Fachbereich Mathematik — Sommersemester 23, Blatt 1

Thomas Markwig — Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 24.04.2023, 10:00

Die Präsenzaufgaben werden in den Übungen besprochen und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1:

a. Zeige, in einem metrischen Raum ist der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen kompakt.

b. Es seien (M, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq M$ kompakt und $x \in M$. Begründe, weshalb das Minimum

$$d(x, A) := \min\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

existiert und zeige für alle $x, y \in M$ gilt

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Aufgabe 2: Es seien (M, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass die Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Zeige, dann ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Gilt die Aussage auch noch, wenn nur zwei der drei Teilfolgen als konvergent vorausgesetzt werden?

Präsenzaufgabe 5: Sei $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen und es sei

$$||f||_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\ dx}$$

die euklidische L_2-Norm auf V aus Beispiel 22.5.

Zeige, V ist nicht vollständig bezüglich der euklidischen L_2-Norm.

Hinweis: Man betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{2}n\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} & \text{für } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Präsenzaufgabe 6: Sei M ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass es eine abzählbare Teilmenge A von M gibt, die dicht in M liegt, d.h. $\overline{A} = M$.