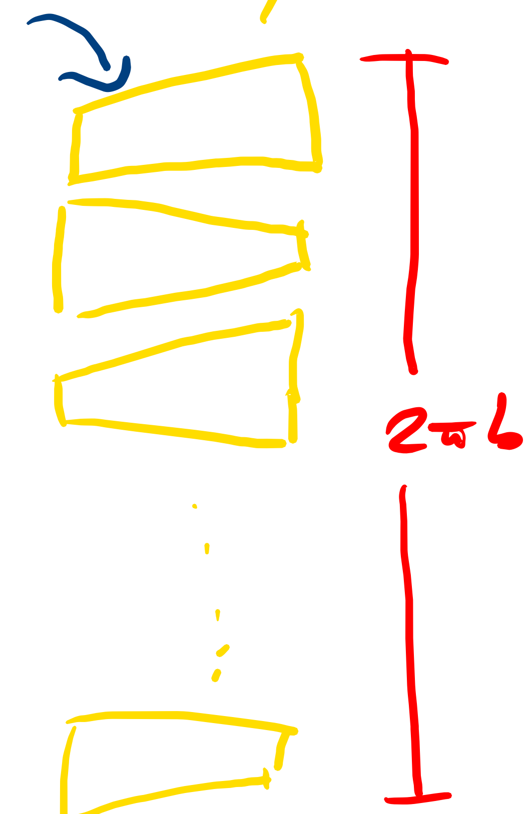
Volumen?



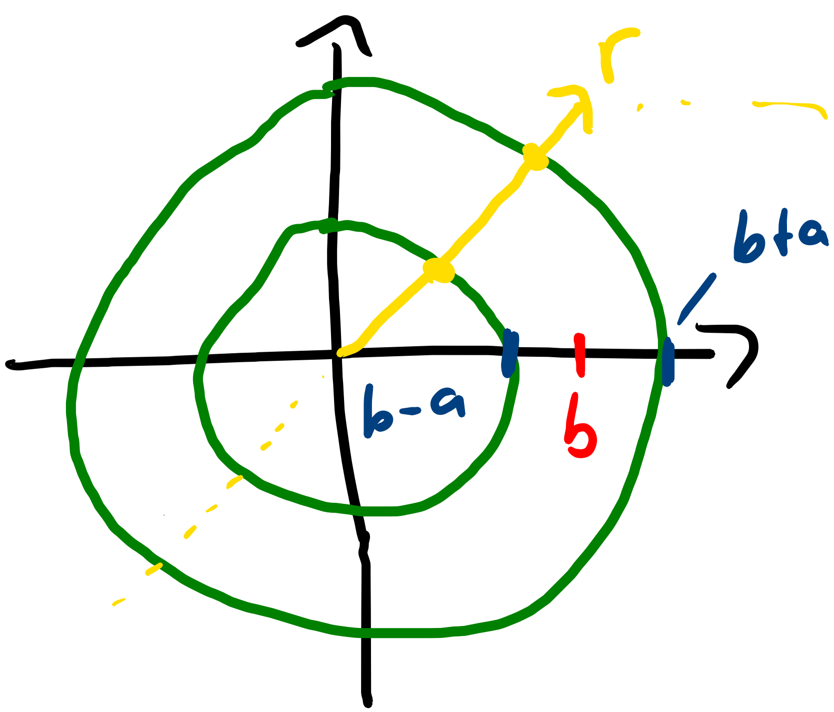


πa^2

$V = 2\pi^2 a^2 b$

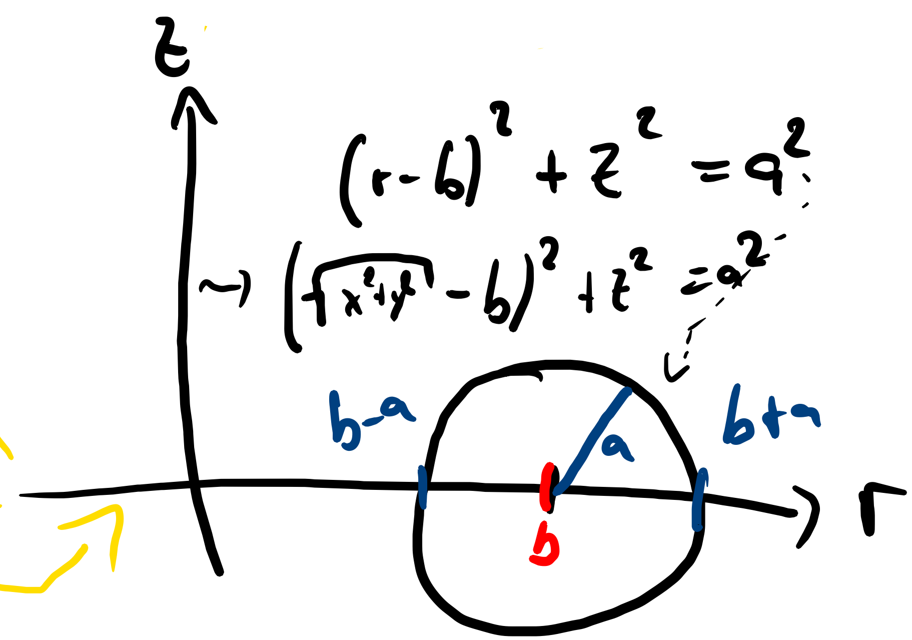


von oben (z-Achse)



$$(r-b)^2 + z^2 = a^2$$

$$\rightsquigarrow \left(\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2$$



$$(r-b)^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{Zyl.}: \Phi(r,\theta,z)$$

$$\hookrightarrow r \in [b-a,\, b+a]$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$z \in \Big[-\underbrace{\sqrt{a^2-(r-b)^2}}_{-u},\ \underbrace{\sqrt{a^2-(r-b)^2}}_{u}\Big]$$

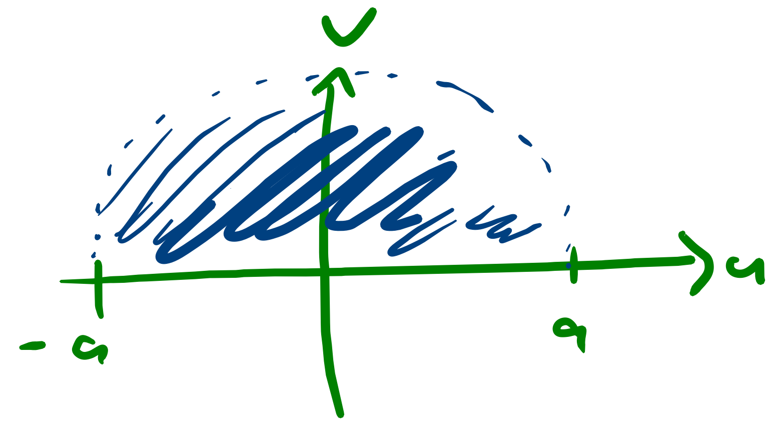
$$\Rightarrow \iiint_T 1\, d(x,y,z) \overset{\text{T.S.}}{=} 2\cdot \int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\int_{\cancel{-u}\ 0}^{u} 1 \cdot \underbrace{|\det(D\Phi)|}_{=r}\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2\cdot \int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a} r\cdot \sqrt{a^2-(r-b)^2}\, dr\, d\theta \overset{\text{Fubini}}{=} 2\cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{b-a}^{b+a} r\cdot\sqrt{a^2-(r-b)^2}\, dr$$

$$= 4\pi \cdot \int_{\substack{r=b-a \\ u=-a}}^{\substack{u=a \\ r=b+a}} \underbrace{r}_{u+b} \cdot \sqrt{a^2-\underbrace{(r-b)}_{u}{}^2}\; dr$$

$u = r - b \Rightarrow r = u + b$

"$\frac{du}{dr} = 1$" $\Rightarrow$ "$du = dr$"



$$= 4\pi \int_{-a}^{a} (u+b) \cdot \sqrt{a^2-u^2}\; du$$

$v^2 = a^2 - u^2 \Leftrightarrow a^2 = v^2 + u^2$

Lin.

$$= 4\pi \left(\cancel{\underbrace{\int_{-a}^{a} \underbrace{u}_{\text{ug}} \underbrace{\sqrt{a^2-u^2}}_{\text{gu}}}_{\text{ung}}\; du} \to 0 + \int_{-a}^{a} \underbrace{b \cdot \sqrt{a^2-u^2}}_{\text{ge.}}\; du \right)$$

$$= 4\pi b \int_{-a}^{a} \overbrace{\sqrt{a^2-u^2}}^{v}\; du = 4\pi b \, \frac{1}{2} \pi a^2 = \underline{\underline{2\pi^2 a^2 b}}$$

14.07.23

Filmempfehlung: Hidden Figures

Differentialgleichungen

- gewöhnliche
- (partielle DGL) (gigantisch)

Newton: System mit N Teilchen folgt

$\ddot{q}_k$ Newton

$\frac{d^2}{dt^2} q_k$ Leibniz

$$m_k \cdot \ddot{q}_k(t) = \text{"force"}, \quad q: I \to \mathbb{R}^3$$

Beschleunigung vom k-ten Teilchen

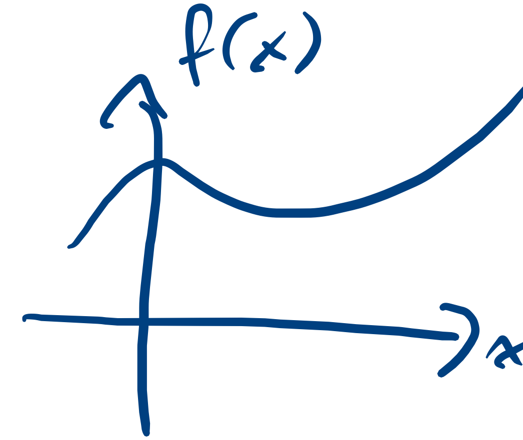
$$m_k \cdot \ddot{q}_k(t) = \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} G m_k m_j \frac{q_j - q_k}{|q_j - q_k|^3}}_{\text{Gravitation}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{e_j e_k}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_j - q_k}{|q_j - q_k|^3}}_{\text{Elektrizität}}$$

+ Relativität + Magnetismus

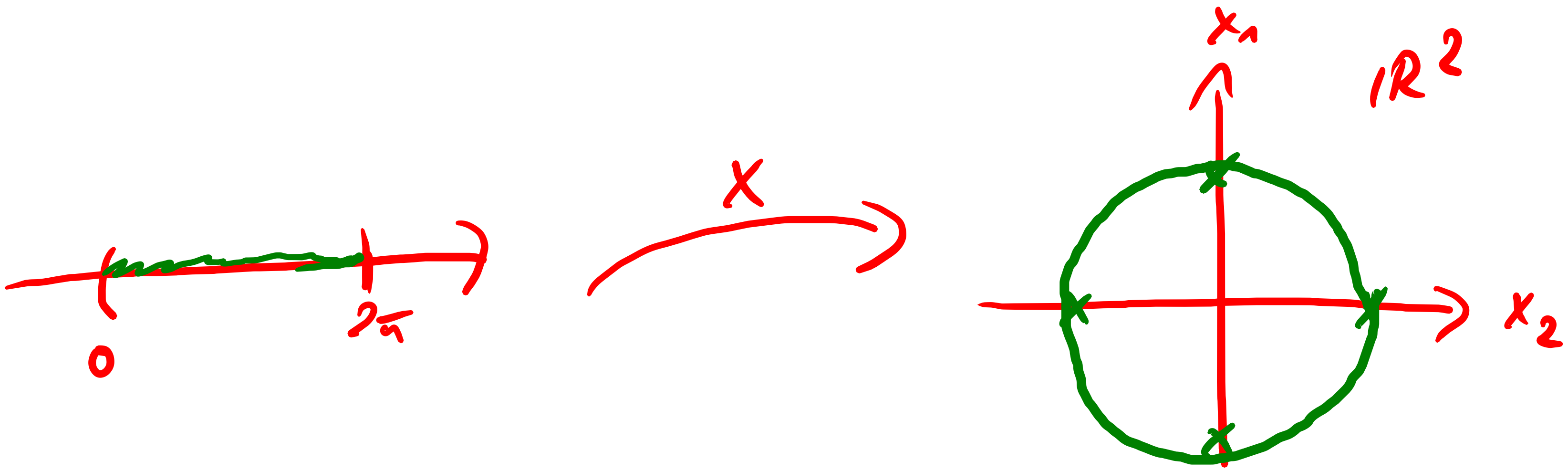
Gewöhnlich? $\rightsquigarrow$ 1 Variable nach der man ableiten kann

$\hookrightarrow \quad x : \underbrace{I}_{\subseteq \mathbb{R}} \to \mathbb{R}^n$ (1-dimensional normalerweise t)

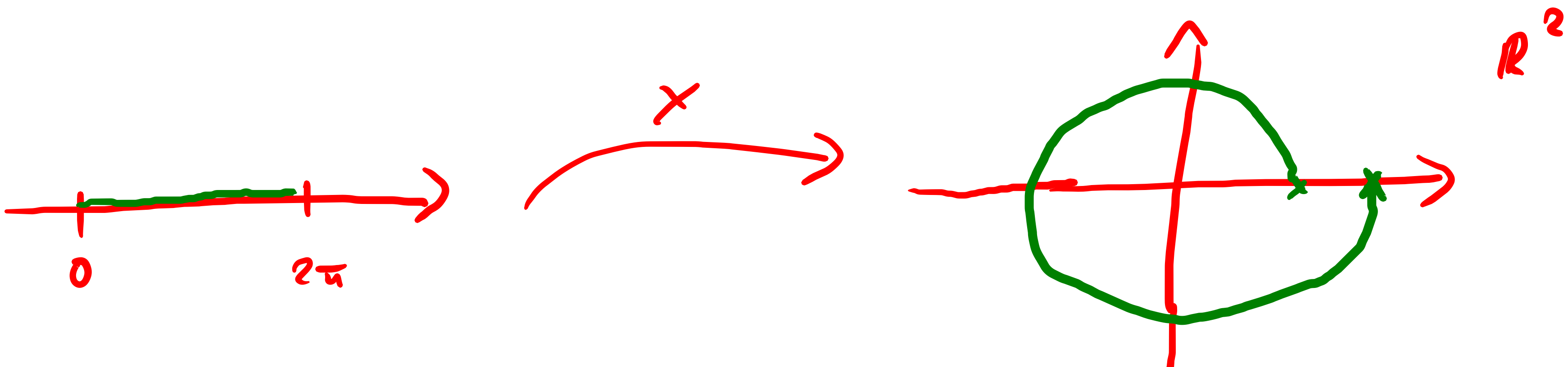
2. Bsp.



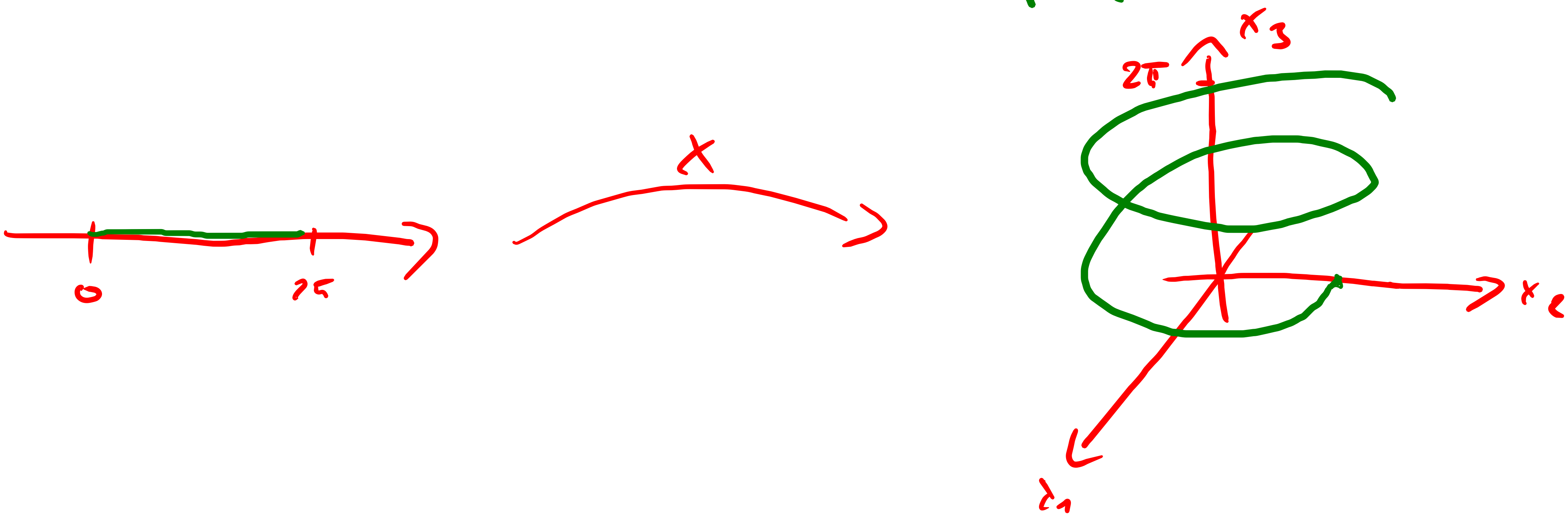
$$X : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$



$$X : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \left(1+\frac{t}{2\pi}\right) \cos(t) \end{pmatrix}$$



$$x : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ t \end{pmatrix}$$



gew. DGLs:

1. Ordnung reicht immer

hängt nicht explizit von t ab

$$\dot{x} = f(x)$$

$\dot{x} : I \to \mathbb{R}^n$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(t, x(t)) = f(x(t))$$

Bsp.:

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

$$\hookrightarrow \quad \left(a \cdot e^{kx+c} = f(x) \right) = k \cdot$$

$$k \cdot a e^{kx+c} = f'(x)$$

Möchte: Höhe von einem vertikel hochgeworfenen Ball mit Anfangsgeschwindigkeit $1 \, m/s$.

$x : I \to \mathbb{R}$, $\hat{=}$ Ort

$$\cancel{m} \cdot \ddot{x}(t) = -g \cdot \cancel{m} \quad \left(- b \cdot \dot{x}(t)^2 \right) \leftarrow \text{Windwiderstand}$$

Ortsfaktor $\left(\sim 10 \frac{m}{s^2} \right)$

1. Ordnung?

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -g \end{cases} \rightsquigarrow z = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -g \end{pmatrix} =: f(z)$$

$$z : I \to \mathbb{R}^2$$

Haben:

$$\ddot{x}(t) = -g$$

nicht autonom

U von x

$$\rightsquigarrow \quad \dot{x}(t) = -gt + v_0 = f(t, x(t))$$

H. DIR

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \ddot{x}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} -g \, d\tau = \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(t_0)}_{=: v_0}$$

$$z : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (z_0(t), z_1(t))$$

$$F : I \times U \to \mathbb{R}^2, \quad (t, x) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \underline{\dot{z}(t)} = F(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(z_0, z_1) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -g z_0 + v_0 \end{pmatrix}}$$

Waffe:

$$\ddot{x}(t) = -g$$

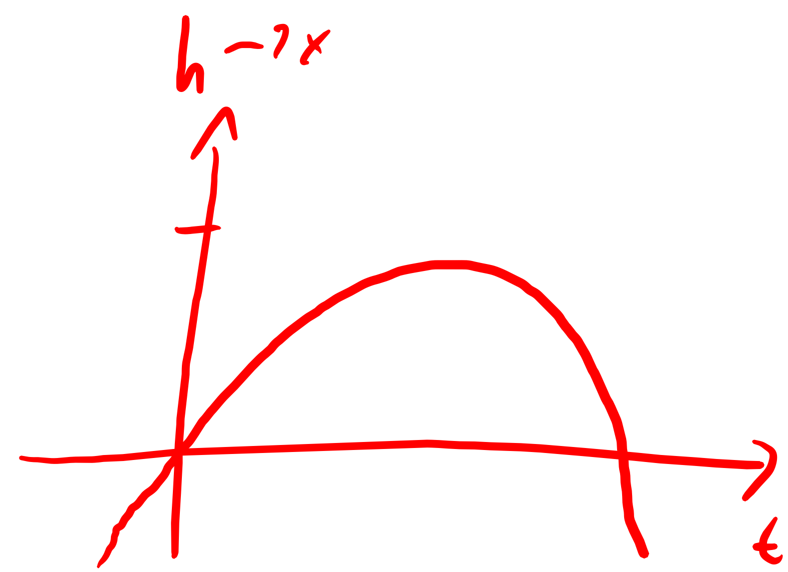
$$\rightsquigarrow \quad \dot{x}(t) = -gt + v_0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + \underbrace{x_0}_{:= x(t_0)}$$

$\dot{x}(t_0) = v_0 = 1$

$x(t_0) = x_0 = 0$

$$\rightsquigarrow \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + t \quad \rightsquigarrow$$



$[\ddot{x}(t) = g, \ x_0, \ v_0] \rightarrow$ AWP

Anfangswertproblem ∇

Frage: Gibt es Lösungen für DGLs?
Falls ja, wie viele?

Picard-Lindelöf

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ lip. stetig mit $x_0 \in U$

hinreichend !

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ s.d.

kann sehr klein sein.

$x: (-\delta, \delta) \to U$

ein. Lösung von $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ist .

DGLs:

1. reicht $\dot{x}(t) = f(x)$

$f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Vektorfeld

sobald man f kennt vollständig beschrieben

$x(t_0)$ vorgegeben

AWP

ohne Anfangswert: Bild als Fluss

"Alle Lösungen zu jeden möglichen Anfangswert"

21.07.'23

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

I Intervall in $\mathbb{R}$

$I \to \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = A(t) \circ x + b(t)$$

$\dot{x}$: $I \to \mathbb{R}^n$

A: $I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$

x: $I \to \mathbb{R}^n$

$b(t)$: $= 0$ homogen

$\neq 0$ inhomogen

stetig !

A konstant ?

Bsp. - Elektromagnetismus
- Quantenmechanik

$\sin(x) = x$

$e^x = 1 + x$

Bsp.

$$\dot{x} = \sin(t)\cdot x + e^{-t^2}$$

x^2 ↯ $\qquad\qquad$ $\sin(x)$ ↯

Lösungen existiert + eindeutig ?!

✓ für jedes AWP $\exists!$ Lösung !

$n=1$, homogen $\longrightarrow$ $x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot x_0$ $\rightsquigarrow e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \cdot c} \cdot t_0/c$

Lsg zu AWP $\quad \dot{x} = a(t)\,x \quad , \quad x(t_0) = x_0 .$

Linear ?!

Lösungsraum :

$$L_h = \{ x \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{x} = A(t) \circ x \}$$

($\mathbb{R}$-) Untervektorraum ! von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ x, y Lsg $\Rightarrow$ $x + y$ Lsg.

x Lsg , $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ αx Lsg

$\rightsquigarrow$ $\dim(L_h) = n$ (alle AWP)

$\rightsquigarrow$ Fundamentalsystem

$\underbrace{(x^1, \ldots, x^n)}_{\text{lin. unab.}}$ Basis von L_h

invertierbar

$\rightsquigarrow \quad X : I \to GL_n(\mathbb{R})$

$t \mapsto (x^1(t), \ldots, x^n(t))$

$\rightsquigarrow X^{-1} : I \to GL_n(\mathbb{R})$

Wie löst man also $\dot{x} = A(t) \circ x + b(t)$

Variation

(i) $\dot{x} = A(t) \circ x \quad \rightsquigarrow \quad c \cdot x \rightsquigarrow c(t) \cdot x$

$$\rightsquigarrow \quad x(t) = X(t) \circ \left(X(t_0)^{-1} \circ \eta_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s) \circ b(s) \, ds \right)$$

Lösungsformel für Lineare DGL mit konst. Koeffizienten

$$\dot{x} = A \circ x + b(t) \quad , \quad x(t_0) = \eta_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\longrightarrow \quad x : I \to \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto e^{A(t-t_0)} \circ \eta_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \circ b(s)\, ds$$

Großes Beispiel $(n=2)$

$$\dot{x} = A \circ x + b(t) \quad , \quad t_0 = 0 , \quad \eta_0 \in \mathbb{R}^2$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

1. Frage: Wie viele Lösungen muss ich finden?

$\hookrightarrow$ 2 Lösungen für den homogenen Fall.

$\hookrightarrow$ $\dim(L_h) = 2$

(i). homogen: $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ x$

$$\rightarrow \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} \circ \eta_0 = e^{At} \circ \eta_0$$

2. Frage: e^{At} ?! $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$$

$k=0 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad k=1 \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad k=2 \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$k=3 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad k=4 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad k=5 \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{4k}}{(4k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^{4k}}{(4k)!} - \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} & -\frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!} & \frac{t^{4k}}{(4k)!} - \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

1 Lsg 2 Lsg

Kurz: $x(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} \wedge x(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$

lösen $\dot{x} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} x$

FMS $\rightsquigarrow$ $X(t) = \begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$, $X^{-1}(t) = \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$

(ii) inhomogen: $b(t) = \begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$

$e^{At}\cdot\left(e^{As}\right)^{-1}$

Wollen: $\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \cdot b(t)\, ds$

1. $$e^{At} \cdot \left(e^{As}\right)^{-1} \circ b(s)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(s) + \sin(t)\sin(s) & \cos(t)\sin(s) - \sin(t)\cos(s) \\ \sin(t)\cos(s) - \cos(t)\sin(s) & \sin(t)\sin(s) + \cos(t)\cos(s) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$

$$= s \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(s) \\ \sin(t) & \sin(s) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(s) \\ \cos(t) & \cos(s) \end{pmatrix}$$

Nach $\rightsquigarrow$ Integration $\begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_0(t_0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

28.07.'23.

Klausuraufgaben

Skript

Geg. sei Fluss: $f(t,x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2t}}$

Aufg. Bestimme DGL zum Fluss

Lsg.:

(i) Leite f nach t ab

(ii) $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} x\left(1-2x^2t\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} x \left(1-2x^2t\right)^{-3/2}\left(-2x^2\right)$$

$$= x^3 \cdot \left(1-2x^2t\right)^{-3/2}$$

$$\xrightarrow{t=0} \quad x^3$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{x} = x^3$$

$$\left(\longrightarrow \quad \frac{\dot{x}}{x^3} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \int 1 = \int \frac{\dot{x}}{x^3}\, dt \right.$$

$$\left. t = \int \frac{1}{x^3}\, dx \right)$$

Test 2017

Aufgabe 2

$a = (0,0)^t$, $\quad f: U_1(a) \to \mathbb{R}$

$$\binom{x}{y} \longmapsto \frac{(x^3+y^2+1)^2}{1-xy}$$

Aufg. Bestimme $T^3_{f,0}$.

$$f(x,y) = (x^3+y^2+1)^2 \cdot \frac{1}{1-xy}$$

mod $(\|(x,y)\|^4)$

$$= (x^3+y^2+1)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$$

$+\mathcal{O}(\|(x,y)\|^4)$

$$\overset{\text{``}}{=} (x^3+y^2+1)^2 \cdot (1+xy) \overset{\text{``}}{=} (1+2y^2+2x^3)\cdot(1+xy)$$

$$(1+2y^2+2x^3)\cdot(1+xy) = 1 + 2y^2 + 2x^3 + xy$$

$$= 1 + 2y^2 + xy + 2x^3$$

$$x^2 \cdot \sin(xy) \cdot e^{x^2 y}$$

Aufgabe 6

$$x'''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$$

mit $x(0)=1$, $x'(0)=0$, $x''(0)=-1$

(i) DGL klassifizieren!

↳ lineare DGL 3. Ordnung mit kon. Koeff.

$t^i e^{\lambda t} \to$ NST

(32.16)
s.a. VL

Betrachte:

$$\chi = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2 \cdot (t+2) \quad \overset{\text{s.v.VL}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{(e^t, te^t, e^{-2t})}_{\text{Fundamentalsystem}}$$

$t^2 - t + 2t - 2$

$(t^2 + t - 2)(t-1)$

$$e^t + te^t = (1+t)e^t$$

(ii) AWP lösen

Wissen

$$x(t) = a \cdot e^t + bte^t + c \cdot e^{-2t}$$

$$x'(t) = ae^t + b(1+t)e^t - 2ce^{-2t}$$

$$x''(t) = ae^t + b(2+t)e^t + 4ce^{-2t}$$

$$(x(0)=1, \quad x'(0)=0, \quad x''(0)=-1)$$

$$1 = a + c \iff c = 1-a$$

$$0 = a + b - 2c \Rightarrow 0 = a + b - 2(1-a) = 3a + b - 2$$

$$-1 = a + 2b + 4c \Rightarrow -1 = a + 2b + 4(1-a) = -3a + 2b + 4$$

(i) $2 = 3a + b$

(ii) $-5 = -3a + 2b$

(i) + (ii) $\Rightarrow \quad -3 = 3b \quad \rightsquigarrow \quad b = -1$

$$2 = 3a - 1 \Rightarrow 3 = 3a \Rightarrow a = 1$$

$$c = 1 - a = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = e^t - te^t \quad \checkmark$$

Aufgabe 9

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1$,

$B := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq 1 \right\}$

(a) z.Z. B Jordan-meßbar

(b) z.Z. f integrierbar

(c) Berechne $\int_B f(x)\,dx$.

Hoffe:

$\varphi_0 \leq x_1 \leq \rho_0$

$\varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \rho_1(x_1)$

$\varphi_2(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \rho_2(x_1, x_2)$

$x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 \leq 1 - \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq 1$

$\Rightarrow \quad -1 \leq x_1 \leq 1$

$$x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq 1 - x_1^2 \qquad \Big| \; (\;)^2 \; \text{(monoton)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2^2 + x_3^2 \leq (1 - x_1^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad x_2^2 \leq (1 - x_1^2)^2 - x_3^2 \leq (1 - x_1^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad -(1 - x_1^2) \leq x_2 \leq 1 - x_1^2$$

$$x_3^2 \leq (1 - x_1^2)^2 - x_2^2$$

$$\Rightarrow \quad -\sqrt{(1 - x_1^2)^2 - x_2^2} \leq x_3 \leq \sqrt{(1 - x_1^2)^2 - x_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -1 \le x_1 \le 1 \\ -(1-x_1^2) \le x_2 \le 1-x_1^2 \\ -\sqrt{(1-x_1^2)^2 - x_2^2} \le x_3 \le \sqrt{(1-x_1^2)^2 - x_2^2} \end{array} \right\}$$

kompakter Normalbereich

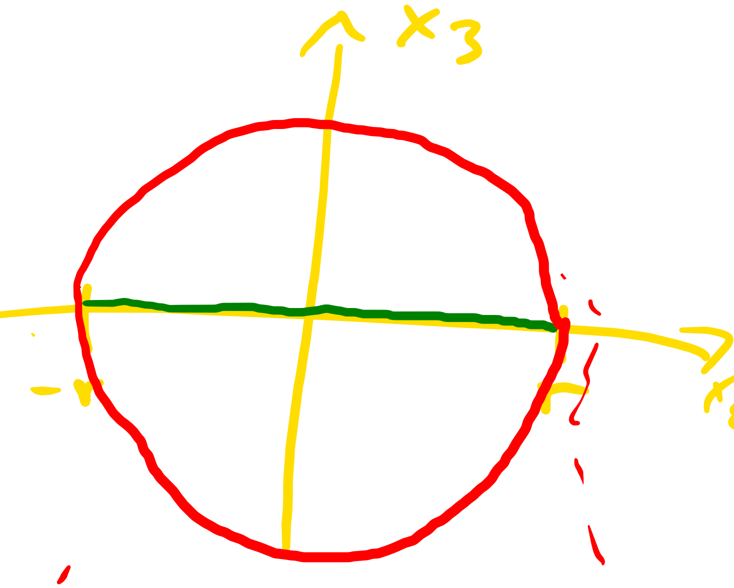
s. VL.

$\Rightarrow$ Jordan-meßbar

(b) f stetig auf B $\wedge$ B kompakt
+ Jordan-meßbar

$\Rightarrow$ f integrierbar auf B.

(c) $\int_B f(x)\, dx$



$$= \int_{-1}^{1} \int_{H} x_1 \, d(x_2,x_3)\, dx_1$$

$1 - x_1^2 =: r$ Halbkr

$\underbrace{-\sqrt{r^2 - x_2^2}}_{\text{Halbkreis}} \le x_3 \le \sqrt{r^2 - x_2^2}$

$$= \int_{-1}^{1} x_1 \cdot V(H)\, dx_1$$

$$= \int_{-1}^{1} x_1 \cdot \pi \cdot (1 - x_1^2)^2 \, dx_1 = \pi \int_{-1}^{1} \underbrace{x_1 - 2x_1^3 + x_1^5}_{\text{ungerade}} \, dx_1 = 0$$