Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 23, Blatt 2

Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 01.05.2023, 12:00

Aufgabe 3: Betrachte $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ als normierten Raum mit der euklidischen Norm

$$\|(a_{ij})\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2},$$

und betrachte $U = \{A \in V \mid A \text{ ist symmetrisch}\}$ als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von V auf U.
Zeigen Sie bitte, dass die folgende Menge offen in U ist:

$$P = \{A \in U \mid A \text{ ist positiv definit}\}$$

Aufgabe 4:

a. Sei $f : (M, d) \longrightarrow (M', d')$ eine gleichmäßig stetige Abbildung metrischer Räume. Zeige, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Gilt die Aussage in a. auch noch, wenn f nur stetig ist?

c. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei gleichmäßig stetig und bijektiv.
Zeige, ist f^{-1} stetig, so ist U abgeschlossen.

Hinweis zu c.: wenn $U \neq \mathbb{R}^n$, so kann man zeigen, daß U einen Häufungspunkt besitzt und diesen ausnutzen. Aus der Tatsache, dass U offen und abgeschlossen ist, folgt übrigens schon, dass $U = \mathbb{R}^n$ gilt; das muss aber nicht gezeigt werden.

Präsenzaufgabe 7:

a. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^t\} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Zeige,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y).$$

Ist die Funktion f stetig in den Punkt $(0,0)^t$ fortsetzbar?

b. Sei $M := \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{xy}{x-y}\right), & \text{wenn } x > y, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x = y. \end{cases}$$

Skizziere den Definitionsbereich von f in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und untersuche, an welchen Stellen die Funktion f stetig ist.

Präsenzaufgabe 8: Zeige, der Integraloperator $I : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ ist bezüglich der Maximumsnorm auf $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig.